E. CESÀRO

ELEMENTARES LEHRBUCH DER ALGEBRAISCHEN ANALYSIS UND DER INFINITESIMALRECHNUNG

DEUTSCH VON G. KOWALEWSKI

Ince Juno

ERNESTO CESÀRO
ORD. PROFESSOR AN DER KÖNIGL. UNIVERSITÄT ZU NEAPEL

ELEMENTARES LEHRBUCH DER ALGEBRAISCHEN ANALYSIS UND DER INFINITESIMALRECHNUNG

MIT ZAHLREICHEN ÜBUNGSBEISPIELEN

NACH EINEM MANUSKRIPT DES VERFASSERS
DEUTSCH HERAUSGEGEBEN VON

DR. GERHARD KOWALEWSKI
A. O. PROFESSOR A. D. UNIV. GREIFSWALD

MIT 97 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1904

DEM ANDENKEN VON

EUGENIO BELTRAMI

WIDMET DIESES BUCH ALS DANKBARER SCHÜLER

E. CESÀRO.

Urokkelig som tiden
er tallenes viden.
Deres fletninger er
i evigt morgenskjær
renere end sneen
finere end luften;
men sterkere end verden,
som de veier uden skaaler
og belyser uden straaler.

Bjørnstjerne Bjørnson.

Vorwort.

Der wichtigste Zweig der mathematischen Wissenschaft ist ohne Zweifel der, welcher die Möglichkeit ausnutzt, die Zahlen beliebig zunehmen oder abnehmen zu lassen und mit Bezug auf die zwischen ihnen stattfindenden Relationen ein System analytischer Verfahrungsweisen aufbaut, die für die Erforschung der geometrischen, sowie der mannigfachsten Naturerscheinungen so nutzbringend sind. Es ist das die sogenannte Infinitesimalrechnung. Sie soll in diesem Buche, welches zunächst für meine Schüler bestimmt war, in elementarer Weise entwickelt werden auf der sicheren Grundlage der algebraischen Analysis, deren Hauptlehren ich hier auseinandersetze. Ich nehme dabei auch Rücksicht auf den (parallellaufenden) Kursus der analytischen Geometrie. Über die Prinzipien, auf die ich bei meinem Unterricht nicht so viel Gewicht lege wie auf die Anwendungen, kann sich der Leser, der es wünscht, in ausgezeichneten Werken, wie denen von Lipschitz, Dini, Hermite, Weber, Stolz, Genocchi, Peano, Tannery, Jordan, d'Arcais, Arzelà u. s. w. eingehender unterrichten. Ich führe ihn hier schnell und sicher zu einer großen Ernte analytischer und geometrischer Tatsachen.

Dem Herrn Verleger B. G. Teubner bin ich sehr dankbar für seine für mich sehr schmeichelhafte Aufforderung, die Übersetzung meines Buches zu gestatten. Zugleich fühle ich die Verpflichtung, meinem verehrten Kollegen an der Universität Greifswald, Professor G. Kowalewski, öffentlich den lebhaftesten Dank auszusprechen für die bewundernswürdige Art, in der er diese Übersetzung ausgeführt hat. Ich verspreche mir, daß seine und meine Bemühungen ihren Lohn in einer guten Aufnahme des Buches bei der mathematischen Jugend Deutschlands finden werden, für die allein das Buch bestimmt ist. Wir bieten es ihr dar als eine Sammlung von Übungsaufgaben im Rahmen einer (wenn auch nicht erschöpfenden) Darstellung der wichtigsten Teile der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung.

Universität Neapel, 1902.

E. Cesàro.

Inhaltsübersicht.

1. Buch: **Theorie der Determinanten. Lineare und quadratische Formen.**

2. Buch: **Irrationale Zahlen. Grenzwerte. Unendliche Reihen und Produkte.**

3. Buch: **Theorie der Funktionen.**

4. Buch: **Komplexe Zahlen und Quaternionen.**

5. Buch: **Algebraische Gleichungen.**

6. Buch: **Differentialrechnung.**

7. Buch: **Integralrechnung.**

Erstes Buch.

Theorie der Determinanten. Lineare und quadratische Formen.

Theorie der Determinanten.

Die Substitutionen.

1. In der elementaren Algebra[1]) werden die Permutationen behandelt, die man mit n Elementen bilden kann, und man beweist dort, daß ihre Anzahl gleich $n!$, d. h. gleich dem Produkt der n ersten ganzen Zahlen ist. Eine von ihnen, die beliebig gewählt ist, werde im Unterschied zu allen andern als die Hauptpermutation bezeichnet. Wenn zwei Elemente in einer beliebigen Permutation in umgekehrter Reihenfolge wie in der Hauptpermutation stehen, so sagt man, daß sie eine Inversion bilden. Am größten ist die Zahl der Inversionen bei der inversen Permutation, welche man erhält, wenn man die Hauptpermutation umgekehrt schreibt. In diesem Falle liefert in der Tat jedes Paar von Elementen eine Inversion: die Gesamtzahl der Inversionen ist $\frac{1}{2}n(n-1)$. Um die Zahl der Inversionen in einer beliebigen Permutation zu bestimmen, braucht man nur nachzuzählen, wie viele Inversionen jedes Element mit den darauffolgenden bildet, und alle so erhaltenen Zahlen zu summieren. Wir werden uns künftig die Elemente durch die n ersten ganzen Zahlen dargestellt denken und $1\ 2\ 3 \ldots n$ als Hauptpermutation annehmen. Alsdann ist die Zahl der Inversionen, zu welchen ein Element Veranlassung gibt, gleich der Anzahl der kleineren Elemente, welche in der betrachteten Permutation auf dasselbe folgen. Eine Permutation heißt von der ersten Klasse oder gerade, wenn die Zahl ihrer Inversionen gerade ist, und von der zweiten Klasse oder ungerade in dem entgegengesetzten Falle. So ist z. B. die Permutation 465187293 gerade, weil sie $3 + 4 + 3 + 3 + 2 + 1$, d. h. 16 Inversionen aufweist.

1) Vgl. Baltzer, Elemente der Mathematik, 2. Teil, § 24.

2. Wenn eine Permutation in zwei Teile zerlegt ist, so ist es mit Rücksicht auf spätere Anwendungen nützlich nach der Anzahl der Inversionen zu fragen, welche die Elemente des ersten Teils mit denen des zweiten bilden. Sind $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_\nu$ die Elemente der ersten Teilpermutation, in aufsteigender Reihe geordnet, so kann i_r nur mit $1, 2, 3 \ldots, i_r - 1$ Inversionen bilden. Von diesen Elementen sind aber diejenigen auszuschließen, welche nicht der zweiten Teilpermutation angehören, also $i_1, i_2, \ldots, i_{r-1}$. Mithin ist die Anzahl der von i_r herrührenden Inversionen

$$i_r - 1 - (r - 1) = i_r - r$$

und demnach die Gesamtzahl der Inversionen, welche die Elemente der ersten Teilpermutation mit denen der zweiten bilden,

$$(i_1 - 1) + (i_2 - 2) + \cdots + (i_\nu - \nu) = i_1 + i_2 + \cdots + i_\nu - \tfrac{1}{2}\nu(\nu + 1).$$

3. Die Operation, durch welche man von einer Permutation zu einer andern mit denselben Elementen übergeht, heißt Substitution. Um einen solchen Übergang zu vollziehen, ersetze man zunächst irgend ein Element α durch dasjenige Element β, welches in der zweiten Permutation denselben Platz einnimmt wie α in der ersten; darauf lasse man an die Stelle von β in der ersten Permutation ein Element γ treten, welches dadurch an den Platz gelangt, der ihm in der zweiten Permutation entspricht, u. s. w. Fährt man in dieser Weise fort, so kommt man notwendig zu einem Element λ, an dessen Stelle α zu setzen ist. Diese Kette von Versetzungen bezeichnet man mit dem Symbol $(\alpha\,\beta\,\gamma \ldots \lambda)$, welches man einen Cyklus nennt. Wenn ein einziger Cyklus nicht imstande ist die Modifikationen zu erschöpfen, welche nötig sind, um die gewünschte Permutation zu erhalten, so sucht man irgend ein andres Element α', welches noch nicht an seinem Platze steht, und es beginnt dann eine neue Kette von Versetzungen $(\alpha'\,\beta'\,\gamma' \ldots \lambda')$. Fährt man so fort, bis alle Elemente erschöpft sind, die nicht an ihrer Stelle bleiben, so hat man schließlich die betrachtete Substitution vollzogen. Jede Substitution läßt sich also in folgender Weise darstellen:

$$(\alpha\,\beta\,\gamma \ldots \lambda)\,(\alpha'\,\beta'\,\gamma' \ldots \lambda')\,(\alpha''\,\beta''\,\gamma'' \ldots \lambda'') \ldots$$

Will man z. B. von der Permutation 123456789 zu der folgenden 465187293 übergehen, so muß man die Substitution (14)(726)(3589) ausführen.

4. Eine zirkulare Substitution ist eine solche, die aus einem einzigen Cyklus besteht. Enthält der Cyklus insbesondere nur zwei Elemente, so wird die Substitution als eine Transposition bezeichnet und besteht einfach in der Vertauschung der beiden Elemente. Die Wirkung einer zirkularen Substitution mit n Elementen läßt sich dadurch veranschaulichen, daß man die Elemente gleich weit voneinander in einem bestimmten Sinne auf einem Kreise verteilt und diesen dann um den Mittelpunkt eine Drehung um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ in entgegengesetztem Sinne ausführen läßt (Fig. 1).

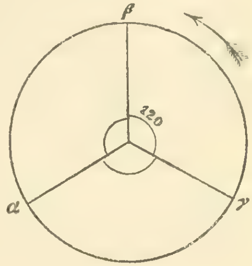

Fig. 1.

5. Jede Substitution ist in Transpositionen zerlegbar. In der Tat haben wir gesehen, daß jede beliebige Substitution in zirkulare Substitutionen zerlegbar ist, und man überzeugt sich leicht, daß jede einzelne von diesen ihrerseits in Transpositionen zerlegbar ist; denn eine zirkulare Substitution mit den Elementen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ ausführen bedeutet soviel, als α der Reihe nach mit den andern Elementen transponieren. Dies drückt sich in der Formel aus

$$(\alpha\,\beta\,\gamma\ldots\lambda) = (\alpha\beta)\,(\alpha\gamma)\ldots(\alpha\lambda).$$

6. Die Klasse einer Permutation ändert sich bei jeder Transposition. Dieser Satz liegt auf der Hand, wenn die beiden Elemente, welche transponiert werden, benachbart sind. In diesem Falle wird in der Tat durch die Transposition eine Inversion geschaffen oder eine zerstört, und die Gesamtzahl der Inversionen ändert ihren Geradheitscharakter[1]. Es wird also genügen zu zeigen, daß jede Transposition mit einer ungeraden Anzahl von Transpositionen benachbarter Elemente äquivalent ist. Wenn nun aber zwischen α und β sich ν Elemente befinden, so läßt sich die Transposition $(\alpha\beta)$ dadurch bewerkstelligen, daß man α hinter jedes dieser ν Elemente bringt, darauf α und β miteinander vertauscht und endlich β der Reihe nach vor jedes der ν Elemente bringt. Auf solche Weise führt man $2\nu + 1$ Transpositionen mit benachbarten Elementen aus, d. h. $(\alpha\beta)$ ist immer mit einer ungeraden Anzahl derartiger Transpositionen äquivalent.

7. Es ist leicht zu erkennen, daß es ebensoviel gerade Permutationen von n Elementen gibt wie ungerade. In der Tat, wenn man in allen Permutationen von n Elementen zwei bestimmte Elemente transponiert, so reproduzieren sich die $n!$ Permutationen in veränderter Reihenfolge. Dabei verwandeln sich aber die geraden Permutationen in ungerade und die ungeraden in gerade. Es muß also notwendig die Zahl der einen gleich derjenigen der andern sein.

8. Aus § 6 ergibt sich auch, daß eine Permutation bei Aus-

---

1) Wir sagen: „Zwei Zahlen haben denselben Geradheitscharakter", wenn sie beide gerade oder beide ungerade sind.

führung einer beliebigen Substitution ihre Klasse wechselt oder bewahrt, je nachdem die Zahl der Transpositionen gerade oder ungerade ist, in welche die genannte Substitution sich zerlegen läßt. Hieraus folgt, daß eine Substitution entweder immer mit einer geraden oder immer mit einer ungeraden Anzahl von Transpositionen äquivalent ist, und man gelangt so zur Einteilung der Substitutionen in gerade und ungerade.

9. Die Darstellung durch Cyklen hat neben verschiedenen andern Vorzügen auch den, daß sie sofort erkennen läßt, ob die Substitution gerade oder ungerade ist. In der Tat, wenn die ν Cyklen einer Substitution n Elemente enthalten, während n_r die Zahl der Elemente des r-ten Cyklus sein möge, so ist die Substitution auf Grund von § 5 äquivalent mit

$$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \cdots + (n_\nu - 1) = n - \nu$$

Transpositionen. Man kann demnach sagen, daß eine Substitution gerade oder ungerade ist, je nachdem die Anzahl ihrer Cyklen denselben oder einen andern Geradheitscharakter hat wie die Anzahl der Elemente, welche in den genannten Cyklen enthalten sind. So ist z. B. die Substitution (14)(726)(3589) gerade, da die Anzahl ihrer Cyklen, nämlich 3, ungerade ist wie 9, die Anzahl der in den Cyklen enthaltenen Elemente.

10. Jede gerade Substitution ist in zirkulare Substitutionen von drei Elementen zerlegbar. Da sich jede gerade Substitution in Paare von Transpositionen zerlegen läßt, so genügt es zu zeigen, daß ein Paar von Transpositionen immer mit einer oder mehreren zirkularen Substitutionen von drei Elementen äquivalent ist. Nun hat man aber, wenn die Transpositionen ein Element gemein haben, sofort

$$(\alpha\beta)\,(\alpha\gamma) = (\alpha\beta\gamma);$$

ferner kann man unter Benutzung dieser Bemerkung schreiben

$$(\alpha\beta)\,(\gamma\delta) = (\alpha\beta)\,(\alpha\gamma)\,(\gamma\alpha)\,(\gamma\delta) = (\alpha\beta\gamma)\,(\gamma\alpha\delta),$$

und das Theorem ist bewiesen. Man bemerke, daß umgekehrt eine Substitution, die sich in zirkulare Substitutionen von drei Elementen zerlegen läßt, notwendig gerade ist, weil dies von allen Substitutionen gilt, aus denen sie zusammengesetzt ist.

Matrices und Determinanten.

11. Ein rechteckiges Schema

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix},$$

welches m Reihen von n Zahlen enthält, nennt man eine Matrix. Man unterscheidet die quadratische Matrix von der rechteckigen, je nachdem $m = n$ oder $m \neq n$ ist. Eine Determinante ist die Entwickelung einer quadratischen Matrix nach einem Gesetz, welches wir sogleich erklären werden. Wird

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

gesetzt, so heifst die Zahl n die Ordnung der Determinante D, und man erhält den Wert von D, indem man alle Produkte summiert, die sich aus n Elementen der Matrix derart bilden lassen, daß jeder Horizontalreihe und jeder Vertikalreihe nur ein Element entnommen wird. Ferner ist jedem Produkte das Vorzeichen $+$ oder $-$ zu geben, je nachdem die beiden Permutationen, welche von den Indices der Horizontalreihen und der Vertikalreihen gebildet werden, zu derselben Klasse oder zu verschiedenen Klassen gehören. Sind mit andern Worten $i_1, i_2, \dots i_n$ und $j_1, j_2, \dots, j_n$ zwei beliebige Permutationen der n ersten ganzen Zahlen, so hat man

$$D = \sum (-1)^{r+s} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} a_{i_3 j_3} \dots a_{i_n j_n},$$

wobei r und s bezüglich die Anzahlen der Inversionen in den betrachteten Permutationen bedeuten. Um diese Definition zu rechtfertigen, ist die Bemerkung notwendig, daß das Vorzeichen eines jeden Gliedes dasselbe bleibt, wenn man die Reihenfolge der Faktoren ändert. In der Tat zieht jede mit den a vorgenommene Substitution die gleiche bei den i und bei den j nach sich, so daß die Permutationen $i_1\, i_2 \dots i_n$ und $j_1\, j_2 \dots j_n$ gleichzeitig ihre Klasse wechseln oder beibehalten. Mit anderen Worten: Die Zahlen r und s ändern oder bewahren gleichzeitig ihren Geradheitscharakter, und $r + s$ bleibt demnach immer gerade oder immer ungerade.

12. Um D zu berechnen, können wir also die zweiten Indices in aufsteigender Reihe ordnen und

$$D = \sum (-1)^r a_{i_1 1} a_{i_2 2} a_{i_3 3} \ldots a_{i_n n}$$

setzen. Noch kürzer pflegt man zu schreiben

$$D = \sum \pm a_{11} a_{22} a_{33} \ldots a_{nn},$$

womit gemeint ist, daß die ersten oder die zweiten Indices auf alle möglichen Arten permutiert werden sollen, während man dem Produkt sein Vorzeichen läßt oder ihm das entgegengesetzte erteilt, je nachdem die zugehörige Permutation gerade oder ungerade ist. So gehören z. B. der Entwickelung der Determinante die Glieder

$$a_{11} a_{22} a_{33} \ldots a_{nn}, \quad (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} a_{n1} a_{n-1,2} a_{n-2,3} \ldots a_{1n}$$

an. Die Elemente, aus welchen das erste von diesen Gliedern zusammengesetzt ist, bezeichnet man als Hauptelemente oder als die Elemente der Hauptdiagonale; diejenigen, aus welchen das zweite zusammengesetzt ist, gehören der zweiten Diagonale an. Im ganzen giebt es $n!$ Glieder, die eine Hälfte mit dem Zeichen $+$, die andere mit dem Zeichen $-$, wie sich ohne weiteres aus dem in den §§ 1, 7 Gesagten ergiebt.

13. Beispiele. Die Determinante zweiter Ordnung ist

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

In den Anwendungen kommt man häufig in die Lage, Determinanten von der dritten Ordnung betrachten zu müssen. Ihre Entwickelung ergibt sich leicht mit Hilfe der Regel von Sarrus: Man multipliziere die Elemente miteinander, welche in den Ecken jedes Dreiecks in der Figur links liegen

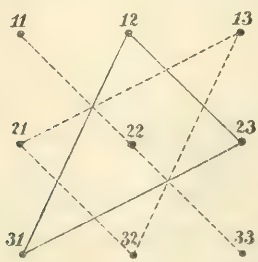

Fig. 2.

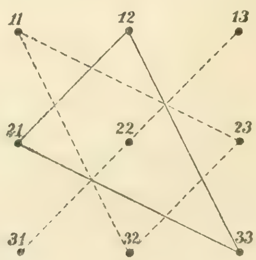

Fig. 3.

und addiere die Produkte zu dem Produkt der Hauptelemente. Man erhält auf diese Weise die positiven Glieder der Entwickelung, während sich die negativen Glieder in analoger Weise aus der Figur rechts ergeben:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2 .$$

Man beweist dies durch die Bemerkung, daß von den Permutationen dreier Elemente 123, 231, 312, 321, 213, 132 die drei ersten gerade, die übrigen ungerade sind.

14. Aus der in § 11 zu Grunde gelegten Definition ergeben sich unmittelbar die Haupteigenschaften der Determinanten. Denken wir uns z. B., die Vertikalreihen werden permutiert derart, daß die Determinante sich in

$$D' = \begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} & \cdots & a_{nj_n} \end{vmatrix}$$

verwandelt. Nach dem in § 12 Gesagten erhält man die Entwickelung der neuen Determinante, indem man die Summe

$$D' = \sum (-1)^r a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} a_{i_3 j_3} \cdots a_{i_n j_n}$$

über alle möglichen Permutationen der ersten Indices erstreckt. Ebenso läßt sich D entwickeln, indem man den zweiten Indices die Reihenfolge $j_1, j_2, \ldots, j_n$ erteilt und dann bloß die ersten Indices permutiert, so daß

$$D = \sum (-1)^{r+s} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n} = (-1)^s \sum (-1)^r a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$$

d. h. $D = (-1)^s D'$ ist. Demnach ändert eine mit parallelen Reihen ausgeführte Substitution den absoluten Betrag der Determinante nicht; sie ändert jedoch deren Vorzeichen oder läßt auch das Vorzeichen ungeändert, je nachdem die Substitution gerade oder ungerade ist. Im besonderen ist es erlaubt zwei parallele Reihen zu transponieren, wenn man gleichzeitig das Vorzeichen der Determinante ändert.

15. Eine andere bemerkenswerte Eigenschaft ist folgende: Werden alle Elemente einer Reihe mit einer und derselben Zahl multipliziert, so multipliziert sich die Determinante mit dieser Zahl. In der Tat enthält jedes Glied der Entwickelung ein und nur ein Element von denen, die mit k multipliziert werden, und es ist also klar, daß die ganze Entwickelung sich mit k multipliziert. Insbesondere bemerke man für $k = -1$, daß man das Zeichen aller Elemente einer Reihe ändern darf, wenn man das Zeichen der Determinante ändert.

16. Gleich Null ist jede Determinante mit zwei äquivalenten parallelen Reihen. Zwei Horizontal- oder zwei Vertikalreihen heißen identisch oder äquivalent, wenn die Elemente der einen der Reihe nach gleich oder proportional denjenigen der andern sind. Multipliziert man die Determinante mit einem geeigneten Faktor, so läßt es sich immer so einrichten, daß die beiden Reihen identisch sind, so daß durch ihre Transposition in der gegebenen Determinante nichts geändert wird. Andrerseits ist uns bekannt (§ 14), daß sich vermöge der Transposition D in $-D$ verwandelt. Es ist also $D = -D$, mithin $D = 0$.

17. Eine Determinante läßt sich in eine Summe von Determinanten zerlegen, indem man in analoger Weise die Elemente einer und derselben Reihe in Teile zerlegt. Es ist z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1 + \alpha & a_2 & a_3 \\ b_1 + \beta & b_2 & b_3 \\ c_1 + \gamma & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & a_2 & a_3 \\ \beta & b_2 & b_3 \\ \gamma & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Dies ergiebt sich unmittelbar aus dem Umstand, daß jedes Glied der Determinante eins und nur eins von den Elementen enthält, die man in Teile zerlegen will. Berücksichtigt man ferner das im vorigen Paragraphen Gesagte, so ersieht man sofort, daß der Wert einer Determinante sich nicht ändert, wenn man zu den Elementen einer Reihe die entsprechenden Elemente einer parallelen Reihe, multipliziert mit einer und derselben Zahl, hinzufügt.

18. Die Determinanten, welche man aus einer Matrix erhält, indem man auf alle möglichen Arten eine gewisse Anzahl von Horizontalreihen mit einer gleichen Anzahl von Vertikalreihen kombiniert, heißen in jener Matrix enthalten. Große Determinanten nennen wir diejenigen, welche die höchste Ordnung haben, Minoren alle übrigen. Wir bezeichnen ferner als Rang einer Matrix die Maximalordnung der nicht verschwindenden Determinanten, welche in der Matrix enthalten sind. Z. B. hat die Matrix

$$\begin{vmatrix} 0 & c & -b & b-c \\ -c & 0 & a & c-a \\ b & -a & 0 & a-b \end{vmatrix},$$

deren Elemente nicht sämtlich verschwinden, den Rang 2, da ihre großen Determinanten gleich Null sind, während die in ihr enthaltenen Determinanten zweiter Ordnung nicht sämtlich verschwinden.

Minoren.

19. Von den in der Matrix der Determinante D enthaltenen Minoren wollen wir einen, etwa

$$Q = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & a_{i_1 j_3} & \dots & a_{i_1 j_\nu} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & a_{i_2 j_3} & \dots & a_{i_2 j_\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_\nu j_1} & a_{i_\nu j_2} & a_{i_\nu j_3} & \dots & a_{i_\nu j_\nu} \end{vmatrix},$$

betrachten. Wenn $i_1 = j_1$, $i_2 = j_2$, ..., $i_\nu = j_\nu$ ist, so spricht man von einem Hauptminor. Seine Hauptelemente gehören der Hauptdiagonale der großen Determinante an. Konjugiert sollen zwei solche Minoren heißen, bei denen die Horizontalreihen des einen dieselben Indices haben wie die Vertikalreihen des andern und umgekehrt. Jeder Hauptminor ist zu sich selbst konjugiert. Im besondern läßt sich jedes Element als ein Minor von der ersten Ordnung ansehen. Die Elemente a_{ij} und a_{ji} sind konjugiert, und jedes Hauptelement a_{ii} ist zu sich selbst konjugiert.

20. Den Minor Q kann man sich dadurch entstanden denken, daß in der Determinante D eine gewisse Anzahl von Horizontalreihen und eine gleiche Anzahl von Vertikalreihen unterdrückt wird. Werden dagegen in D diejenigen Reihen unterdrückt, welche an der Bildung von Q beteiligt sind, so erhält man einen Minor Q' von der Ordnung $n - \nu$. Q und Q' heißen komplementäre Minoren: Q ist das Komplement von Q' und umgekehrt. Man bezeichnet ferner als algebraisches Komplement von Q' das gewöhnliche Komplement Q, genommen mit seinem eignen oder mit dem entgegengesetzten Zeichen, je nachdem die Summe der Indices aller Reihen, welche bei seiner Bildung beteiligt sind, gerade oder ungerade ist. Mit andern Worten: Während Q' als gewöhnliches Komplement Q hat, ist sein algebraisches Komplement $(-1)^\sigma Q$, wenn zur Abkürzung

$$\sigma = i_1 + i_2 + \cdots + i_\nu + j_1 + j_2 + \cdots + j_\nu$$

gesetzt wird. Man bemerke, daß, wenn σ' die analoge Zahl für Q' bedeutet, $\sigma + \sigma'$ die Summe der Indices aller Horizontal- und aller Vertikalreihen der großen Determinante darstellt, daß also

$$\sigma + \sigma' = 2\,(1 + 2 + 3 + \cdots + n)$$

ist. Daraus folgt, daß σ und σ' denselben Geradheitscharakter haben, und es muß demnach zwei komplementären Minoren ein und dasselbe Zeichen erteilt werden, um sie algebraisch zu machen, d. h. das algebraische Komplement von Q' ist Q oder $-Q$, je nachdem dasjenige von Q bezüglich Q' oder $-Q'$ ist. Im besondern ist das algebraische Komplement eines Elements a_{ij} nichts anderes als die Determinante, welche man aus D erhält, indem man die i-te Horizontal- und die j-te Vertikalreihe unterdrückt und das Resultat mit unverändertem Vorzeichen oder mit dem entgegengesetzten Vorzeichen nimmt, je nachdem i und j denselben oder verschiedenen Geradheitscharakter haben.

21. Hilfssatz. Das Produkt eines Minors mit seinem algebraischen Komplement ist ein Bestandteil der großen Determinante.

Man erhält jedes Glied des Produktes, indem man ein Glied von Q mit einem Glied von Q' multipliziert und das so erhaltene Produkt noch mit dem Koeffizienten $(-1)^\sigma$ versieht. Abgesehen vom Vorzeichen ist dieses Teilprodukt ein Glied von D, da es aus $\nu + (n - \nu) = n$ Elementen gebildet ist, die sämtlich verschiedenen Reihen angehören. Die ersten Indices bilden eine Permutation der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$, die in zwei Teile geteilt ist. Wenn diese bezüglich r und r' Inversionen aufweisen, und wenn s und s' die analogen Zahlen für die Permutation der zweiten Indices sind, so ist das dem Produktgliede erteilte Vorzeichen gegeben durch

$$(-1)^{r+r'}(-1)^{s+s'}(-1)^\sigma = (-1)^{r+r'+s+s'+\sigma}.$$

Wir wollen zeigen, daß dies gerade das Zeichen ist, welches dem Produktgliede zukommt, wenn man es als zu der großen Determinante gehörig betrachtet. Die Zahl der Inversionen in der Permutation der ersten Indices ist offenbar gleich der Summe der Zahlen r und r' der Inversionen in den beiden Teilpermutationen von ν und $n - \nu$ Elementen plus der Zahl ε der Inversionen, welche die Elemente der ersten Teilpermutation mit denjenigen der zweiten bilden. Ebenso ist die Zahl der Inversionen in der Permutation der zweiten Indices $s + s' + \eta$, wenn η die Zahl der Inversionen bedeutet, welche die ersten ν Elemente mit allen übrigen bilden. Das gesuchte Vorzeichen ist also $(-1)^{r+r'+s+s'+\varepsilon+\eta}$. Andrerseits haben wir gesehen (§ 2), daß

$$\varepsilon = i_1 + i_2 + \cdots + i_\nu - \tfrac{1}{2}\nu(\nu+1), \quad \eta = j_1 + j_2 + \cdots + j_\nu - \tfrac{1}{2}\nu(\nu+1)$$

ist. Daraus folgt $\varepsilon + \eta = \sigma - \nu(\nu+1)$. Beachtet man also, daß $\nu(\nu+1)$ immer gerade ist, so ergibt sich

$$(-1)^{r+r'+s+s'+\varepsilon+\eta} = (-1)^{r+r'+s+s'+\sigma}.$$

22. Theorem. Jede Determinante ist gleich der Summe aller in ν parallelen Reihen enthaltenen Minoren, multipliziert mit den bezüglichen algebraischen Komplementen.

Nach dem vorhin Gesagten gehören die durch diese Multiplikation erhaltenen Glieder der Determinante an. Es ist ferner evident, daß sie alle voneinander verschieden sind, und es bleibt nur zu zeigen, daß ihre Anzahl gerade $n!$ ist, um zu beweisen, daß in der betrachteten Determinante, deren Ordnung n ist, außer denjenigen, welche aus der angegebenen Multiplikation hervorgehen, keine andern Glieder vorkommen können. Die Anzahl der Minoren ν-ter Ordnung, welche aus den ν Reihen gebildet sind, ist offenbar gleich der Anzahl der Kombinationen[1]) von n Dingen zu je ν. Jeder von ihnen

1) Baltzer, Elemente der Mathematik, 2. Teil, § 25.

besteht aus $\nu!$ Gliedern, während das zugehörige algebraische Komplement deren $(n-\nu)!$ enthält, so daß man im ganzen

$$\nu!\,(n-\nu)!\,\frac{n!}{\nu!\,(n-\nu)!} = n!$$

Glieder hat.

23. Folgerung. Jede Determinante ist gleich der Summe der Produkte, welche man erhält, wenn man alle Elemente einer Reihe mit den bezüglichen algebraischen Komplementen multipliziert.

Mit andern Worten: Wenn α_{ij} das algebraische Komplement von a_{ij} ist, so hat man

$$D = a_{i1}\,\alpha_{i1} + a_{i2}\,\alpha_{i2} + a_{i3}\,\alpha_{i3} + \cdots + a_{in}\,\alpha_{in}$$

für ein beliebiges i. Man pflegt kurz zu schreiben

$$D = \sum_{r=1}^{r=n} a_{ir}\,\alpha_{ir}\,.$$

24. Dagegen ist die Summe der Produkte aller Elemente einer Reihe mit den algebraischen Komplementen der entsprechenden Elemente einer beliebigen andern parallelen Reihe gleich Null. In der Tat stellt die Summe

$$a_{i1}\,\alpha_{j1} + a_{i2}\,\alpha_{j2} + a_{i3}\,\alpha_{j3} + \cdots + a_{in}\,\alpha_{jn}$$

die Entwickelung der Determinante D dar, nachdem man in ihrer Matrix die Elemente $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots$ bezüglich an die Stelle von $a_{j1}, a_{j2}, a_{j3}, \ldots$ gesetzt hat. Die so erhaltene Determinante hat zwei identische parallele Reihen und ist daher null (§ 16). Es ist also

$$\sum_{r=1}^{r=n} a_{ir}\,\alpha_{jr} = 0 \text{ für } i \neq j\,.$$

25. Wir beweisen zum Schluß eine andere wichtige Formel, welche uns im folgenden häufig von Nutzen sein wird. Der Inbegriff aller Glieder in der Entwickelung von D, welche ein gegebenes Element a_{rs} enthalten, ist $a_{rs}\,\alpha_{rs}$. Dies ergibt sich sofort aus § 23. Jedes andere Glied der Entwickelung enthält immer ein Element der r-ten Horizontalreihe und ein Element der s-ten Vertikalreihe, beide von a_{rs} verschieden. Die genannten Elemente seien a_{rj} und a_{is}. Sie bilden mit a_{rs} und a_{ij} den Minor

$$\begin{vmatrix} a_{ij} & a_{is} \\ a_{rj} & a_{rs} \end{vmatrix} = a_{ij}\,a_{rs} - a_{is}\,a_{rj}\,,$$

welcher in der Entwickelung von D multipliziert mit dem entsprechenden algebraischen Komplement a_{ij} vorkommt (§ 22), so daß $-a_{ij}$ der Koeffizient von $a_{is}\,a_{rj}$ und

$$D = a_{rs}\,\alpha_{rs} - \sum_{i,j} a_{ij}\,\alpha_{is}\,\alpha_{rj}$$

ist, wo man i die Werte $1, 2, 3, \cdots, n$, außer r, und j die nämlichen Werte, außer s, zu erteilen hat. Es ist ferner wichtig zu bemerken, daß man a_{ij} als das algebraische Komplement von α_{ij} betrachten kann, aber nicht in D, sondern in α_{rs}.

Berechnung der Determinanten.

26. Aus den in den letzten beiden Kapiteln bewiesenen Eigenschaften ergeben sich Regeln, welche eine gegebene Determinante schnell zu berechnen gestatten. Indem man die verschiedenen Reihen mit passenden Faktoren versieht und eine von den andern subtrahiert, läßt sich erreichen, daß alle Elemente einer Reihe mit Ausnahme eines einzigen null werden. Alsdann reduziert sich (§ 23) die Determinante auf das Produkt des nicht verschwindenden Elements und seines algebraischen Komplements. Es ist auch nützlich zu bemerken, daß sich die Determinante, wenn alle auf der einen Seite der Hauptdiagonale liegenden Elemente verschwinden, auf das Produkt der Hauptelemente reduziert.

27. Übungen. a) Den Wert der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ ac & ad+bc & bd \\ c^2 & 2cd & d^2 \end{vmatrix}$$

kann man erhalten, indem man auf die zweite Vertikalreihe das Theorem des § 23 anwendet:

$$D = -2ab\cdot cd\,(ad-bc) + (ad+bc)\,(a^2d^2-b^2c^2) - 2cd\cdot ab\,(ad-bc).$$

Mithin ist

$$D = (ad-bc)\left[(ad+bc)^2 - 4abcd\right] = (ad-bc)^3.$$

b) Es sei zur Berechnung vorgelegt

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix}.$$

Man addiere zur ersten Vertikalreihe alle andern, ziehe den Faktor

$a+b+c+d$ hervor und subtrahiere dann die erste Horizontalreihe von den folgenden. Dadurch erhält man

$$D=(a+b+c+d)\begin{vmatrix}1 & b & c & d\\ 1 & a & b & c\\ 1 & d & a & b\\ 1 & c & d & a\end{vmatrix}=(a+b+c+d)\begin{vmatrix}a-b & b-c & c-d\\ d-b & a-c & b-d\\ c-b & d-c & a-d\end{vmatrix}.$$

Addiert man in der neuen Determinante zu der ersten Vertikalreihe die letzte, zieht dann den Faktor $a-b+c-d$ heraus und subtrahiert endlich die letzte Horizontalreihe von der ersten, so wird die neue Determinante

$$(a-b+c-d)\begin{vmatrix}1 & b-c & c-d\\ 0 & a-c & b-d\\ 1 & d-c & a-d\end{vmatrix}=(a-b+c-d)\begin{vmatrix}b-d & c-a\\ a-c & b-d\end{vmatrix}.$$

Mithin ist

$$D=(a+b+c+d)(a-b+c-d)\left[(a-c)^2+(b-d)^2\right].$$

c) Wenn man in

$$D=\begin{vmatrix}a & b & c & d\\ b & a & d & c\\ c & d & a & b\\ d & c & b & a\end{vmatrix}$$

zur ersten Vertikalreihe alle andern addiert, so sieht man sofort, daß die Determinante D, welche offenbar gleich einem Polynom vierten Grades in a, b, c, d ist, den Faktor $a+b+c+d$ hat. Wenn man vor Ausführung der angegebenen Operation die Vorzeichen der Elemente in den letzten beiden Vertikalreihen und in den letzten beiden Horizontalreihen umkehrt, so erhält man den Faktor $a+b-c-d$, und in analoger Weise findet man die Faktoren $a-b+c-d$, $a-b-c+d$. Da D vom vierten Grade ist, so kann es sich von dem Produkt dieser vier Faktoren nur um einen Zahlenfaktor k unterscheiden, dessen Wert man berechnet, indem man ein beliebiges Glied des Produktes, z. B. a^4, mit dem entsprechenden Gliede von D vergleicht, welches offenbar gleich a^4 ist, woraus sich $k=1$ ergibt. Mithin ist

$$D=(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d).$$

d) Als Vandermondesche Determinante bezeichnet man die Determinante

$$D=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1}\\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}.$$

Man sieht sofort, daß D ein Polynom vom Grade

$$1+2+3+\cdots+(n-1)=\tfrac{1}{2}n(n-1) \text{ in } a_1, a_2, \ldots, a_n$$

ist. Wenn man $a_i = a_j$ annimmt, so bekommt die Determinante zwei identische Reihen und verschwindet daher. Das genannte Polynom besitzt also den Faktor $a_i - a_j$. Betrachtet man alle möglichen Paare von Indices i und j, so erhält man $\frac{1}{2}n(n-1)$ Faktoren $a_i - a_j$, deren Produkt sich von D nur um einen Zahlenfaktor unterscheiden kann, so daß

$$D = k(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)\ldots(a_{n-1}-a_n)$$

ist. Um den Wert von k zu ermitteln, genügt es zu bemerken, daß dies der Koeffizient des Gliedes

$$a_1^{\,n-1}\, a_2^{\,n-2} \ldots a_{n-1}$$

in dem durch Multiplikation erhaltenen Polynom ist, während dasselbe Glied, wie man sieht, aus den in der zweiten Diagonale von D liegenden Elementen gebildet werden kann und in D als Koeffizienten $(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ haben muß. Mithin ist $k=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}$. Man pflegt kurz zu schreiben

$$D = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \prod_{r=1}^{r=n-1} (a_r - a_{r+1})(a_r - a_{r+2}) \ldots (a_r - a_n).$$

Es ist ferner evident, daß man auch schreiben kann

$$D = \prod_{r=1}^{r=n-1} (a_{r+1} - a_r)(a_{r+2} - a_r) \ldots (a_n - a_r).$$

e) Andere Determinanten reduzieren sich leicht auf die von Vandermonde. So ist z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1^2 & b_1^2 & a_1 b_1 \\ a_2^2 & b_2^2 & a_2 b_2 \\ a_3^2 & b_3^2 & a_3 b_3 \end{vmatrix} = -\,a_1^2\, a_2^2\, a_3^2 \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{b_1}{a_1} & \left(\dfrac{b_1}{a_1}\right)^2 \\ 1 & \dfrac{b_2}{a_2} & \left(\dfrac{b_2}{a_2}\right)^2 \\ 1 & \dfrac{b_3}{a_3} & \left(\dfrac{b_3}{a_3}\right)^2 \end{vmatrix},$$

und die rechte Seite kann man sofort ersetzen durch

$$\begin{aligned} &-a_1^2\, a_2^2\, a_3^2 \left(\frac{b_2}{a_2} - \frac{b_3}{a_3}\right)\left(\frac{b_3}{a_3} - \frac{b_1}{a_1}\right)\left(\frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2}\right) \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)(a_3 b_1 - a_1 b_3)(a_1 b_2 - a_2 b_1). \end{aligned}$$

Ebenso erhält man

$$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \sin\beta\cos\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \sin\gamma\cos\gamma \end{vmatrix} = \sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)\sin(\alpha-\beta).$$

f) Mit Hilfe der gewöhnlichen Divisionen und Subtraktionen von Reihen oder auch durch ein analoges Verfahren wie dasjenige, welches wir bei der

Vandermondeschen Determinante angewendet haben, beweist man, daß die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & \dots & a_1 b_n \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 & a_2 b_3 & \dots & a_2 b_n \\ a_1 b_3 & a_2 b_3 & a_3 b_3 & \dots & a_3 b_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 b_n & a_2 b_n & a_3 b_n & \dots & a_n b_n \end{vmatrix}$$

den Wert

$$a_1 b_n (a_2 b_1 - a_1 b_2)(a_3 b_2 - a_2 b_3) \dots (a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n)$$

hat.

g) Es sei

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Von allen Vertikalreihen subtrahiere man die letzte. Dann kommt

$$D = \begin{vmatrix} a_1 - x & 0 & 0 & \dots & x \\ 0 & a_2 - x & 0 & \dots & x \\ 0 & 0 & a_3 - x & \dots & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x - a_n & x - a_n & x - a_n & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Zieht man jetzt aus den Horizontalreihen die Faktoren $a_1 - x$, $a_2 - x$, $\dots$, $a_n - x$, so sieht man, daß D das Produkt von $(a_1 - x)(a_2 - x) \dots (a_n - x)$ mit der Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \frac{x}{a_1 - x} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \frac{x}{a_2 - x} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{x}{a_3 - x} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & -1 & -1 & \dots & \frac{a_n}{a_n - x} \end{vmatrix}$$

ist. Diese verwandelt sich, wenn man alle Horizontalreihen zu der letzten addiert, in

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \frac{x}{a_1 - x} \\ 0 & 1 & \dots & \frac{x}{a_2 - x} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \frac{a_n}{a_n - x} + \sum_1^{n-1} \frac{x}{a_r - x} \end{vmatrix}.$$

Die unter den Hauptelementen stehenden Elemente sind sämtlich null, und die letzte Determinante reduziert sich daher auf das Produkt der Hauptelemente. Folglich ist

$$D = (a_1 - x)(a_2 - x) \dots (a_n - x)\left(\frac{a_n}{a_n - x} + \sum_1^{n-1} \frac{x}{a_r - x}\right)$$
$$= x(a_1 - x)(a_2 - x) \dots (a_n - x)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a_1 - x} + \frac{1}{a_2 - x} + \dots + \frac{1}{a_n - x}\right).$$

h) Ist eine Determinante D gegeben, so kann man leicht (§ 17) die Determinante $D(x)$ berechnen, welche aus D entsteht, indem man zu allen Elementen x hinzufügt, d. h.

$$D(x) = \begin{vmatrix} a_{11} + x & a_{12} + x & \dots & a_{1n} + x \\ a_{21} + x & a_{22} + x & \dots & a_{2n} + x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} + x & a_{n2} + x & \dots & a_{nn} + x \end{vmatrix}.$$

Die Determinante, welche man erhält, wenn man nur die ersten Teile der Elemente nimmt, ist D. Wenn man in der ersten Vertikalreihe nur die zweiten Teile der Elemente nimmt, so findet man die Determinante

$$\begin{vmatrix} x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ x & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = x(\alpha_{11} + \alpha_{21} + \dots + \alpha_{n1}).$$

Macht man dasselbe für alle übrigen Vertikalreihen, so erhält man nach Addition das Produkt von x und der Summe der algebraischen Komplemente aller Elemente von D. Nimmt man in zwei oder mehr Vertikalreihen die zweiten Teile der Elemente, so erhält man Determinanten mit identischen Vertikalreihen, die folglich null sind. Es ist demnach

$$D(x) = D + x \sum_{i,j} \alpha_{ij}.$$

Wenn im besondern in D alle Elemente außer den Hauptelementen $a_1, a_2, \dots, a_n$ null sind, so ist die Determinante α_{ij} null für $i \neq j$, reduziert sich aber für $i = j$ auf das Produkt ihrer eignen Hauptelemente, d. h. auf D selbst, dividiert durch a_i. Mithin ist

$$\begin{vmatrix} x+a_1 & x & \dots & x \\ x & x+a_2 & \dots & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x & x & \dots & x+a_n \end{vmatrix} = x\,a_1\,a_2\dots a_n\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right).$$

Man braucht nur jedes a_i in $a_i - x$ zu verwandeln, um das Resultat des vorigen Übungsbeispiels wiederzufinden.

i) In analoger Weise berechnet man die Determinante, welche man erhält, wenn man x nur zu den Hauptelementen von D addiert. Wenn wir mit σ_ν die Summe aller Hauptminoren ν-ter Ordnung von D bezeichnen, sehen wir sofort, indem wir an Stelle derjenigen Elemente a_{ij}, die nicht Hauptelemente sind, $a_{ij}+0$ schreiben, daß

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+x & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = D + x\sigma_{n-1} + x^2\sigma_{n-2} + \cdots + x^{n-1}\sigma_1 + x^n$$

ist.

j) Um

$$D = \begin{vmatrix} a_0+a_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_1+a_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & a_2+a_3 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & a_3+a_4 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1}+a_n \end{vmatrix}$$

zu berechnen, subtrahiere man die erste Vertikalreihe von der zweiten, dann diese so modifizierte von der dritten u. s. w. Man wiederhole diese Operationen mit den Horizontalreihen und kehre die Vorzeichen in allen Reihen mit geradem Index um. Alsdann nimmt D die Form der vorletzten Determinante an, abgesehen von der Verwandlung von x in a_0. Mithin ist

$$D = a_0\,a_1\,a_2\dots a_n\left(\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right).$$

k) Zu dem letzten Resultat gelangt man auch, indem man die Determinante nach den Elementen der letzten Horizontalreihe und der letzten Vertikalreihe entwickelt (§ 25). Wird die vorgelegte Determinante mit D_n bezeichnet, so erhält man sofort

$$D_n = (a_{n-1}+a_n)\;D_{n-1} - a_{n-1}^2\;D_{n-2}.$$

Dieser Relation läßt sich die Form geben

$$D_n - a_n\,D_{n-1} = a_{n-1}\,(D_{n-1} - a_{n-1}\,D_{n-2}).$$

Ersetzt man jetzt n durch $n-1, n-2, \ldots, 4, 3$ und beachtet, daß

$$D_1 = a_0 + a_1, \quad D_2 = a_1 a_2 + a_2 a_0 + a_0 a_1, \quad D_2 - a_2 D_1 = a_0 a_1$$

ist, so findet man durch Multiplikation

$$D_n - a_n D_{n-1} = a_0 a_1 a_2 \ldots a_{n-1}$$

oder

$$\frac{D_n}{a_0 a_1 a_2 \ldots a_n} - \frac{D_{n-1}}{a_0 a_1 a_2 \ldots a_{n-1}} = \frac{1}{a_n}.$$

Ersetzt man endlich n durch $n-1, n-2, \ldots, 3, 2$, so ergibt sich durch Summation

$$\frac{D_n}{a_0 a_1 a_2 \ldots a_n} = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}.$$

l) Als Kontinuanten bezeichnet man wegen ihrer Beziehung zur Theorie der Kettenbrüche[1]) solche Determinanten, deren Elemente verschwinden mit Ausnahme der Hauptelemente und derjenigen, welche den beiden zur Hauptdiagonale parallelen und benachbarten Linien angehören. Diese haben den Wert 1 bezw. -1, während die Hauptelemente beliebig sind. Wir werden mit $(a_1 a_2 a_3 \ldots a_n)$ die Kontinuante bezeichnen, welche durch die Werte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bestimmt ist, die man den Hauptelementen erteilt. Es ist also

$$(a_1 a_2 a_3 \ldots a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & a_n \end{vmatrix}.$$

Entwickelt man diese Determinante nach den in den ν ersten Vertikalreihen enthaltenen Minoren (§ 22), so erhält man leicht

$$(1) \qquad (a_1 a_2 \ldots a_n) = (a_1 a_2 \ldots a_\nu)(a_{\nu+1} a_{\nu+2} \ldots a_n) + (a_1 a_2 \ldots a_{\nu-1})(a_{\nu+2} a_{\nu+3} \ldots a_n).$$

Im besondern ist

$$(2) \qquad (a_1 a_2 \ldots a_n) = a_1 (a_2 a_3 \ldots a_n) + (a_3 a_4 \ldots a_n),$$

$$(3) \qquad (a_1 a_2 \ldots a_n) = a_n (a_1 a_2 \ldots a_{n-1}) + (a_1 a_2 \ldots a_{n-2}).$$

Aus (3) ergibt sich das Bildungsgesetz einer beliebigen Kontinuante. Es genügt, in dem Produkte $a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$ auf alle möglichen Arten alle Paare von benachbarten Elementen fortzulassen. So hat man, um $(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5)$ zu bilden, in $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ successiv $a_4 a_5$, $a_3 a_4$, $a_2 a_3$, $a_1 a_2$, ferner $a_4 a_5$ und $a_2 a_3$, $a_4 a_5$ und $a_1 a_2$, $a_3 a_4$ und $a_1 a_2$ fortzulassen. Man erhält dann

$$(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5) = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 + a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_5 + a_1 a_4 a_5 + a_3 a_4 a_5 + a_1 + a_3 + a_5.$$

---

1) **Baltzer, Elemente der Mathematik, 2. Teil, § 30.**

Es ist ferner unter Beachtung von (2) leicht zu erkennen, daß man hat

$$a_1 = (a_1), \quad a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{(a_1 a_2)}{(a_2)}, \quad a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}} = \frac{(a_1 a_2 a_3)}{(a_2 a_3)}, \ldots$$

Allgemein ist

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_n}}} = \frac{(a_1 a_2 a_3 \ldots a_n)}{(a_2 a_3 \ldots a_n)}.$$

m) Man betrachte im besondern die Kontinuante

$$u_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

Die Relation (3) gibt

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \tag{4}$$

und zeigt also, daß jedes Glied der Reihe $u_1, u_2, u_3, \ldots$ gleich der Summe der beiden vorhergehenden Glieder ist. Die Werte der u sind demnach

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233, \ldots$$

Diese Reihe führt den Namen Fibonaccische Reihe.[1]) Sie besitzt interessante Eigenschaften[2]), von denen einige sich unmittelbar aus den beim vorigen Übungsbeispiel gemachten Bemerkungen ergeben. Z. B. gibt die Relation (1)

$$u_n = u_\nu u_{n-\nu} + u_{\nu-1} u_{n-\nu-1}$$

und im besondern $u_{2\nu} = u_\nu^2 + u_{\nu-1}^2$, d. h. die Summe der Quadrate von zwei benachbarten Gliedern gehört der Reihe an; u. s. w. Um den Wert von u_n zu erhalten, setze man

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right), \quad \beta = \tfrac{1}{2}\left(1 - \sqrt{5}\right).$$

Es sind dies die Wurzeln der Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$. Man erkennt sofort, daß man (4) identisch befriedigen kann, indem man $u_n = a\alpha^n + b\beta^n$ nimmt, wobei a und b unabhängig von n sind. Diese Koeffizienten bestimmt man mit Hilfe der Anfangsbedingungen $u_{-1} = 0$, $u_0 = 1$, welche erfordern, daß

$$\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} = 0, \quad a + b = 1$$

---

1) Liber Abbaci. Vgl. die „Recherches" von E. Lucas, Bollettino bibliografico di B. Boncompagni (Rom, 1877).

2) Vgl. eine Mitteilung von Lamé an die Pariser Akademie (Comptes rendus, 1814, p. 867).

ist, d. h.

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{-\beta} = \frac{1}{\alpha - \beta},$$

mithin

$$u_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}.$$

Man bemerke, daß u_n auch die Gliederzahl einer Kontinuante n-ter Ordnung darstellt. Diese Zahl ist also

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right\}$$

oder

$$\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{1} + 5\,\frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{1\cdot 2\,.\,3} + 25\,\frac{(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots\right).$$

Um ihren ganzzahligen Charakter in Evidenz zu setzen, kann man sie auch (§ 48, c) in folgender Weise ausdrücken

$$1 + \frac{n-1}{1} + \frac{(n-2)\,(n-3)}{1\cdot 2} + \frac{(n-3)\,(n-4)\,(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$

Multiplikation der Matrices.

28. Es seien a_{ij} und b_{ij} die Elemente von zwei ähnlichen Matrices, d. h. von zwei solchen, die aus derselben Zahl m von Vertikalreihen und derselben Zahl n von Horizontalreihen bestehen:

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{matrix}\right|, \qquad \left|\begin{matrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nm} \end{matrix}\right|.$$

Man multipliziere die Elemente der i-ten Horizontalreihe der ersten Matrix mit den entsprechenden Elementen der j-ten Horizontalreihe der zweiten Matrix und addiere alle so erhaltenen Produkte. Dadurch entsteht das allgemeine Glied

$$(5)\qquad c_{ij} = a_{i1}b_{j1} + a_{i2}b_{j2} + a_{i3}b_{j3} + \cdots + a_{im}b_{jm}$$

einer quadratischen Matrix von n-ter Ordnung:

$$C = \left|\begin{matrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{matrix}\right|.$$

Die Eigenschaften, welche wir zu beweisen beabsichtigen, haben dazu geführt, die Determinante C als das Produkt der beiden Matrices zu bezeichnen. Es folgt im besondern aus dieser Definition, daß der Ausdruck (5) das Produkt der i-ten und j-ten Horizontalreihe der beiden Matrices ist, da eine beliebige Reihe von Elementen sich immer als eine Matrix mit einer einzigen Reihe betrachten läßt. Man bemerke, daß die Multiplikation der Matrices sich auch nach Vertikalreihen statt nach Horizontalreihen ausführen läßt, so daß man im Falle rechteckiger Matrices zwei Produkte hat. Wir werden aber in kurzem sehen, daß eins derselben immer null ist.

29. Theorem von Binet[1]). Wir zerlegen die c in die durch (5) gegebenen Monome und behalten in der ersten Vertikalreihe von c_{i1} nur das Glied $a_{ij_1} b_{1j_1}$, wobei j_1 eine beliebige von den Zahlen 1, 2, 3, $\cdots m$ ist. Ebenso nehmen wir in der zweiten Vertikalreihe der c von c_{i2} nur $a_{ij_2} b_{2j_2}$; u. s. w. Wir erhalten auf diese Weise die Determinante

$$(6)\quad \begin{vmatrix} a_{1j_1} b_{1j_1} & a_{1j_2} b_{2j_2} & \cdots & a_{1j_n} b_{nj_n} \\ a_{2j_1} b_{1j_1} & a_{2j_2} b_{2j_2} & \cdots & a_{2j_n} b_{nj_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{nj_1} b_{1j_1} & a_{nj_2} b_{2j_2} & \cdots & a_{nj_n} b_{nj_n} \end{vmatrix} = b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{nj_n} \begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} & \cdots & a_{nj_n} \end{vmatrix}.$$

Die Summe aller analogen Ausdrücke, welche den verschiedenen Weisen entsprechen, auf die man die Zahlen $j_1, j_2, \ldots, j_n$ unter den m ersten ganzen Zahlen wählen kann, liefert (§ 17) den Wert der Determinante C. Man bemerke, daß, wenn zwei j einander gleich sind, die Determinante (6) null ist, da sie zwei identische Vertikalreihen besitzt. Wir werden aus diesem Grunde nur auf diejenigen Determinanten (6) Rücksicht nehmen, in welchen die Zahlen $j_1, j_2, \ldots, j_n$ sämtlich voneinander verschieden sind. Ist $m < n$, so kann dies nicht eintreten, und man hat daher $C = 0$. Wenn $m = n$ ist, d. h. wenn die gegebenen Matrices zwei Determinanten A und B darstellen, so ist (§ 14) der Ausdruck (6) gleichbedeutend mit

$$(-1)^s b_{1j_1} b_{2j_2} \ldots b_{nj_n} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^s A b_{1j_1} b_{2j_2} \ldots b_{nj_n},$$

wo s die Anzahl der Inversionen in der Permutation $j_1 j_2 \ldots j_n$ bedeutet. Mithin ist (§ 12)

$$C = A\, \Sigma (-1)^s b_{1j_1} b_{2j_2} \ldots b_{nj_n} = AB.$$

1) In der hier gegebenen allgemeinen Form verdankt man das Theorem Cauchy (Journal de l'École polytechnique, 1815).

Wenn endlich $m > n$ ist, so kann man das letzte Resultat auf jedes System von n verschiedenen Zahlen anwenden, die unter den m ersten ganzen Zahlen gewählt sind, und man erkennt, daß C die Summe aller Produkte ist, welche entstehen, wenn man jede große Determinante der ersten Matrix mit der Determinante multipliziert, die ihr in der zweiten Matrix entspricht.

30. Wenn im besondern die beiden Matrices identisch sind, so sieht man, daß das nach Horizontalreihen gebildete Quadrat einer Matrix von m Vertikal- und n Horizontalreihen verschwindet im Falle $m < n$, und daß es gleich der Summe der Quadrate aller großen Determinanten der Matrix ist im Falle $m > n$. Z. B. ist

$$\begin{vmatrix} a_1\, a_2\, a_3 \dots a_n \\ b_1\, b_2\, b_3 \dots b_n \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 & a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n & b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1\, a_2 \\ b_1\, b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1\, a_3 \\ b_1\, b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_2\, a_3 \\ b_2\, b_3 \end{vmatrix}^2 + \cdots,$$

d. h.

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2$$
$$+ (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + \cdots$$

31. Greift man aus den Matrices zwei neue mit nur ν Horizontalreihen heraus, so erkennt man sofort, indem man sie nach Horizontalreihen multipliziert, daß ein Minor, welcher in dem nach Horizontalreihen gebildeten Produkt zweier ähnlicher Matrices A und B durch zwei Systeme von ν Indices definiert wird, gleich dem Produkt der Matrices ist, die in A und B durch die jenen beiden Indicessystemen entsprechenden Horizontalreihen gebildet werden. Wenn im besondern die beiden Systeme koinzidieren, d. h. wenn der Minor ein Hauptminor (§ 19) ist, und wenn außerdem A und B koinzidieren, so sieht man, daß im Quadrat einer Matrix jeder Hauptminor das Quadrat einer Matrix ist.

32. Es werde ferner angenommen, daß A und B quadratische Matrices sind, und man betrachte in ihrem Produkt den Minor γ'_{ij}, das gewöhnliche Komplement des Elements c_{ij}. Um γ'_{ij} zu berechnen, muß man die i-te Horizontalreihe in A und die j-te in B unterdrücken und die so modifizierten Matrices nach Horizontalreihen multiplizieren. Die großen Determinanten der ersten Matrix erhält man, indem man successiv die n Vertikalreihen unterdrückt. Sie sind die gewöhnlichen Komplemente $\alpha'_{i1}, \alpha'_{i2}, \dots, \alpha'_{in}$. In analoger Weise kommt man bei der zweiten Matrix auf die Determinanten $\beta'_{j1}, \beta'_{j2}, \ldots, \beta'_{jn}$, und man hat daher auf Grund des Theorems von Binet

$$\gamma'_{ij} = \alpha'_{i1}\beta'_{j1} + \alpha'_{i2}\beta'_{j2} + \alpha'_{i3}\beta'_{j3} + \cdots + \alpha'_{in}\beta'_{jn}.$$

Beachtet man, daß das algebraische Komplement eines Elements α_{ij}

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha'_{ij}$$

ist, so wird die letzte Relation

$$\gamma_{ij} = (-1)^{i+j}\sum_{r=1}^{r=n}\{(-1)^{i+r}\alpha_{ir}\cdot(-1)^{j+r}\beta_{jr}\} = \sum_{r=1}^{r=n}\alpha_{ir}\beta_{jr},$$

d. h.

$$\gamma_{ij} = \alpha_{i1}\beta_{j1} + \alpha_{i2}\beta_{j2} + \alpha_{i3}\beta_{j3} + \cdots + \alpha_{in}\beta_{jn}.$$

Wir sehen also, daß die algebraischen Komplemente von A, B, C ebenso miteinander zusammenhängen wie die Elemente selbst.

33. Übungen. a) Wir wollen uns die Aufgabe stellen, die Smithsche Determinante zu berechnen:

$$D = \begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & \ldots & (1,n) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & \ldots & (2,n) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & \ldots & (3,n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (n,1) & (n,2) & (n,3) & \ldots & (n,n) \end{vmatrix},$$

wo (i, j) den größten gemeinsamen Teiler von i und j darstellt. Zuvor erinnern wir daran, daß man mit $\varphi(n)$ die Anzahl der ganzen Zahlen zu bezeichnen pflegt, welche zu n relativ prim und nicht größer als n sind, und daß die Summe der Werte von $\varphi(n)$, wenn für n der Reihe nach alle Divisoren von n gesetzt werden, gerade gleich n ist[1]). Daraus folgt, daß sich (i, j) als Summe aller Werte von $\varphi(n)$ darstellen läßt, welche den gemeinsamen Teilern von i und j entsprechen. Es ist also

$$(7) \quad (i,j) = a_{i1}a_{j1}\varphi(1) + a_{i2}a_{j2}\varphi(2) + a_{i3}a_{j3}\varphi(3) + \cdots + a_{in}a_{jn}\varphi(n),$$

wenn man a_{ij} gleich der Einheit oder gleich Null annimmt, je nachdem i durch j teilbar ist oder nicht (so daß immer $a_{ij} = 0$ ist für $i < j$). Bei dieser Annahme kommt $\varphi(\nu)$ in der Summe (7) nur vor, wenn ν gleichzeitig ein Teiler von i und j ist. Es folgt hieraus, daß man in der Relation (5) $b_{ij} = a_{ij}\varphi(j)$, $c_{ij} = (i, j)$ setzen kann, und D ist daher gleich dem Produkt der Determinante

---

1) Baltzer, Elemente der Mathematik, 2. Teil, § 13.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \ldots \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

und der folgenden

$$B = \begin{vmatrix} a_{11}\,\varphi(1) & a_{12}\,\varphi(2) & \ldots & a_{1n}\,\varphi(n) \\ a_{21}\,\varphi(1) & a_{22}\,\varphi(2) & \ldots & a_{2n}\,\varphi(n) \\ . & . & . & . \\ a_{n1}\,\varphi(1) & a_{n2}\,\varphi(2) & \ldots & a_{nn}\,\varphi(n) \end{vmatrix} = A\,\varphi(1)\,\varphi(2)\ldots\varphi(n).$$

Übrigens reduziert sich A, da alle Elemente auf einer Seite der Diagonale gleich Null sind, auf das Produkt der Hauptelemente, d. h. auf die Einheit. Mithin ist

$$D = \varphi(1)\,\varphi(2)\,\varphi(3)\ldots\varphi(n).$$

Dieses Resultat kann man auch auf die Form bringen

$$D = n!\left(\frac{1}{2}\right)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(\frac{2}{3}\right)^{\left[\frac{n}{3}\right]}\left(\frac{4}{5}\right)^{\left[\frac{n}{5}\right]}\left(\frac{6}{7}\right)^{\left[\frac{n}{7}\right]}\left(\frac{10}{11}\right)^{\left[\frac{n}{11}\right]}\cdots,$$

wo $[x]$ das größte in x enthaltene Ganze bedeutet und 2, 3, 5, 7, 11, ... die Reihe der Primzahlen ist.

b) Man bilde das Quadrat der Vandermondeschen Determinante (§ 27, d). In derselben ist $a_{ij} = a_j^{i-1}$, mithin

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{r=n} a_{ir}\,a_{jr} = \sum_{r=1}^{r=n} a_r^{i+j-2} = s_{i+j-2},$$

wenn

$$s_p = a_1^p + a_2^p + a_3^p + \cdots + a_n^p$$

gesetzt wird. Also hat die Determinante

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \ldots & s_{n+1} \\ . & . & . & . & . \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

den Wert $(a_1 - a_2)^2\,(a_1 - a_3)^2\,(a_2 - a_3)^2 \ldots (a_{n-1} - a_n)^2$. Dieser Ausdruck heißt die Diskriminante der Größen $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$. Man bemerke, daß ihr Verschwinden notwendig und hinreichend dafür ist, daß die betrachteten Größen nicht sämtlich voneinander verschieden sind.

c) Die Determinanten, deren Reihen aus der ersten durch cyklische Permutation ihrer Elemente entstehen, nennt man Zirkulanten. Im folgenden werden wir sehen, daß die Gleichung $x^n - 1 = 0$ gerade n verschiedene Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ besitzt, zu denen immer die Einheit gehört. Um den Wert der Zirkulante

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \ldots & a_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_1 \end{vmatrix}$$

zu finden, multiplizieren wir sie mit

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Wird zur Abkürzung

$$f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a_n x^{n-1}$$

gesetzt, so ist das Produkt jeder Horizontalreihe $1, \alpha, \alpha^2, \ldots$ von $\varDelta$ mit der ersten Horizontalreihe von D gleich $f(\alpha)$, und das Produkt derselben Horizontalreihe von $\varDelta$ mit der i-ten Horizontalreihe von D wird

$$a_{n-i+2} + a_{n-i+3}\alpha + \cdots + a_n \alpha^{i-2} + a_1 \alpha^{i-1} + a_2 \alpha^i + \cdots + a_{n-i+1}\alpha^{n-1}$$

oder, wenn man beachtet, daß $\alpha^n = 1$ ist,

$$a_1 \alpha^{i-1} + a_2 \alpha^i + \cdots + a_{n-i+2}\alpha^n + a_{n-i+3}\alpha^{n+1} + \cdots + a_n \alpha^{n+i-2} = \alpha^{i-1} f(\alpha)$$

Es ist also

$$D\varDelta = \begin{vmatrix} f(\alpha_1) & \alpha_1 f(\alpha_1) & \alpha_1^2 f(\alpha_1) & \ldots & \alpha_1^{n-1} f(\alpha_1) \\ f(\alpha_2) & \alpha_2 f(\alpha_2) & \alpha_2^2 f(\alpha_2) & \ldots & \alpha_2^{n-1} f(\alpha_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f(\alpha_n) & \alpha_n f(\alpha_n) & \alpha_n^2 f(\alpha_n) & \ldots & \alpha_n^{n-1} f(\alpha_n) \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante reduziert sich, wenn man $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots f(\alpha_n)$ herauszieht, gerade auf $\varDelta$. Mithin ist, da $\varDelta$ nicht verschwindet,

$$D = f(\alpha_1) f(\alpha_2) f(\alpha_3) \ldots f(\alpha_n).$$

Wenn wir gelernt haben werden die Zahlen α zu berechnen, so wird uns die letzte Formel den Wert jeder beliebigen Zirkulante liefern. Für $n = 4$ wissen wir z. B. schon, daß die Gleichung $x^4 - 1 = 0$ die Wurzeln von $x^2 - 1 = 0$ oder 1 und -1 und diejenigen von $x^2 + 1 = 0$ oder $\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$ besitzt. Man hat also bei der durch die Elemente a, b, c, d definierten Zirkulante

$$f(1) = a + b + c + d, \qquad f(\sqrt{-1}) = a - c + (b - d)\sqrt{-1},$$
$$f(-1) = a - b + c - d, \quad f(-\sqrt{-1}) = a - c - (b - d)\sqrt{-1},$$

mithin (vgl. § 27, b)

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix} = (a + b + c + d)(a - b + c - d)[(a - c)^2 + (b - d)^2].$$

d) Es sei eine symmetrische Determinante A gegeben, d. h. eine Determinante, in welcher die konjugierten Elemente (§ 19) einander gleich sind, und man bezeichne mit $f(x)$ das, was aus A wird, wenn man zu den Hauptelementen x hinzufügt. Wir wissen (§ 27, i), daß $f(x)$ ein Polynom n-ten Grades in x ist, und werden im folgenden (§ 449) sehen, daß ein solches Polynom immer nur von n Werten der Variablen x zu Null gemacht wird. Mit Hilfe der Multiplikation von Determinanten kann man, wie Sylvester gezeigt hat[1]), sehr einfach beweisen, daß, wenn die Elemente von A reell sind, die n Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ sämtlich reell sind. Zu diesem Zwecke genügt es zu beweisen, daß die Wurzeln der Gleichung $f(x)f(-x) = 0$ reell sind. Wenn c_{ij} das allgemeine Element des Quadrates C der Determinante A ist, so ist das allgemeine Glied des Produktes der Determinanten $f(x)$ und $f(-x)$

$$a_{i1}a_{j1} + \cdots + (a_{ii} + x)a_{ji} + \cdots + a_{ij}(a_{jj} - x) + \cdots + a_{in}a_{jn} = c_{ij}$$

für $i \neq j$ und

$$a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \cdots + (a_{ii} + x)(a_{ii} - x) + \cdots + a_{in}^2 = c_{ii} - x^2,$$

für $i = j$. Die Gleichung $f(x)f(-x) = 0$ läßt sich also schreiben

$$\begin{vmatrix} c_{11} - x^2 & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} - x^2 & \cdots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} - x^2 \end{vmatrix} = 0$$

oder aber (§ 27, i)

$$(8) \quad C + \sigma_{n-1}(-x^2) + \sigma_{n-2}(-x^2)^2 + \cdots + \sigma_1(-x^2)^{n-1} + (-x^2)^n = 0,$$

wo σ_ν die Summe aller Hauptminoren ν-ter Ordnung der Determinante C ist. Bekanntlich sind (§ 31) $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$ ebenso wie C wesentlich positive Größen, und die Gleichung (8) kann daher nicht durch Werte erfüllt werden, welche die Form $q\sqrt{-1}$ haben, wo q reell und von Null verschieden ist; denn für $x^2 = -q^2$ ist die linke Seite von (8) positiv. Um sich zu vergewissern, daß x auch nicht die Form $p + q\sqrt{-1}$ haben

---

1) Philosophical Magazine, 1852.

kann, braucht man nur zu beachten, daß man auf den früheren Fall zurückkommt, wenn man den reellen Teil p mit den Hauptelementen zusammenfaßt. Es ist also jeder Wert von x, der die betrachtete Gleichung erfüllt, notwendig reell.

Reziproke Determinanten.

34. Wie bisher werde mit α_{ij} das algebraische Komplement von a_{ij} bezeichnet, und es sei

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad \varDelta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

Die Determinante $\varDelta$ heißt zu D reziprok. Wir wollen beweisen, daß jeder Minor zweiter Ordnung von $\varDelta$ gleich dem algebraischen Komplement des entsprechenden Minors von D ist, multipliziert mit D. Zunächst bemerke man, daß sich α_{rs} aus D ableiten läßt, indem man an Stelle von a_{rs} die Zahl 1 und an Stelle der übrigen Elemente der r-ten Horizontalreihe 0 setzt. In der Tat reduziert sich die Entwickelung der so modifizierten Determinante nach den Elementen der r-ten Horizontalreihe gerade auf α_{rs}. Es ist also

$$\alpha_{rs} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1s} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{is} & \dots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{ns} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Die Elemente der j-ten Vertikalreihe multipliziere man mit α_{ij} und addiere dazu diejenigen, welche ihnen in den anderen Vertikalreihen entsprechen, nachdem man diese der Reihe nach mit $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in}$ multipliziert hat. Es tritt auf diese Weise an die r-te Stelle in der j-ten Vertikalreihe α_{is} und an die ν-te Stelle für $\nu \neq r$

$$a_{\nu 1}\alpha_{i1} + a_{\nu 2}\alpha_{i2} + a_{\nu 3}\alpha_{i3} + \dots + a_{\nu n}\alpha_{in} = \begin{cases} D & \text{für } \nu = i, \\ 0 & \text{für } \nu \neq i. \end{cases}$$

Folglich ist

$$\alpha_{ij}\alpha_{rs} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & 0 & \ldots & a_{1s} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & \ldots & D & \ldots & a_{is} & \ldots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & \alpha_{is} & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & 0 & \ldots & a_{ns} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Wir entwickeln diese Determinante nach den Elementen der j-ten Vertikalreihe, die alle null sind außer D und α_{is}. Das Komplement von α_{is} ist α_{rj}. Das von D erhält man durch Unterdrückung der i-ten Horizontalreihe und der j-ten Vertikalreihe. Es bleibt dabei eine Determinante, welche sich von α_{ij} nur dadurch unterscheidet, daß die Elemente $a_{r1}, \ldots, a_{rs}, \ldots, a_{rn}$ durch $0, \ldots, 1, \ldots, 0$ ersetzt sind, und ihren Wert erhält man daher, indem man noch die durch die Indices r bezw. s definierte Horizontal- und Vertikalreihe unterdrückt. Folglich ist, wenn mit a_{ijrs} das algebraische Komplement von

$$\begin{vmatrix} a_{ij} & a_{is} \\ a_{rj} & a_{rs} \end{vmatrix}$$

in D bezeichnet wird,

$$\alpha_{ij}\alpha_{rs} = \alpha_{is}\alpha_{rj} + Da_{ijrs}, \tag{9}$$

d. h.

$$\begin{vmatrix} \alpha_{ij} & \alpha_{is} \\ \alpha_{rj} & \alpha_{rs} \end{vmatrix} = Da_{ijrs},$$

wie behauptet wurde.

35. Aus (9) läßt sich leicht eine früher bewiesene wichtige Formel ableiten. Multipliziert man die beiden Seiten der Gleichung mit $a_{is}a_{rj}$ und summiert, so erhält man

$$\alpha_{rs}\sum_{i,j}\alpha_{ij}a_{is}a_{rj} = \sum_{i,j}\alpha_{is}\alpha_{rj}a_{is}a_{rj} + D\sum_{i,j}a_{ijrs}a_{is}a_{rj}.$$

Die Summe, welche auf der linken Seite steht, ist (§§ 23, 24) gleich

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_{is}(a_{r1}\alpha_{i1} + a_{r2}\alpha_{i2} + \cdots + a_{rn}\alpha_{in}) = Da_{rs},$$

und die erste Summe auf der rechten Seite läßt sich so schreiben:

$$\sum_i a_{is}\alpha_{is} \cdot \sum_j a_{rj}\alpha_{rj} = D^2.$$

Es ist also (vgl. § 25)

$$a_{rs}\alpha_{rs} = D + \sum_{i,j} a_{ijrs}\alpha_{is}\alpha_{rj}.$$

36. Wenn eine Determinante null ist, so verschwindet auch ihre reziproke Determinante. Überdies verschwinden alle Minoren der reziproken Determinante bis zu denen von zweiter Ordnung einschließlich. Es geht in der Tat aus § 34 hervor, daß, wenn $D = 0$ ist, jeder Minor zweiter Ordnung in $\varDelta$ verschwindet. Es sind daher alle Minoren höherer Ordnung und $\varDelta$ selbst gleich Null. Um sich davon zu überzeugen, braucht man sich diese Determinanten nur nach den in zwei parallelen Reihen enthaltenen Minoren entwickelt zu denken. Man bemerke noch, daß aus den Relationen

$$\begin{vmatrix} \alpha_{i1} & \alpha_{i2} \\ \alpha_{j1} & \alpha_{j2} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{i1} & \alpha_{i3} \\ \alpha_{j1} & \alpha_{j3} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{i2} & \alpha_{i3} \\ \alpha_{j2} & \alpha_{j3} \end{vmatrix} = 0, \ldots$$

folgt

$$\frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{j1}} = \frac{\alpha_{i2}}{\alpha_{j2}} = \frac{\alpha_{i3}}{\alpha_{j3}} = \cdots = \frac{\alpha_{in}}{\alpha_{jn}},$$

d. h. die Reihen von $\varDelta$ sind alle äquivalent (§ 16). Mit andern Worten: Wenn eine Determinante null ist, so sind die algebraischen Komplemente der Elemente jeder beliebigen Reihe proportional zu denen der Elemente jeder andern parallelen Reihe.

37. Wenn D nicht null ist, so ist auch $\varDelta$ nicht null. In der Tat hat die reziproke Determinante einer Determinante n-ter Ordnung denselben Wert wie die $(n-1)$-te Potenz der genannten Determinante. Um dies zu beweisen, multipliziere man D mit $\varDelta$ nach Horizontalreihen. Man erhält als allgemeines Element des Produkts

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{r=n} a_{ir}\alpha_{jr} = \begin{cases} D \text{ für } i = j, \\ 0 \text{ für } i \neq j. \end{cases}$$

Mithin ist

$$D\varDelta = \begin{vmatrix} D & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & D & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & D \end{vmatrix} = D^n,$$

woraus sich für $D \neq 0$ die Relation $\varDelta = D^{n-1}$ ergibt, die auch für $D = 0$ besteht, wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben.

38. In der reziproken Determinante von D ist jeder Minor ν-ter Ordnung gleich dem algebraischen Komplement des entsprechenden Minors von D, multipliziert mit $D^{\nu-1}$. Dieser Satz enthält für $\nu = 1$ die Definition der reziproken Determinante und für $\nu = 2$ das in § 34 bewiesene Theorem. Es sei Δ_ν der Minor von Δ, welcher durch die Indices $i_1, i_2, \ldots, i_\nu$ und $j_1, j_2, \ldots, j_\nu$ definiert ist, und man bezeichne mit $r_1, r_2, \ldots, r_{n-\nu}$ und $s_1, s_2, \ldots, s_{n-\nu}$ die Indices, welche in $1\ 2\ 3 \ldots n$ nach Unterdrückung von $i_1\ i_2 \ldots i_\nu$ bezw. $j_1\ j_2 \ldots j_n$ übrig bleiben. Man kann schreiben

$$\Delta_\nu = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_{i_1 s_1} & \alpha_{i_1 s_2} & \ldots & \alpha_{i_1 s_{n-\nu}} & \alpha_{i_1 j_1} & \alpha_{i_1 j_2} & \ldots & \alpha_{i_1 j_\nu} \\ \alpha_{i_2 s_1} & \alpha_{i_2 s_2} & \ldots & \alpha_{i_2 s_{n-\nu}} & \alpha_{i_2 j_1} & \alpha_{i_2 j_2} & \ldots & \alpha_{i_2 j_\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{i_\nu s_1} & \alpha_{i_\nu s_2} & \ldots & \alpha_{i_\nu s_{n-\nu}} & \alpha_{i_\nu j_1} & \alpha_{i_\nu j_2} & \ldots & \alpha_{i_\nu j_\nu} \end{vmatrix},$$

da sich die letzte Determinante gerade auf Δ_ν reduziert, wenn man sie nach den Determinanten der letzten ν Vertikalreihen entwickelt. Andererseits läßt sich durch Umordnung von Horizontal- und von Vertikalreihen die Determinante D auf folgende Form bringen:

$$D = (-1)^\varrho \begin{vmatrix} a_{r_1 s_1} & a_{r_1 s_2} & \ldots & a_{r_1 s_{n-\nu}} & a_{r_1 j_1} & a_{r_1 j_2} & \ldots & a_{r_1 j_\nu} \\ a_{r_2 s_1} & a_{r_2 s_2} & \ldots & a_{r_2 s_{n-\nu}} & a_{r_2 j_1} & a_{r_2 j_2} & \ldots & a_{r_2 j_\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r_{n-\nu} s_1} & a_{r_{n-\nu} s_2} & \ldots & a_{r_{n-\nu} s_{n-\nu}} & a_{r_{n-\nu} j_1} & a_{r_{n-\nu} j_2} & \ldots & a_{r_{n-\nu} j_\nu} \\ a_{i_1 s_1} & a_{i_1 s_2} & \ldots & a_{i_1 s_{n-\nu}} & a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \ldots & a_{i_1 j_\nu} \\ a_{i_2 s_1} & a_{i_2 s_2} & \ldots & a_{i_2 s_{n-\nu}} & a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \ldots & a_{i_2 j_\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_\nu s_1} & a_{i_\nu s_2} & \ldots & a_{i_\nu s_{n-\nu}} & a_{i_\nu j_1} & a_{i_\nu j_2} & \ldots & a_{i_\nu j_\nu} \end{vmatrix}.$$

Mit ϱ bezeichnen wir die Gesamtzahl der Inversionen. Sie hat denselben Geradheitscharakter wie

$$\sigma = r_1 + r_2 + \cdots + r_{n-\nu} + s_1 + s_3 + \cdots + s_{n-\nu},$$

da sie sich auf die Summe der Inversionen reduziert, welche die Indices r und die Indices s bezüglich mit den Indices i und den Indices j bilden, so daß (§ 2)

$$\varrho = \sigma - (n - \nu)(n - \nu + 1)$$

ist. Nun ergibt sich aber durch Multiplikation nach Horizontalreihen

$$D\Delta_\nu = (-1)^\sigma \begin{vmatrix} a_{r_1 s_1} & a_{r_1 s_2} & \dots a_{r_1 s_{n-\nu}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{r_2 s_1} & a_{r_2 s_2} & \dots a_{r_2 s_{n-\nu}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r_{n-\nu} s_1} & a_{r_{n-\nu} s_2} & \dots a_{r_{n-\nu} s_{n-\nu}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{i_1 s_1} & a_{i_1 s_2} & \dots a_{i_1 s_{n-\nu}} & D & 0 & \dots & 0 \\ a_{i_2 s_1} & a_{i_2 s_2} & \dots a_{i_2 s_{n-\nu}} & 0 & D & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_\nu s_1} & a_{i_\nu s_2} & \dots a_{i_\nu s_{n-\nu}} & 0 & 0 & \dots & D \end{vmatrix}$$

und hieraus, wenn man nach den Minoren der letzten ν Vertikalreihen entwickelt und durch $D \neq 0$ dividiert,

$$\Delta_\nu = (-)^\sigma D^{\nu-1} \begin{vmatrix} a_{r_1 s_1} & a_{r_1 s_2} & \dots & a_{r_1 s_{n-\nu}} \\ a_{r_2 s_1} & a_{r_2 s_2} & \dots & a_{r_2 s_{n-\nu}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r_{n-\nu} s_1} & a_{r_{n-\nu} s_2} & \dots & a_{r_{n-\nu} s_{n-\nu}} \end{vmatrix}.$$

Dieses Resultat gilt auch für $D = 0$ und für $\nu > 1$, weil es übereinstimmend mit dem in § 36 Bewiesenen $\Delta_\nu = 0$ gibt.

39. Das algebraische Komplement eines Minors ν-ter Ordnung von Δ ist ein Minor $(n-\nu)$-ter Ordnung mit demselben Vorzeichen, durch welches der dem erstgenannten entsprechende Minor von D algebraisch gemacht wird. Es ist also gleich dem Produkt von $D^{n-\nu-1}$ mit dem genannten Minor. Mit andern Worten: Das algebraische Komplement eines Minors ν-ter Ordnung in der reziproken Determinante von D ist gleich dem entsprechenden Minor von D, multipliziert mit $D^{n-\nu-1}$. Im besondern sieht man für $\nu = 1$, daß das algebraische Komplement eines Elements der reziproken Determinante von D gleich dem entsprechenden Element von D ist, multipliziert mit D^{n-2}. Daraus folgt, daß die reziproke der reziproken Determinante von D

$$\begin{vmatrix} a_{11} D^{n-2} & a_{12} D^{n-2} & \dots & a_{1n} D^{n-2} \\ a_{21} D^{n-2} & a_{22} D^{n-2} & \dots & a_{2n} D^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} D^{n-2} & a_{n2} D^{n-2} & \dots & a_{nn} D^{n-2} \end{vmatrix}$$

ist. Ihr Wert muß (§ 37) die $(n-1)$-te Potenz von D^{n-1} sein, und in der Tat erhält man

$$D^{(n-2)n} D = D^{n^2-2n+1} = D^{(n-1)^2}.$$

40. Noch eine Bemerkung: Die Multiplikation der reziproken von zwei Determinanten liefert die reziproke Determinante des Produktes jener beiden. Es wird wohlverstanden vorausgesetzt, daß man die Multiplikation entweder immer nach Horizontalreihen oder immer nach Vertikalreihen ausführt. Operieren wir z. B. mit den Horizontalreihen, so finden wir als allgemeines Element des Produktes der beiden reziproken Determinanten

$$\alpha_{i1}\beta_{j1} + \alpha_{i2}\beta_{j2} + \alpha_{i3}\beta_{j3} + \cdots + \alpha_{in}\beta_{jn},$$

und es ist uns bereits bekannt (§ 32), daß diese Summe gleich dem algebraischen Komplement γ_{ij} ist, welches in dem Produkt der beiden Determinanten dem Element c_{ij} entspricht.

41. Das am Ende des § 36 ausgesprochene Theorem ist einer Erweiterung fähig, welche zu kennen von Wichtigkeit ist. Es sei μ der Rang (§ 18) der Determinante $D = 0$ und man betrachte den Minor

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 r_1} & a_{i_1 r_2} & \cdots & a_{i_1 r_q} & a_{i_1 r_{q+1}} & a_{i_1 s_{q+1}} & a_{i_1 s_{q+2}} & \cdots & a_{i_1 s_\mu} \\ a_{i_2 r_1} & a_{i_2 r_2} & \cdots & a_{i_2 r_q} & a_{i_2 r_{q+1}} & a_{i_2 s_{q+1}} & a_{i_2 s_{q+2}} & \cdots & a_{i_2 s_\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_p r_1} & a_{i_p r_2} & \cdots & a_{i_p r_q} & a_{i_p r_{q+1}} & a_{i_p s_{q+1}} & a_{i_p s_{q+2}} & \cdots & a_{i_p s_\mu} \\ a_{i_{p+1} r_1} & a_{i_{p+1} r_2} & \cdots & a_{i_{p+1} r_q} & a_{i_{p+1} r_{q+1}} & a_{i_{p+1} s_{q+1}} & a_{i_{p+1} s_{q+2}} & \cdots & a_{i_{p+1} s_\mu} \\ a_{j_{p+1} r_1} & a_{j_{p+1} r_2} & \cdots & a_{j_{p+1} r_q} & a_{j_{p+1} r_{q+1}} & a_{j_{p+1} s_{q+1}} & a_{j_{p+1} s_{q+2}} & \cdots & a_{j_{p+1} s_\mu} \\ a_{j_{p+2} r_1} & a_{j_{p+2} r_2} & \cdots & a_{j_{p+2} r_q} & a_{j_{p+2} r_{q+1}} & a_{j_{p+2} s_{q+1}} & a_{j_{p+2} s_{q+2}} & \cdots & a_{j_{p+2} s_\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{j_\mu r_1} & a_{j_\mu r_2} & \cdots & a_{j_\mu r_q} & a_{j_\mu r_{q+1}} & a_{j_\mu s_{q+1}} & a_{j_\mu s_{q+2}} & \cdots & a_{j_\mu s_\mu} \end{vmatrix},$$

der offenbar null ist, sei es, weil er äquivalente Reihen haben kann, sei es, weil seine Ordnung jedenfalls μ übertrifft. Wenn wir übereinkommen, mit a_{pq} das gewöhnliche Komplement des ersten der vier Elemente

$$\begin{vmatrix} a_{i_{p+1} r_{q+1}} & a_{i_{p+1} s_{q+1}} \\ a_{j_{p+1} r_{q+1}} & a_{j_{p+1} s_{q+1}} \end{vmatrix}$$

in der obigen Determinante zu bezeichnen, so ist klar, daß die Komplemente der drei andern Elemente $a_{p,q+1}$, $a_{p+1,q}$, $a_{p+1,q+1}$ sind. Mithin ist (§ 36)

$$\frac{a_{p,q}}{a_{p+1,q}} = \frac{a_{p,q+1}}{a_{p+1,q+1}},$$

woraus sich ergibt

$$\frac{a_{0q}}{a_{0,q+1}} = \frac{a_{1q}}{a_{1,q+1}} = \frac{a_{2q}}{a_{2,q+1}} = \cdots = \frac{a_{\mu q}}{a_{\mu,q+1}},$$

ferner

$$\frac{a_{00}}{a_{\mu 0}} = \frac{a_{01}}{a_{\mu 1}} = \frac{a_{02}}{a_{\mu 2}} = \cdots = \frac{a_{0\mu}}{a_{\mu\mu}}.$$

Inzwischen bemerke man, daß

$$a_{\mu\mu} = \begin{vmatrix} a_{i_1 r_1} & a_{i_1 r_2} & \cdots & a_{i_1 r_\mu} \\ a_{i_2 r_1} & a_{i_2 r_2} & \cdots & a_{i_2 r_\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_\mu r_1} & a_{i_\mu r_2} & \cdots & a_{i_\mu r_\mu} \end{vmatrix}, \quad a_{\mu 0} = \begin{vmatrix} a_{i_1 s_1} & a_{i_1 s_2} & \cdots & a_{i_1 s_\mu} \\ a_{i_2 s_1} & a_{i_2 s_2} & \cdots & a_{i_2 s_\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_\mu s_1} & a_{i_\mu s_2} & \cdots & a_{i_\mu s_\mu} \end{vmatrix},$$

$$a_{0\mu} = \begin{vmatrix} a_{j_1 r_1} & a_{j_1 r_2} & \cdots & a_{j_1 r_\mu} \\ a_{j_2 r_1} & a_{j_2 r_2} & \cdots & a_{j_2 r_\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{j_\mu r_1} & a_{j_\mu r_2} & \cdots & a_{j_\mu r_\mu} \end{vmatrix}, \quad a_{00} = \begin{vmatrix} a_{j_1 s_1} & a_{j_1 s_2} & \cdots & a_{j_1 s_\mu} \\ a_{j_2 s_1} & a_{j_2 s_2} & \cdots & a_{j_2 s_\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{j_\mu s_1} & a_{j_\mu s_2} & \cdots & a_{j_\mu s_\mu} \end{vmatrix}$$

ist. Ist also μ der Rang einer verschwindenden Determinante, so sind alle Minoren μ-ter Ordnung, welche μ parallelen Reihen angehören, proportional zu den entsprechenden Minoren, die in μ beliebigen andern parallelen Reihen enthalten sind.

Eigenschaften spezieller Determinanten.

42. Eine Determinante heißt symmetrisch, wenn jedes Element gleich seinem konjugierten, wenn also für alle Indicespaare $a_{ij} = a_{ji}$ ist. Sie heißt schiefsymmetrisch, wenn zwei beliebige konjugierte Elemente nur dem absoluten Betrage nach gleich sind, d. h. wenn $a_{ij} = -a_{ji}$, im besondern also $a_{ii} = 0$ ist. Setzt man an Stelle der Hauptelemente einer schiefsymmetrischen Determinante Werte, die nicht alle null sind, so erhält man eine pseudosymmetrische Determinante. Z. B. sind pseudosymmetrisch bezw. schiefsymmetrisch die Determinanten

$$\begin{vmatrix} a & r & -q \\ -r & b & p \\ q & -p & c \end{vmatrix} = abc + ap^2 + bq^2 + cr^2, \quad \begin{vmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Symmetrisch ist dagegen die Determinante

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2,$$

und ebenso ist auch jede Determinante symmetrisch, die man durch

Erheben einer beliebigen Determinante ins Quadrat erhält. Die symmetrischen, schiefsymmetrischen und pseudosymmetrischen Determinanten haben folgende Eigenschaft gemein: Jeder ihrer Hauptminoren ist bezüglich symmetrisch, schiefsymmetrisch und pseudosymmetrisch.

43. Symmetrische Determinanten. Es ist klar, daß zwei konjugierte Minoren einer symmetrischen Determinante einander gleich sind, da sie sich nur durch die Vertauschung der Horizontal- mit den Vertikalreihen unterscheiden. Im besondern sind einander gleich die algebraischen Komplemente von zwei konjugierten Elementen, d. h. man hat $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, und es ist daher die reziproke einer symmetrischen Determinante ebenfalls symmetrisch. Wendet man ferner das Theorem des § 41 an, indem man die Indices $r_1, r_2, \ldots$ und $s_1, s_2, \ldots$ mit $i_1, i_2, \ldots$ bezw. $j_1, j_2, \ldots$ koinzidieren läßt, so erhält man

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \ldots & a_{i_1 j_\mu} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \ldots & a_{i_2 j_\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_\mu j_1} & a_{i_\mu j_2} & \ldots & a_{i_\mu j_\mu} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \ldots & a_{i_1 i_\mu} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \ldots & a_{i_2 i_\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_\mu i_1} & a_{i_\mu i_2} & \ldots & a_{i_\mu i_\mu} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{j_1 j_1} & a_{j_1 j_2} & \ldots & a_{j_1 j_\mu} \\ a_{j_2 j_1} & a_{j_2 j_2} & \ldots & a_{j_2 j_\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{j_\mu j_1} & a_{j_\mu j_2} & \ldots & a_{j_\mu j_\mu} \end{vmatrix}.$$

Ist also μ der Rang einer symmetrischen Determinante, so ist das Quadrat eines beliebigen Minors μ-ter Ordnung gleich dem Produkt von zwei Hauptminoren derselben Ordnung. Daraus folgt, daß die Hauptminoren μ-ter Ordnung nicht sämtlich verschwinden können, weil dies sonst auch von jedem andern Minor derselben Ordnung gelten würde.

44. Schiefsymmetrische Determinanten. Wenn die Vorzeichen aller Elemente einer schiefsymmetrischen Determinante umgekehrt werden, so verwandeln sich dabei nur die Horizontalreihen in Vertikalreihen und umgekehrt. Andrerseits ist bekannt, daß diese Zeichenänderungen der Determinante den Faktor $(-1)^n$ geben. Es ist also $D = (-1)^n D$, mithin $D = 0$, wenn n ungerade ist. Mit andern Worten: Jede schiefsymmetrische Determinante ungerader Ordnung ist null. Dieselbe Schlußweise, angewandt auf zwei konjugierte Minoren, zeigt sofort, daß in jeder schiefsymmetrischen Determinante zwei konjugierte Minoren gleich sind oder nur den gleichen absoluten Betrag haben, je nachdem ihre Ordnung gerade oder ungerade ist. Daraus folgt im besondern, daß zwei konjugierte Elemente einer schiefsymmetrischen Determinante Komplemente besitzen, die gleich sind oder nur den gleichen absoluten Betrag haben, je nachdem die Ordnung der schiefsymmetrischen Determinante ungerade oder gerade ist. Endlich ergibt sich aus diesem Satze, daß die reziproke einer schiefsymmetrischen Determinante symmetrisch oder schiefsymmetrisch ist, je nachdem ihre Ordnung ungerade oder gerade ist.

45. Es sei D eine verschwindende Determinante und ihre reziproke werde als symmetrisch vorausgesetzt. Bekanntlich sind (§ 36) in dieser reziproken Determinante alle Minoren zweiter Ordnung null, so daß

$$\begin{vmatrix} \alpha_{ii} & \alpha_{ij} \\ \alpha_{ji} & \alpha_{jj} \end{vmatrix} = \alpha_{ii}\alpha_{jj} - \alpha_{ij}^2 = 0, \quad \alpha_{ij} = \sqrt{\alpha_{ii}\alpha_{jj}}$$

ist, mithin

$$(10) \qquad \frac{\alpha_{i1}}{\sqrt{\alpha_{11}}} = \frac{\alpha_{i2}}{\sqrt{\alpha_{22}}} = \frac{\alpha_{i3}}{\sqrt{\alpha_{33}}} = \cdots = \frac{\alpha_{ii}}{\sqrt{\alpha_{ii}}} = \cdots = \frac{\alpha_{in}}{\sqrt{\alpha_{nn}}} = \sqrt{\alpha_{ii}}\,.$$

Mit andern Worten: Wenn die reziproke einer verschwindenden Determinante symmetrisch ist, so sind die Elemente einer beliebigen ihrer Reihen proportional zu den Quadratwurzeln der entsprechenden Hauptelemente. Im besondern ist dieses Theorem anwendbar auf die reziproke einer verschwindenden symmetrischen Determinante (§ 43), und auf Grund der ersten und der letzten Eigenschaft in § 44 ist es auch auf die reziproke einer schiefsymmetrischen Determinante ungerader Ordnung anwendbar. Es ist von Wichtigkeit zu bemerken, daß, wenn man einer der Wurzeln in den Relationen (10) für einen gegebenen Wert von i ein beliebiges Vorzeichen beilegt, die Vorzeichen der übrigen Wurzeln durch die genannten Relationen vollkommen bestimmt sind. Geht man ferner zu einem andern Wert von i über, so sind die neuen Zähler in den Relationen (10) der Reihe nach proportional zu den alten, und man kann daher annehmen, daß die Wurzeln die ihnen bereits beigelegten Vorzeichen behalten, so daß zu jeder der Größen $\sqrt{\alpha_{ii}}$ ein Vorzeichen gehört, welches nur von i abhängt. Hiernach ist klar, daß in der Relation $\alpha_{ij} = \sqrt{\alpha_{ii}\alpha_{jj}}$ die rechte Seite als das Produkt von $\sqrt{\alpha_{ii}}$ und $\sqrt{\alpha_{jj}}$ betrachtet werden muß, wobei jede Wurzel mit dem zugehörigen Vorzeichen zu nehmen ist.

46. Jede schiefsymmetrische Determinante von gerader Ordnung ist das Quadrat eines ganzen rationalen Ausdrucks in ihren Elementen. Offenbar ist der Satz richtig für $n = 2$, da

$$\begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix} = a^2$$

ist. Es genügt also zu beweisen, daß er für die schiefsymmetrischen Determinanten n-ter Ordnung besteht, wenn er für solche richtig ist, deren Ordnung gerade und kleiner als n ist. Unter Anwendung einer bekannten Formel (§ 25) und Berücksichtigung der Beziehung $\alpha_{ir} = -\alpha_{ri}$ erhält man

$$D = \alpha_{rr}\alpha_{rr} - \sum_{i,j} a_{ij}\alpha_{ir}\alpha_{rj} = \sum_{i,j} a_{ij}\alpha_{ri}\alpha_{rj}.$$

Die Determinante a_{ij} ist das algebraische Komplement eines Elements in α_{rr}, d. h. (§ 44) in einer schiefsymmetrischen Determinante ungerader Ordnung, und man hat daher (§ 45) $a_{ij} = \sqrt{a_{ii}a_{jj}}$. Es ist also, wenn man die letzte Bemerkung des vorigen Paragraphen beachtet,

$$D = \sum_{i,j}\left(\alpha_{ri}\sqrt{a_{ii}}\cdot\alpha_{rj}\sqrt{a_{jj}}\right) = \left(\sum_i \alpha_{ri}\sqrt{a_{ii}}\right)^2$$

oder

$$(11) \qquad \sqrt{D} = \alpha_{r1}\sqrt{a_{11}} + \alpha_{r2}\sqrt{a_{22}} + \alpha_{r3}\sqrt{a_{33}} + \cdots + \alpha_{rn}\sqrt{a_{nn}}.$$

Übrigens ist (§ 42) a_{ii} eine schiefsymmetrische Determinante von der geraden Ordnung $n-2$, und es sind daher nach unserer Annahme $\sqrt{a_{11}}$, $\sqrt{a_{22}}$, ..., $\sqrt{a_{nn}}$ gleich ganzen rationalen Ausdrücken in den Elementen. Setzt man diese Ausdrücke in (11) ein, so erhält $\sqrt{D}$ die oben angekündigte Form. Es ist ferner leicht zu sehen, daß die Entwickelung von $\sqrt{D}$ aus $3\cdot 5\cdot 7\cdots(n-1)$ Gliedern besteht.

47. Pseudosymmetrische Determinanten. Es sei D eine pseudosymmetrische Determinante, deren sämtliche Hauptelemente gleich x sind. Setzt man $x = 0$, so erhält man eine schiefsymmetrische Determinante D_0. Offenbar kann man sich D dadurch entstanden denken, daß zu den Hauptelementen von D_0 überall x addiert wird, und es ist daher (§ 27, i)

$$D = D_0 + x\sigma_{n-1} + x^2\sigma_{n-2} + \cdots + x^{n-1}\sigma_1 + x^n,$$

wo σ_ν die Summe aller Hauptminoren von D_0 bedeutet, welche die Ordnung ν haben. Jeder von diesen Minoren ist (§ 42) schiefsymmetrisch. Er verschwindet daher (§ 44), wenn ν ungerade ist, und ist ein Quadrat (§ 46), wenn ν gerade ist. Es ist also

$$D = x^n + x^{n-2}\sigma_2 + x^{n-4}\sigma_4 + \cdots.$$

Wenn n gerade ist, so ist $x^{n-2\nu}$ ein Quadrat, welches mit $\sigma_{2\nu}$, einer Summe von Quadraten, multipliziert ist. Daraus folgt, daß jede pseudosymmmetrische Determinante von gerader Ordnung mit gleichen Hauptelementen sich in eine Summe von Quadraten entwickeln läßt. Wenn die Ordnung ungerade ist, so ist die Determinante gleich x, multipliziert mit einer Summe von Quadraten. Ist $x = 1$, so erkennt man durch Vereinigung dieser Resultate sofort, daß jede pseudosymmetrische Determinante, deren Hauptelemente gleich der Einheit sind, eine Summe von Quadraten ist.

48. Beispiele. a) Man beachte die Resultate

$$\begin{vmatrix} x & r & -q \\ -r & x & p \\ q & -p & x \end{vmatrix} = x^3 + (p^2 + q^2 + r^2)x, \quad \begin{vmatrix} 1 & r & -q \\ -r & 1 & p \\ q & -p & 1 \end{vmatrix} = 1 + p^2 + q^2 + r^2.$$

b) Um

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & r & -q \\ -b & -r & 0 & p \\ -c & q & -p & 0 \end{vmatrix}$$

mit Hilfe von (11) zu berechnen, muß man nach den Bemerkungen des § 45 auf die Vorzeichen der verschiedenen Wurzeln achten. Die Hauptminoren von α_{11} sind p^2, q^2, r^2, und durch die genannten Bemerkungen wird man dazu geführt, als Wurzeln p, q, r zu wählen, so daß nach der Formel (11) $D = (ap + bq + cr)^2$ ist. Allgemeiner wird

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ -a & x & r & -q \\ -b & -r & x & p \\ -c & q & -p & x \end{vmatrix} = x^4 + (a^2 + b^2 + c^2 + p^2 + q^2 + r^2)x^2 + (ap + bq + cr)^2.$$

c) Endlich findet man, daß die Determinante n-ter Ordnung

$$\begin{vmatrix} x & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a & x & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a & x & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a & x \end{vmatrix}$$

den Wert hat

$$x^n + \frac{n-1}{1} a^2 x^{n-2} + \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} a^4 x^{n-4} + \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^6 x^{n-6} + \cdots.$$

Lineare Formen.

Lineare Gleichungen.

49. Wir betrachten ein System von n linearen Gleichungen, d. h. Gleichungen vom ersten Grade, mit n Unbekannten:

$$
(1)\qquad \left\{\begin{array}{l}
a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n = k_1\,, \\
a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n = k_2\,, \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \cdots + a_{nn}\,x_n = k_n\,.
\end{array}\right.
$$

Die Determinante D mit dem allgemeinen Element a_{ij} heißt die Determinante des Systems. Multipliziert man die Gleichungen (1) bezüglich mit $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{ni}$ und summiert, so erhält man

$$
(2)\quad \sum_{j=1}^{j=n} x_j\,(a_{1j}\,\alpha_{1i} + a_{2j}\,\alpha_{2i} + \cdots + a_{nj}\,\alpha_{ni}) = k_1\,\alpha_{1i} + k_2\,\alpha_{2i} + \cdots + k_n\,\alpha_{ni}\,.
$$

Auf der linken Seite ist der Koeffizient von x_j immer null für $j \neq i$ und gleich D für $j = i$. Die rechte Seite ist das, was aus D wird, wenn man die Elemente der i-ten Vertikalreihe bezüglich durch $k_1, k_2, \ldots, k_n$ ersetzt. Bezeichnet man mit D_i die so erhaltene Determinante, setzt man also

$$
D_1 = \begin{vmatrix} k_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ k_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},\ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & k_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & k_2 & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & k_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},\ \ldots,\ D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & k_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & k_n \end{vmatrix},
$$

so wird die Gleichung (2) $Dx_i = D_i$, und man sieht auf diese Weise, daß jede Lösung des Systems (1) eine Lösung des Systems

$$
(3)\qquad Dx_1 = D_1,\ Dx_2 = D_2,\ \ldots,\ Dx_n = D_n
$$

ist.

50. Cramersche Regel. Wenn $D \neq 0$ ist, so läßt das System (3) offenbar nur eine einzige Lösung zu, nämlich

$$
(4)\qquad x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ \ldots,\ x_n = \frac{D_n}{D}\,.
$$

Dies ist also die einzige Lösung, welche dem System (1) zukommen kann. Es erübrigt noch zu zeigen, daß die Werte (4) tatsächlich eine Lösung des Systems (1) bilden, und zu dem Ende genügt es sich zu vergewissern, daß die genannten Werte jede beliebige

Gleichung des Systems erfüllen, z. B. die r-te. Man erhält durch Einsetzen der Werte (4) in die r-te Gleichung (1)

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_{ri} x_i = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{i=n} a_{ri} D_i \text{ mit } D_i = \sum_{j=1}^{j=n} k_j \alpha_{ji}.$$

Mithin ist

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_{ri} x_i = \frac{1}{D} \sum_{i,j} k_j a_{ri} \alpha_{ji} = \frac{1}{D} \sum_{j=1}^{j=n} k_j (a_{r1} \alpha_{j1} + a_{r2} \alpha_{j2} + \cdots + a_{rn} \alpha_{jn}).$$

Der Koeffizient von k_j ist null für $j \neq r$ und gleich D nur im Falle $j = r$. Mithin reduziert sich die rechte Seite auf k_r, und die r-te Gleichung ist erfüllt. Wir sehen also, um zusammenzufassen, folgendes: Wenn die Determinante eines Systems von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten von Null verschieden ist, so läßt das System eine einzige Lösung zu. Dieselbe besteht aus den Werten, die man erhält, wenn man in jener Determinante successiv jede Vertikalreihe durch die Reihe der bekannten Glieder ersetzt und die so erhaltenen n Determinanten durch die Determinante des Systems dividiert.

51. Wenn $D = 0$ ist und wenigstens eine der Determinanten $D_1, D_2, \ldots, D_n$ von Null verschieden ist, so ist es nicht möglich, allen Gleichungen (3) zu genügen, da wenigstens eine von ihnen die Form hat $0 \cdot x \neq 0$. In diesem Falle sind die Gleichungen (1) miteinander unverträglich. Wenn z. B. das System (1) lautet

$$x + y + z = 1, \quad x + y + 2z = 0, \quad x + y + 3z = 0,$$

so ist das System (3) $0 \cdot x = 1$, $0 \cdot y = -1$, $0 \cdot z = 0$ und läßt keine Lösungen zu, was mithin auch von dem ersten System gilt. Wenn ferner die Determinanten $D, D_1, D_2, \ldots, D_n$ alle null sind, so wird das System (3) von jedem beliebigen System von Werten befriedigt, die man den Unbekannten erteilt. Es ist aber nicht erlaubt zu schließen, daß dies auch bei dem System (1) der Fall ist. Z. B. sind die Gleichungen

$$x + y + z = 1, \quad x + y + z = 2, \quad x + y + z = 3$$

offenbar unverträglich, während sich die Gleichungen (3) im vorliegenden Falle auf $0 \cdot x = 0$, $0 \cdot y = 0$, $0 \cdot z = 0$ reduzieren und ein völlig unbestimmtes System bilden. Es ist also nicht mehr erlaubt, die Äquivalenz der Systeme (1) und (3) zu behaupten, wenn $D = 0$ ist. Eine vollständige Diskussion des Systems (1) wird möglich sein, sobald wir das Theorem von Rouché bewiesen haben.

52. Es werde allgemeiner ein System von m Gleichungen mit n Unbekannten betrachtet:

$$(5)\qquad \begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \cdots + a_{1n}\ x_n = k_1\,, \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \cdots + a_{2n}\ x_n = k_2\,, \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}\ x_n = k_n\,. \end{cases}$$

Verschwinden sämtliche Koeffizienten der Unbekannten, so sind die Gleichungen offenbar unbestimmt, wenn alle bekannten Glieder null sind, und unverträglich, wenn wenigstens ein bekanntes Glied von Null verschieden ist. Wir lassen diesen ganz speziellen Fall, der kein Interesse hat, bei Seite und wollen von jetzt ab annehmen, daß die Koeffizienten der Unbekannten nicht sämtlich null sind. Es ist ferner erlaubt $m > n$ vorauszusetzen, da man, wenn dies nicht der Fall wäre, zu dem System (5) mehr als $n - m$ Gleichungen hinzufügen könnte, deren Koeffizienten und bekannte Glieder gleich Null sind, und so zu einem System gelangen würde, welches mit (5) äquivalent ist. Dies vorausgeschickt sei μ der Rang (§ 18) der Matrix

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

unseres Systems. Dann gibt es in derselben eine nicht verschwindende Determinante μ-ter Ordnung. Diese Determinante heiße, gleichviel wie sie gewählt ist, die Hauptdeterminante des Systems. Sie hat die Eigenschaft, nicht null zu sein, während alle Determinanten höherer Ordnung, die in derselben Matrix enthalten sind, verschwinden. Ihre Elemente erscheinen als Koeffizienten von μ Unbekannten in μ Gleichungen (5). Wir wollen uns denken, es sei bereits eine Vertauschung der Unbekannten und auch der Gleichungen ausgeführt derart, daß die Unbekannten und die Gleichungen, deren Koeffizienten in der Hauptdeterminante auftreten, die ersten μ Vertikalreihen bezw. die ersten μ Horizontalreihen einnehmen. Wir dürfen also annehmen, daß die Hauptdeterminante

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\mu} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \cdots & a_{\mu\mu} \end{vmatrix}$$

ist. Es sei ferner

$$\delta_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\mu} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\mu} & k_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \cdots & a_{\mu\mu} & k_\mu \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{r\mu} & k_r \end{vmatrix}$$

Die Determinanten $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$ heißen die charakteristischen Determinanten des Systems. Man bemerke, daß die μ ersten immer null sind, da bei ihnen die letzte Horizontalreihe mit einer andern identisch ist. Wir werden in kurzem sehen, daß das Verschwinden der $m-\mu$ übrigen notwendig und hinreichend ist für die Verträglichkeit der vorgelegten Gleichungen.

53. Theorem von Rouché. Wenn die charakteristischen Determinanten eines Systems von m linearen Gleichungen mit $n < m$ Unbekannten nicht alle null sind, so sind die Gleichungen miteinander unverträglich. Im entgegengesetzten Falle besitzt das System eine einzige Lösung oder unendlich viele Lösungen, je nachdem der Rang seiner Matrix gleich n oder kleiner als n ist[1]).

a) Man bringe die Unbekannten $x_{\mu+1}, x_{\mu+2}, \ldots, x_n$ auf die rechte Seite und erteile ihnen in beliebiger Weise die Werte $c_{\mu+1}, c_{\mu+2}, \ldots, c_n$. Das vorgelegte System reduziert sich dadurch auf ein System von m Gleichungen zwischen μ Unbekannten:

$$(6)\qquad \begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \cdots a_{1\mu} x_\mu = k_1', \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \cdots a_{2\mu} x_\mu = k_2', \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}\ x_1 + a_{m2}\ x_2 + \cdots a_{m\mu} x_\mu = k_\mu', \end{cases}$$

wo

$$(7)\qquad k_r' = k_r - \sum_{s=\mu+1}^{s=n} a_{rs}\, c_s$$

ist im Falle $\mu < n$ und $k_r' = k_r$ im Falle $\mu = n$. Vor allem bemerke man, daß das System (6) dieselbe Hauptdeterminante und dieselben charakteristischen Determinanten hat wie das System (5). In der Tat kann die Matrix von (6) keine Determinanten von höherer als μ-ter Ordnung enthalten und unter denen, welche die Ordnung μ haben, ist die Determinante $\delta \neq 0$, welche man also als Hauptdeterminante annehmen kann. Was die charakteristischen Determinanten

$$\delta_r' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\mu} & k_1' \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\mu} & k_2' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\mu1} & a_{\mu2} & \cdots & a_{\mu\mu} & k_\mu' \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{r\mu} & k_r' \end{vmatrix}$$

anbetrifft, so läßt sich ihnen auf Grund bekannter Eigenschaften der

1) Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 1875.

Determinanten durch Zerlegung der letzten Vertikalreihe gemäß der Relation (7) folgende Form geben:

$$\delta_r' = \delta_r - \sum_{s=\mu+1}^{s=n} c_s \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\mu} & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\mu} & a_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \dots & a_{\mu\mu} & a_{\mu s} \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{r\mu} & a_{rs} \end{vmatrix}.$$

Die Determinante, mit welcher c_s multipliziert ist, ist offenbar in der Matrix des Systems (5) enthalten und verschwindet, da ihre Ordnung μ übertrifft. Mithin ist $\delta_r' = \delta_r$.

b) Jetzt bemerke man, daß nach einer bekannten Formel (§ 25)

$$(8) \qquad \delta_r' = \delta k_r' - \sum_{i,j} k_i' a_{rj} \alpha_{ij}$$

ist, wo i und j die Werte $1, 2, 3, \dots \mu$ annehmen. In dem System (6) betrachte man die μ ersten Gleichungen und die r-te; man multipliziere diese letzte mit δ und die i-te $(i = 1, 2, \dots, \mu)$ mit $-(a_{r1} \alpha_{i1} + a_{r2} \alpha_{i2} + \dots + a_{r\mu} \alpha_{i\mu})$. Addiert man, so ergibt sich auf Grund von (8) sofort, daß die rechte Seite δ_r' ist, während auf der linken Seite der Koeffizient von x_s das ist, was aus δ_r' wird, wenn man

$$k_1',\ k_2',\ \dots,\ k_\mu',\ k_r'$$

der Reihe nach durch

$$a_{1s},\ a_{2s},\ \dots,\ a_{\mu s},\ a_{rs}$$

ersetzt. Es ist also

$$\sum_{s=1}^{s=\mu} x_s \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\mu} & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\mu} & a_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \dots & a_{\mu\mu} & a_{\mu s} \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{r\mu} & a_{rs} \end{vmatrix} = \delta_r'.$$

Die Determinante, mit welcher x_s multipliziert ist, verschwindet, da die letzte Vertikalreihe mit der s-ten identisch ist. Die vorstehende Relation reduziert sich also auf

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_\mu = \delta_r',$$

und man kann sie nicht befriedigen, wenn $\delta_r' \neq 0$ ist. Die Gleichungen unseres Systems sind also unverträglich, wenn wenigstens eine charakteristische Determinante von Null verschieden ist.

c) Wenn die charakteristischen Determinanten alle null sind, so gibt die Relation (8)

$$k_r' = \frac{1}{\delta} \sum_{i,j} k_i' a_{rj} \alpha_{ij}.$$

Man kann also der Gleichung

$$a_{r1} x_1 + a_{r2} x_2 + \cdots + a_{r\mu} x_\mu = k_r',$$

welches auch der Wert von r sein mag, durch die Annahme genügen

$$x_j = \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^{i=\mu} k_i' \alpha_{ij}.$$

Es ist ferner unmöglich das System (6) in anderer Weise zu befriedigen, da die μ ersten Gleichungen ein System von μ Gleichungen zwischen μ Unbekannten bilden mit der Determinante $\delta \neq 0$, so daß dieses System (§ 50) nur eine Lösung besitzt.

d) Aus dem Obigen geht klar hervor, daß das System (5), wenn die charakteristischen Determinanten sämtlich verschwinden, eine einzige Lösung besitzt, falls $\mu = n$, und eine unendliche Zahl von solchen, falls $\mu < n$ ist; denn jedem System von Werten $c_{\mu+1}, c_{\mu+2}, \ldots, c_n$, die man $x_{\mu+1}, x_{\mu+2}, \ldots, x_n$ beliebig erteilt, entspricht ein bestimmtes System von Werten für $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$. In diesem Falle werden wir sagen können, daß die Zahl der Lösungen $(n-\mu)$-fach unendlich ist oder daß das System $(n-\mu)$-fach unbestimmt ist, sobald wir uns überzeugt haben, daß die vorhin auseinandergesetzte Methode alle möglichen Lösungen des Systems (5) liefert. Es ist aber klar, daß wir immer, wenn $c_1', c_2', \ldots, c_n'$ eine beliebig gewählte Lösung ist, den c die Werte $c_{\mu+1} = c_{\mu+1}', c_{\mu+2} = c_{\mu+2}', \ldots, c_n = c_n'$ erteilen können. Alsdann muß die Auflösung des Systems, welches die μ ersten Gleichungen (6) bilden, notwendig die Werte $x_1 = c_1'$, $x_2 = c_2', \ldots, x_\mu = c_\mu'$ liefern. Sonst würde das genannte System mehr als eine Lösung besitzen, während seine Determinante δ von Null verschieden ist. Das ist aber unmöglich (§ 50).

54. Bemerkungen. a) Die vorstehenden Betrachtungen lassen erkennen, daß, wenn das System Lösungen besitzt, μ Gleichungen notwendig und hinreichend sind, um sie alle zu bestimmen, so daß der Rang der Matrix eines Systems die Minimalzahl von Gleichungen darstellt, auf die man sich das genannte System reduziert denken kann.

b) Im Falle eines Systems von n Gleichungen mit n Unbekannten kann man als Matrix des Systems diejenige betrachten, welche man durch Hinzufügen einer Horizontalreihe von Elementen Null zu der Matrix der Determinante D erhält. Ist $D \neq 0$, so ist die Hauptdeterminante gerade D und die letzte charakteristische Determinante notwendig gleich Null. Mithin gibt es eine einzige Lösung. Ist $D=0$, so hat man die Hauptdeterminante unter den Minoren von D zu suchen. Sie wird immer von einer niedrigeren Ordnung als der n-ten sein und es kann daher nur Unverträglichkeit oder Unbestimmtheit bestehen. Demnach ist die Bedingung $D \neq 0$, die für das Vorhandensein einer einzigen Lösung des Systems hinreichend ist, auch dazu notwendig. Auf diese Weise ist eine Lücke ausgefüllt, auf die wir in § 51 hingewiesen haben.

c) Die Bedingungen für die Verträglichkeit von mehreren linearen Gleichungen lassen sich nach Capelli[1]) mit eleganter Kürze ausdrücken. Die Matrix

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & k_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & k_m \end{vmatrix}$$

enthält $\delta \neq 0$. Ihr Rang ist also nicht kleiner als μ. Er kann aber nicht größer sein als $\mu+1$, da jede Determinante von höherer Ordnung als der $(\mu+1)$-ten, die in (9) enthalten ist, verschwindet; denn entweder ist sie auch in der Matrix des Systems enthalten, oder es treten in ihr die k auf, und wenn man nach diesen Elementen entwickelt, so findet man, daß alle Komplemente null sind. Der Rang der Matrix (9) ist also μ oder $\mu+1$. Im ersten Falle verschwinden alle Determinanten von der Ordnung $\mu+1$, zu denen auch die charakteristischen Determinanten gehören, und die Gleichungen sind daher miteinander verträglich. Im zweiten Falle gibt es in (9) wenigstens eine nicht verschwindendende Determinante von der Ordnung $\mu+1$, und da eine solche Determinante nicht gleichzeitig in der Matrix des Systems enthalten sein kann, so ist damit gesagt, daß in ihr die k vorkommen. Inzwischen können die Komplemente dieser k nicht sämtlich null sein. Sonst würde die Determinante selbst verschwinden. Es folgt daraus, daß wenigstens eins derselben von Null verschieden ist, und man ist immer berechtigt es als Hauptdeterminante der Matrix des Systems anzunehmen. In diesem Falle ist die betrachtete nicht verschwindende Determinante eine charakteristische Determinante, und die Gleichungen sind daher miteinander unverträglich. Es sind also, um zusammenzufassen, die Gleichungen verträglich oder unverträglich, je nachdem der Rang der Matrix (9) μ oder $\mu+1$ ist. Mit andern Worten: Für die Verträglichkeit eines Systems von linearen Gleichungen ist es notwendig

1) Rivista di Matematica, 1892, p. 54.

und hinreichend, daß die Matrix des Systems ihren Rang unverändert bewahrt, wenn man zu ihr die aus den bekannten Gliedern bestehende Vertikalreihe hinzufügt.

Systeme linearer Formen.

55. Unter den ganzen rationalen Ausdrücken in n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind von Wichtigkeit die homogenen, d. h. diejenigen, deren sämtliche Glieder den nämlichen Grad m haben. Sie führen den Namen algebraische Formen und heißen linear, wenn $m = 1$, quadratisch, wenn $m = 2$, cubisch, wenn $m = 3$, biquadratisch, wenn $m = 4$ ist, u. s. w. Eine Form beliebigen Grades heißt ferner binär, wenn $n = 2$, ternär, wenn $n = 3$, quaternär, wenn $n = 4$ ist, u. s. w. In diesem Buche werden wir uns nur mit den linearen und den quadratischen Formen beschäftigen. Eine lineare Form ist

$$u = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n,$$

während die Entwickelung[1]) von u^m das einfachste Beispiel einer Form m-ten Grades bietet. Man bemerke, daß sich aus dieser Entwickelung eine beliebige Form m-ten Grades ableiten läßt, indem man jedes Glied mit einem willkürlichen Koeffizienten versieht, so daß die Anzahl der Glieder einer algebraischen Form m-ten Grades in n Veränderlichen gleich der Anzahl der Glieder in der Entwickelung der m-ten Potenz eines n-gliedrigen Polynoms ist, d. h. gleich der n-ten figurierten Zahl[2]) m-ter Ordnung oder der Anzahl der Kombinationen von $m + n - 1$ Dingen zu je m.

56. Ist ein System von m linearen Formen in n Veränderlichen gegeben, so ist es von Wichtigkeit zu wissen, ob diese Formen für ein und dasselbe System von Werten, die man den Veränderlichen erteilt und die nicht sämtlich null sind, verschwinden können. Es handelt sich mit andern Worten darum zu wissen, ob das System von linearen und homogenen Gleichungen

$$(10)\qquad \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = 0, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n = 0 \end{cases}$$

möglicherweise Lösungen hat außer der selbstverständlichen

$$(11)\qquad x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \ldots, \quad x_n = 0.$$

1) Baltzer, Elemente der Mathematik, 2. Teil, § 27.
2) Baltzer, a. a. O., § 28.

Es ist klar, daß die charakteristischen Determinanten immer null sind, da die letzte Vertikalreihe jeder charakteristischen Determinante aus bekannten Gliedern besteht, die in dem vorliegenden Falle gleich Null sind. Das Theorem von Rouché lehrt uns sofort, daß Unverträglichkeit nicht stattfinden kann, und dies wird bestätigt durch die Tatsache, daß eine Lösung immer existiert, nämlich die Lösung (11). Dasselbe Theorem sagt uns, daß, wenn der Rang der Matrix n ist, das System (10) eine einzige Lösung zuläßt, und zwar ist es notwendig die Lösung (11). Es gilt also der Satz: Die notwendige und hinreichende Bedingung für das gleichzeitige Verschwinden von mehreren linearen Formen für Werte der Veränderlichen, die nicht sämtlich null sind, ist die, daß der Rang der Matrix der Koeffizienten kleiner ist als die Zahl der Veränderlichen.

57. Im Falle $m > n$ ist, wie wir wissen, die Zahl der Lösungen des Systems (10) $(n-\mu)$-fach unendlich, wenn μ der Rang ist. Im Falle $m < n$ sind zu der Matrix des Systems mehr als $n - m$ Horizontalreihen von Nullen hinzuzufügen, und wir können uns daher bei der Aufsuchung der Hauptdeterminante auf die m Horizontalreihen beschränken, die nicht aus Nullen bestehen, da alle Determinanten, welche eine Horizontalreihe von Nullen enthalten, gleich Null sind. Wir sehen auf diese Weise, daß die Ordnung der Hauptdeterminante nicht größer als m wird ausfallen können, d. h. daß $\mu \leqq m$ sein wird, mithin $n - \mu > n - m$. Es gilt also der Satz: Jedes System von m linearen homogenen Gleichungen mit $n > m$ Unbekannten ist wenigstens $(n - m)$-fach unbestimmt. Auf alle Fälle wird es zur Auflösung des Systems (10), nachdem einmal die Hauptdeterminante

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\mu} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \cdots & a_{\mu\mu} \end{vmatrix}$$

fixiert ist, genügen das System der μ ersten Gleichungen nach x_1, $x_2, \ldots, x_\mu$ aufzulösen. Wenn

$$\delta_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1j} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1\mu} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2j} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \cdots & a_{\mu,i-1} & a_{\mu j} & a_{\mu,i+1} & \cdots & a_{\mu\mu} \end{vmatrix}$$

gesetzt wird, so gibt die Cramersche Regel

$$x_i = -\frac{1}{\delta}\sum_{j=\mu+1}^{j=n}\delta_{ij}x_j, \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, \mu)$$

wo es noch freisteht, jeder der Unbekannten $x_{\mu+1}, x_{\mu+2}, \ldots, x_n$ einen beliebigen Wert zu erteilen. Bei jeder andern Wahl der Hauptdeterminante δ' innerhalb derselben μ Vertikalreihen, denen δ angehört, ergibt sich eine Formel, die sich nicht von der obigen unterscheiden kann, und um zu verifizieren, daß sie sich nicht davon unterscheidet, genügt es zu bemerken, daß auf Grund des am Ende von § 41 ausgesprochenen Theorems $\delta/\delta' = \delta_{ij}/\delta'_{ij}$ ist.

58. Wir wollen im besondern ein System von n linearen Formen mit n Veränderlichen betrachten. Das gleichzeitige Verschwinden kann für Werte der Veränderlichen, die nicht alle null sind, nicht stattfinden, wenn die Determinante D des Systems von Null verschieden ist. Wenn die Determinante D gleich Null ist und μ ihr Rang ist, so gibt es in $(n-\mu)$-fach unendlicher Anzahl Systeme von nicht sämtlich verschwindenden Werten der Veränderlichen, welche die n Formen gleichzeitig zum Verschwinden bringen. Unter Umkehrung dieses Satzes pflegt man auch zu sagen: Damit eine Determinante n-ter Ordnung den Rang μ habe, ist es notwendig und hinreichend, daß $n-\mu$ lineare homogene Relationen zwischen den Elementen der verschiedenen Reihen bestehen. Damit soll gesagt sein, daß es möglich sein muß, $n-\mu$ verschiedene Systeme von Werten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ zu finden, die nicht alle null und so beschaffen sind, daß für jedes i

$$\lambda_1 a_{i1} + \lambda_2 a_{i2} + \cdots + \lambda_n a_{in} = 0$$

ist. Im besondern gilt folgendes: Damit eine Determinante gleich Null sei, ist es notwendig und hinreichend, daß zwischen den Elementen jeder Reihe eine und dieselbe lineare homogene Relation besteht. Aus unserm Satze folgt außerdem, daß sich eine Determinante von der Ordnung n und vom Range μ mit Hilfe der bekannten Operationen (§ 17) immer so einrichten läßt, daß die sämtlichen Elemente von $n-\mu$ parallelen Reihen null sind. Eine Determinante, welche verschwindet, läßt sich daher immer mit Hilfe der genannten Operationen in eine andere transformieren, bei der alle Elemente einer Reihe null sind.

59. Besonderes Interesse für die Anwendungen bietet der Fall, in welchem $D = 0$ ist, während wenigstens ein Element der reziproken Determinante von Null verschieden ist. Wenn z. B. $\alpha_{11} \neq 0$ ist, so ist die Hauptdeterminante $\delta = \alpha_{11}$ von der Ordnung $n-1$, und das System läßt eine einfach unendliche Zahl von Lösungen zu. Um sie alle zu erhalten, verfahre man, wie in § 57 angegeben worden ist, d. h. man bringe die Unbekannte x_1 auf die rechte Seite und betrachte zur Bestimmung der übrigen Unbekannten das System der letzten $n-1$ Gleichungen. Auf diese Weise findet man $\alpha_{11} x_i = \alpha_{1i} x_1$ und, wenn man i variieren läßt,

$$\frac{x_1}{\alpha_{11}} = \frac{x_2}{\alpha_{12}} = \frac{x_3}{\alpha_{13}} = \cdots = \frac{x_n}{\alpha_{1n}}.$$

Die Eigenschaften der Determinanten lassen dieses Resultat als evident erscheinen. Der Fall von $n-1$ linearen homogenen Gleichungen mit n Unbekannten wird ohne weiteres auf den vorstehenden zurückgeführt, indem man zu dem System eine Gleichung mit verschwindenden Koeffizienten hinzufügt.

60. Beispiele. a) Das System

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0, \quad a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0, \quad a_3 x + b_3 y + c_3 z = 0$$

besitzt nur dann Lösungen, die aus nicht sämtlich verschwindenden Werten von x, y, z bestehen, wenn

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

ist. Wenn aber diese Bedingung erfüllt ist, so gibt es unendlich viele Lösungen, die durch die Formeln

$$\frac{x}{b_2 c_3 - b_3 c_2} = \frac{y}{c_2 a_3 - c_3 a_2} = \frac{z}{a_2 b_3 - a_3 b_2}$$

gegeben sind, vorausgesetzt, daß nicht alle Nenner null sind. So besitzt das System

$$x + y + z = 0, \quad x + y + 2z = 0, \quad x + y + 3z = 0$$

eine einfach unendliche Zahl von Lösungen, die durch $x = \lambda$, $y = -\lambda$, $z = 0$ gegeben sind, wobei λ von $-\infty$ bis $+\infty$ variiert.

b) Unter Benutzung der Schlußbemerkung des § 59 erkennt man, daß das System

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 t = 0, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 t = 0 \end{cases}$$

durch die Annahme

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}} = \frac{y}{-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}} = \frac{t}{-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

und in keiner andern Weise befriedigt wird, vorausgesetzt, daß wenigstens ein Nenner von Null verschieden ist.

61. Man sagt, daß die Formen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ in einer linearen Relation stehen, wenn es möglich ist, die Werte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, die nicht sämtlich null sein sollen, so zu bestimmen, daß für sie $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_m u_m$ identisch verschwindet. Wenn zwischen den genannten Formen keine derartige Beziehung stattfindet, so heißen sie linear unabhängig. Dies vorausgeschickt wollen wir annehmen, daß die Formen durch die linken Seiten der Gleichungen (10) dargestellt werden. Dann spaltet sich die Relation

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_m u_m = 0$$

wegen der Willkürlichkeit der x, die als unabhängig vorausgesetzt werden, in die Relationen:

$$\begin{cases} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \cdots + \lambda_m a_{m1} = 0, \\ \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \cdots + \lambda_m a_{m2} = 0, \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \cdots + \lambda_m a_{mn} = 0. \end{cases}$$

Soll es unmöglich sein, dieselben durch Werte der λ zu befriedigen, die nicht sämtlich verschwinden, so ist dazu notwendig und hinreichend (§ 56), daß der Rang des Systems m ist. Es gilt also der Satz: Damit m lineare Formen mit n Veränderlichen unabhängig seien, ist es notwendig und hinreichend, daß der Rang ihrer Matrix m ist. Im besondern ist für die Unabhängigkeit von n linearen Formen mit n Veränderlichen notwendig und hinreichend, daß die Determinante des Systems von Null verschieden ist.

62. Wenn $m > n$ ist, so ist der Rang, weil nicht größer als n, kleiner als m. Daraus folgt, daß es mehr als n unabhängige lineare Formen mit n Veränderlichen nicht geben kann. Z. B. sind die Formen $ax + by$ und $a'x + b'y$ unabhängig, wenn $ab' \gtrless ba'$. Es ist aber unmöglich eine dritte Form $a''x + b''y$ zu konstruieren, die von den beiden ersten unabhängig ist. Und in der Tat hat man, was auch a'' und b'' sein mögen, identisch

$$(a'b'' - b'a'')(ax + by) + (ba'' - ab'')(a'x + b'y) \\ + (ab' - ba')(a''x + b''y) = 0.$$

In jedem Falle ist die Minimalzahl von Formen, auf die man sich ein System von linearen Formen reduziert denken kann, gleich dem Rang ihrer Matrix, d. h. wenn μ dieser Rang ist, so lassen sich $m - \mu$ Formen linear durch die μ übrigen ausdrücken, die voneinander unabhängig sind. Dies ergibt sich auch aus der folgenden Bemerkung: Wenn man den x willkürliche Werte erteilt, die nicht alle null sind, und die entsprechenden Werte der u berechnet, so lassen sich die Gleichungen, welche diese Formen definieren, betrachten als ein System von verträglichen Gleichungen, dessen charakteristische Determinanten folglich alle gleich Null sein müssen. Es ist also immer

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\mu} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\mu} & u_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \dots & a_{\mu\mu} & u_\mu \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{r\mu} & u_r \end{vmatrix} = 0,$$

d. h. (§ 25)

$$u_r = \frac{1}{\delta} \sum_{i,j} a_{rj} \alpha_{ij} u_i \qquad (r = \mu + 1, \mu + 2, \dots, m).$$

63. Wir sind jetzt in der Lage ein Theorem zu beweisen, welches die Bestimmung des Ranges einer beliebigen Matrix erleichtert. Wir wollen annehmen, es sei in dieser Matrix eine Determinante $\delta \neq 0$ von der Ordnung μ gefunden derart, daß alle Determinanten von der Ordnung $\mu + 1$, welche derselben Matrix angehören und δ enthalten, null sind, daß also

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\mu} & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\mu} & a_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \dots & a_{\mu\mu} & a_{\mu s} \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{r\mu} & a_{rs} \end{vmatrix} = 0$$

ist für alle möglichen Werte von r und s. Entwickelt man nach den Elementen der letzten Vertikalreihe und dividiert durch δ, so ergiebt sich die Relation

$$a_{rs} = \lambda_1 a_{1s} + \lambda_2 a_{2s} + \dots + \lambda_\mu a_{\mu s},$$

in welcher $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ von s unabhängig sind. Es folgt daraus, daß die Formen

$$u_r = a_{r1} x_1 + a_{r2} x_2 + \dots + a_{rn} x_n \quad (r = \mu + 1, \mu + 2, \dots, m)$$

sich linear aus den Formen $u_1, u_2, \dots, u_\mu$ ableiten lassen (die wegen $\delta \neq 0$ voneinander unabhängig sind). Mithin ist der Rang der Matrix

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}\right|$$

gerade gleich μ. Um also behaupten zu können, daß der Rang einer Matrix gleich μ ist, genügt es, daß es gelingt in ihr eine nicht verschwindende Determinante von der Ordnung μ zu finden derart, daß alle Determinanten von der Ordnung $\mu + 1$, welche sie enthalten, null sind. Daraus folgt im besondern: Wenn die in gewissen $m - 1$ Vertikalreihen der obigen Matrix enthaltenen Determinanten nicht alle null sind, während jede große Determinante, die die genannten Vertikalreihen enthält, gleich Null ist, so ist jede andere große Determinante der Matrix gleich Null.

Lineare Transformationen.

64. Denken wir uns, daß in einer oder mehreren algebraischen Formen mit n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die x durch die folgenden Ausdrücke ersetzt werden:

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= k_{11} y_1 + k_{12} y_2 + \cdots + k_{1n} y_n, \\ x_2 &= k_{21} y_1 + k_{22} y_2 + \cdots + k_{2n} y_n, \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_n &= k_{n1} y_1 + k_{n2} y_2 + \cdots + k_{nn} y_n. \end{aligned}\right.$$

Die gegebenen Formen verwandeln sich in ebensoviele Formen mit den Veränderlichen $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Die durch die Gleichungen (12) ausgedrückte Operation, welche den Übergang von den ersten zu den zweiten Formen vermittelt, ist eine lineare Transformation. Der Modul der Transformation ist die Determinante

$$K = \left|\begin{matrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{matrix}\right|,$$

welche man von Null verschieden annehmen muß, um keine lineare Verbindung zwischen den x zu schaffen (§ 61). Wenn $K = 1$ ist, so nennt man die Transformation unimodular.

65. Um zu den ursprünglichen Formen zurückzugelangen, muß man auf die neuen Formen eine andere lineare Transformation anwenden, welche die inverse der ersten heißt. Die Formeln der inversen Transformation erhält man offenbar durch Auflösung des Systems (12) nach den y. Es sei $\varkappa_{ij}$ das algebraische Komplement von k_{ij}. Da $K \neq 0$ ist, so liefert die Cramersche Regel

$$(13)\quad \begin{cases} K y_1 = \varkappa_{11} x_1 + \varkappa_{21} x_2 + \cdots + \varkappa_{n1} x_n, \\ K y_2 = \varkappa_{12} x_1 + \varkappa_{22} x_2 + \cdots + \varkappa_{n2} x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ K y_n = \varkappa_{1n} x_1 + \varkappa_{2n} x_2 + \cdots + \varkappa_{nn} x_n. \end{cases}$$

Der Modul dieser Transformation ist (§ 37)

$$\frac{1}{K^n} \begin{vmatrix} \varkappa_{11} & \varkappa_{21} & \cdots & \varkappa_{n1} \\ \varkappa_{12} & \varkappa_{22} & \cdots & \varkappa_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \varkappa_{1n} & \varkappa_{2n} & \cdots & \varkappa_{nn} \end{vmatrix} = \frac{1}{K}.$$

66. Wendet man die Transformation (12) auf das System von linearen Formen

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{in} x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

an, so verwandelt sich dasselbe in das System

$$b_{i1} y_1 + b_{i2} y_2 + \cdots + b_{in} y_n, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

wo die b mit den a in einfacher Weise zusammenhängen. Wenn man nämlich die Transformation (12) auf die i-te Form des ersten Systems anwendet, so geht dieselbe über in

$$a_{i1}(k_{11} y_1 + \cdots + k_{1n} y_n) + a_{i2}(k_{21} y_1 + \cdots + k_{2n} y_n) \\ + \cdots + a_{in}(k_{n1} y_1 + \cdots + k_{nn} y_n).$$

Also ist, wenn man die Koeffizienten von y_j zusammenfaßt,

$$b_{ij} = a_{i1} k_{1j} + a_{i2} k_{2j} + \cdots + a_{in} k_{nj}.$$

Nach der Regel für die Multiplikation der Determinanten sieht man sofort, daß

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} k_{11} & k_{21} & \cdots & k_{n1} \\ k_{12} & k_{22} & \cdots & k_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ k_{1n} & k_{2n} & \cdots & k_{nn} \end{vmatrix}$$

ist. *Die Determinante eines Systems von linearen Formen, die man linear transformiert hat, ist also gleich der Determinante des ursprünglichen Systems, multipliziert mit dem Modul der Transformation.*

67. Die Anwendung von mehreren linearen Transformationen, die nacheinander ausgeführt werden, ist äquivalent mit der Anwendung einer einzigen solchen Transformation, deren Modul gleich dem Produkt der Moduln der gegebenen Transformationen ist. Um dies zu beweisen, können wir uns offenbar auf den Fall zweier Transformationen

$$x_i = k_{i1} y_1 + k_{i2} y_2 + \cdots + k_{in} y_n, \quad y_i = k'_{i1} z_1 + k'_{i2} z_2 + \cdots + k'_{in} z_n$$

beschränken. Dieselben sind zusammen äquivalent mit derjenigen Transformation, welche durch die Formeln definiert wird, die man erhält, wenn man die x durch die z direkt ausdrückt. Betrachtet man aber $x_1, x_2, \ldots x_n$ als ein System von linearen Formen in den y mit der Determinante K, so ist nach dem vorigen Paragraphen klar, daß KK' die Determinante des neuen Systems von Formen ist, d. h. der Modul der resultierenden Transformation.

68. Orthogonale Transformationen. Unter den linearen Transformationen sind besonders wichtig die orthogonalen. Sie lassen die Summe der Quadrate der Veränderlichen ungeändert. Soll also die Transformation (12) orthogonal sein, so muß identisch

$$(14) \qquad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$$

sein, also in dem Ausdruck

$$(k_{11} y_1 + \cdots + k_{1n} y_n)^2 + (k_{21} y_1 + \cdots + k_{2n} y_n)^2 + \cdots$$
$$+ (k_{n1} y_1 + \cdots + k_{nn} y_n)^2$$

der Koeffizient von y_i^2 gleich 1 sein für jeden Wert von i, und derjenige von $y_i y_j$ gleich 0 für $i \neq j$. Entwickelt man die Quadrate so sieht man, daß

$$(15) \qquad k_{1i} k_{1j} + k_{2i} k_{2j} + \cdots + k_{ni} k_{nj} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

sein muß. Wenn umgekehrt diese Relationen erfüllt sind, so besteht auch die Identität (14), und die Transformation ist orthogonal.

69. Eine Determinante heißt orthogonal, wenn man sie als Modul einer orthogonalen Transformation benutzen kann, wozu notwendig und hinreichend ist, daß zwischen ihren Elementen k_{ij} die Beziehungen (15) bestehen. Jede orthogonale Determinante ist gleich ± 1. In der Tat ist das Quadrat einer solchen Determinante auf Grund der Formeln (15)

$$K^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

so daß $K = \pm 1$ ist. Die durch den Modul K definierte Transformation heißt rechtsdrehend, wenn $K = 1$, linksdrehend, wenn $K = -1$ ist.

70. Eine orthogonale Determinante ist dadurch charakterisiert, daß jedes ihrer Elemente gleich dem entsprechenden algebraischen Komplement ist, und zwar mit verändertem Vorzeichen, wenn die Determinante den Wert -1 hat. In der Tat geben die Formeln (15) für $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

$$\begin{cases} k_{11} k_{1j} + k_{21} k_{2j} + \cdots + k_{n1} k_{nj} = 0, \\ k_{12} k_{1j} + k_{22} k_{2j} + \cdots + k_{n2} k_{nj} = 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ k_{1j} k_{1j} + k_{2j} k_{2j} + \cdots + k_{nj} k_{nj} = 1, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ k_{1n} k_{1j} + k_{2n} k_{2j} + \cdots + k_{nn} k_{nj} = 0. \end{cases}$$

Wir wollen dieses System nach $k_{1j}, k_{2j}, \ldots, k_{nj}$ auflösen. Die Cramersche Regel giebt sofort

$$K k_{ij} = 0 \cdot \varkappa_{i1} + 0 \cdot \varkappa_{i2} + \cdots + 1 \cdot \varkappa_{ij} + \cdots + 0 \cdot \varkappa_{in} = \varkappa_{ij}.$$

Umgekehrt wird, wenn

$$K k_{ij} = \varkappa_{ij} \tag{16}$$

ist, die linke Seite von (15)

$$\frac{1}{K}\left(k_{1i}\varkappa_{1j} + k_{2i}\varkappa_{2j} + \cdots + k_{ni}\varkappa_{nj}\right)$$

und ist gleich Null, wenn $i \neq j$, gleich der Einheit, wenn $i = j$ ist. Die Gleichungen (15) sind erfüllt, und K ist daher eine orthogonale Determinante.

71. Allgemeiner ist jeder Minor einer orthogonalen Determinante gleich dem zugehörigen algebraischen Komplement, und zwar mit verändertem Vorzeichen, wenn die Determinante den Wert -1 hat. Betrachten wir in der Tat in der reziproken Determinante von K einen Minor ν-ter Ordnung. Er ist auf Grund von (16) gleich dem Produkt von K^ν mit dem entsprechenden Minor K_ν von K. Andererseits wissen wir (§ 38), daß derselbe Minor gleich ist dem algebraischen Komplement von K_ν multipliziert mit $K^{\nu-1}$. Dividiert man also durch $K^{\nu-1}$, so sieht man, daß das algebraische Komplement von K_ν gleich $K K_\nu$ ist.

72. Damit eine Transformation orthogonal sei, ist es notwendig und hinreichend, daß ihr Modul identisch wird mit dem der inversen Transformation, wenn man in ihm die

Vertikal- zu Horizontalreihen macht. Wenn die Transformation (12) orthogonal ist, so sieht man, sobald man in die Formeln (13) das Resultat (16) einführt, daß die Bedingung notwendig ist. Wenn umgekehrt die Relationen

$$x_i = k_{i1} y_1 + k_{i2} y_2 + k_{i3} y_3 + \cdots + k_{in} y_n$$
$$y_i = k_{1i} x_1 + k_{2i} x_2 + k_{3i} x_3 + \cdots + k_{ni} x_n$$

für $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ zwei inverse Transformationen darstellen, so bedeutet dies, daß die Relation (16) besteht, und daß daher die beiden Transformationen orthogonal sind.

73. Konstruktion orthogonaler Transformationen. Die n^2 Elemente einer orthogonalen Determinante müssen den Bedingungen (15) genügen. Das sind $n + \frac{1}{2} n (n-1) = \frac{1}{2} n (n+1)$ an der Zahl, nämlich n mit der rechten Seite gleich der Einheit und $\frac{1}{2} n (n-1)$ mit der rechten Seite gleich Null. Daraus folgt, daß man $n^2 - \frac{1}{2} n (n+1) = \frac{1}{2} n (n-1)$ Elementen willkürliche Werte beilegen kann, wodurch dann im allgemeinen die übrigen $\frac{1}{2} n (n+1)$ Elemente bestimmt sind, die einer gleichen Zahl von Bedingungen genügen müssen. Anstatt $\frac{1}{2} n (n-1)$ Elemente willkürlich zu wählen, können wir versuchen, alle n^2 Elemente durch $\frac{1}{2} n (n-1)$ willkürlich gewählte Größen auszudrücken. Diese Bestimmung ist von Cayley ausgeführt worden mit Hilfe einer eleganten Methode, die wir hier auseinandersetzen wollen. Es sei

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

eine pseudosymmetrische Determinante mit Hauptelementen gleich der Einheit, so daß

(17) $$a_{ij} = - a_{ji} \text{ für } i \neq j \text{ und } a_{ii} = 1$$

ist. In der Determinante A sind nur die auf einer Seite der Hauptdiagonale gelegenen Elemente willkürlich, und wir können annehmen, daß diese $\frac{1}{2} n (n-1)$ Elemente gerade die Größen sind, durch welche man die n^2 Elemente des Moduls K ausdrücken will. Betrachten wir die durch die Relationen

$$x_i = a_{i1} z_1 + a_{i2} z_2 + a_{i3} z_3 + \cdots + a_{in} z_n,$$
$$y_i = a_{1i} z_1 + a_{2i} z_2 + a_{3i} z_3 + \cdots + a_{ni} z_n$$

für $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ ausgedrückten Transformationen. Durch Addition ergiebt sich unter Berücksichtigung von (17)

(18) $$x_i + y_i = 2 z_i.$$

Inzwischen werden die inversen Transformationen von den beiden betrachteten ausgedrückt durch die Relationen

$$A z_i = \alpha_{1i} x_1 + \alpha_{2i} x_2 + \alpha_{3i} x_3 + \cdots + \alpha_{ni} x_n,$$
$$A z_i = \alpha_{i1} y_1 + \alpha_{i2} y_2 + \alpha_{i3} y_3 + \cdots + \alpha_{in} y_n,$$

welche auf Grund von (18) in

$$y_i = \frac{2}{A}\,\alpha_{1i} x_1 + \frac{2}{A}\,\alpha_{2i} x_2 + \cdots + \left(\frac{2}{A}\,\alpha_{ii} - 1\right) x_i + \cdots + \frac{2}{A}\,\alpha_{ni} x_n,$$
$$x_i = \frac{2}{A}\,\alpha_{i1}\, y_1 + \frac{2}{A}\,\alpha_{i2} y_2 + \cdots + \left(\frac{2}{A}\,\alpha_{ii} - 1\right) y_i + \cdots + \frac{2}{A}\,\alpha_{in} y_n$$

übergehen. Es ist also (§ 72) orthogonal die lineare Transformation, deren Modul das allgemeine Element

$$(19) \qquad k_{ij} = \begin{cases} \dfrac{2}{A}\,\alpha_{ii} - 1 & \text{für } i = j \\[2ex] \dfrac{2}{A}\,\alpha_{ij} & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

hat.

74. Die so konstruierte Transformation ist immer rechtsdrehend. In der Tat ist ihr Modul

$$K = \left(\frac{2}{A}\right)^n \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \frac{1}{2}A & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \frac{1}{2}A & \dots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - \frac{1}{2}A \end{vmatrix}.$$

Das Produkt von A mit der auf der rechten Seite stehenden Determinante hat das allgemeine Element

$$c_{ij} = a_{i1}\alpha_{j1} + a_{i2}\alpha_{j2} + \cdots + a_{ij}(\alpha_{jj} - \tfrac{1}{2}A) + \cdots + a_{in}\alpha_{jn},$$

d. h.

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{r=n} a_{ir}\alpha_{jr} - \tfrac{1}{2}A a_{ij}.$$

Der erste Teil der rechten Seite ist null, wenn $i \neq j$, und hat den Wert A, wenn $i = j$ ist. Folglich ist

$$c_{ij} = -\tfrac{1}{2}A\,a_{ij} = \tfrac{1}{2}A\,a_{ji} \qquad \text{für } i \neq j$$

und $c_{ii} = A - \frac{1}{2}A\,a_{ii} = \frac{1}{2}A$. In jedem Falle ist also $c_{ij} = \frac{1}{2}A\,a_{ji}$. Daraus folgt

$$AK = \left(\frac{2}{A}\right)^n \begin{vmatrix} \frac{1}{2}Aa_{11} & \frac{1}{2}Aa_{21} & \dots & \frac{1}{2}Aa_{n1} \\ \frac{1}{2}Aa_{12} & \frac{1}{2}Aa_{22} & \dots & \frac{1}{2}Aa_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{2}Aa_{1n} & \frac{1}{2}Aa_{2n} & \dots & \frac{1}{2}Aa_{nn} \end{vmatrix} = \left(\frac{2}{A}\right)^n \left(\frac{A}{2}\right)^n A = A,$$

und, wenn man sich erinnert (§ 47), daß A niemals null ist, $K = 1$.

75. Beispiel. Um die allgemeinste orthogonale Determinante dritter Ordnung zu konstruieren, bemerke man zunächst, daß die reziproke Determinante von

$$\begin{vmatrix} 1 & r & -q \\ -r & 1 & p \\ q & -p & 1 \end{vmatrix} = 1 + p^2 + q^2 + r^2$$

folgende ist:

$$\begin{vmatrix} 1+p^2 & r+pq & -q+pr \\ -r+qp & 1+q^2 & p+qr \\ q+rp & -p+rq & 1+r^2 \end{vmatrix}.$$

Dann findet man mit Hilfe der Formeln (19), daß die gesuchte Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{1+p^2-q^2-r^2}{1+p^2+q^2+r^2} & \frac{2(r+pq)}{1+p^2+q^2+r^2} & \frac{2(-q+pr)}{1+p^2+q^2+r^2} \\ \frac{2(-r+qp)}{1+p^2+q^2+r^2} & \frac{1-p^2+q^2-r^2}{1+p^2+q^2+r^2} & \frac{2(p+qr)}{1+p^2+q^2+r^2} \\ \frac{2(q+rp)}{1+p^2+q^2+r^2} & \frac{2(-p+rq)}{1+p^2+q^2+r^2} & \frac{1-p^2-q^2+r^2}{1+p^2+q^2+r^2} \end{vmatrix}$$

ist. Wenn wir mit α, β, γ drei Zahlen bezeichnen von der Beschaffenheit, daß $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ ist, so können wir immer setzen

$$p = \alpha \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}, \quad q = \beta \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}, \quad r = \gamma \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}.$$

Auf diese Weise reduziert sich die vorstehende Determinante auf die einfachere Form

$$\begin{vmatrix} \cos\vartheta + \alpha^2(1-\cos\vartheta) & \gamma\sin\vartheta + \alpha\beta(1-\cos\vartheta) & -\beta\sin\vartheta + \alpha\gamma(1-\cos\vartheta) \\ -\gamma\sin\vartheta + \beta\alpha(1-\cos\vartheta) & \cos\vartheta + \beta^2(1-\cos\vartheta) & \alpha\sin\vartheta + \beta\gamma(1-\cos\vartheta) \\ \beta\sin\vartheta + \gamma\alpha(1-\cos\vartheta) & -\alpha\sin\vartheta + \gamma\beta(1-\cos\vartheta) & \cos\vartheta + \gamma^2(1-\cos\vartheta) \end{vmatrix}.$$

Daraus folgt, daß die allgemeinste orthogonale Transformation, die auf Formen mit drei Variablen ausgeführt werden kann, durch die Relationen

$$(20)\quad \begin{cases} x' = x\cos\vartheta + (\gamma y - \beta z)\sin\vartheta + \alpha(1-\cos\vartheta)(\alpha x + \beta y + \gamma z), \\ y' = y\cos\vartheta + (\alpha z - \gamma x)\sin\vartheta + \beta(1-\cos\vartheta)(\alpha x + \beta y + \gamma z), \\ z' = z\cos\vartheta + (\beta x - \alpha y)\sin\vartheta + \gamma(1-\cos\vartheta)(\alpha x + \beta y + \gamma z) \end{cases}$$

definiert wird, die in der analytischen Geometrie unter dem Namen „Eulersche Formeln" bekannt sind[1]). Da offenbar $\alpha x' + \beta y' + \gamma z' = \alpha x + \beta y + \gamma z$ ist, so sieht man, daß diese Transformation außer der

1) Sie wurden wiedergefunden von Rodrigues, Bd. V des Liouvilleschen Journals (pag. 405).

Summe $x^2+y^2+z^2$ auch $\alpha x+\beta y+\gamma z$ ungeändert läßt, mithin auch
$$\varrho^2 = x^2+y^2+z^2-(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2 = (\gamma y-\beta z)^2+(\alpha z-\gamma x)^2+(\beta x-\alpha y)^2.$$
Legt man also α, β, γ die Bedeutung von Kosinus bei, die eine Richtung inbezug auf ein Tripel orthogonaler Axen definieren, und x, y, z die Bedeutung Cartesischer Koordinaten eines Punktes M, so sieht man, daß der Punkt M beim Übergange von einer Lage zu einer andern M' mit den Koordinaten x', y', z' nur um eine Gerade rotiert, die durch den Anfangspunkt in der Richtung (α, β, γ) gelegt ist, und daß er dabei in der Entfernung ϱ von der genannten Geraden bleibt. Die Richtung des gemeinsamen Lotes dieser Geraden und der Geraden OM wird definiert durch die Kosinus $\frac{1}{\varrho}(\gamma y-\beta z,\ \alpha z-\gamma x,\ \beta x-\alpha y)$, und es ist daher der Kosinus des Winkels, um den sich der Punkt M um die Gerade drehen muß, damit er nach M' gelangt, der Quotient von (§ 29)
$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ x & y & z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = xx'+yy'+zz'-(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2$$
durch ϱ^2, d. h. $\cos\vartheta$. Die Formeln (20) bedeuten also eine Rotation ϑ um eine durch den Anfangspunkt in der Richtung (α, β, γ) gezogene Gerade.

Quadratische Formen.

Erste Begriffe über die quadratischen Formen.

76. Besonders wichtig sind in den Anwendungen der Algebra die quadratischen Formen (§ 55) in n Veränderlichen:
$$U = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots.$$
Man pflegt kurz zu schreiben
$$U = \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j,$$
wobei gemeint ist, daß den Indices i und j unabhängig voneinander alle ganzzahligen Werte von 1 bis n erteilt werden sollen. Die symmetrische Determinante
$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

heißt die **Diskriminante** von U, und die quadratische Form

$$V = \sum_{i,j} \alpha_{ij} x_i x_j,$$

deren Diskriminante die reziproke Determinante von A ist, heißt die **reziproke Form** von U.

77. Mit dem Studium der quadratischen Form U steht in inniger Beziehung das eines Systems von linearen Formen, dessen Determinante mit der Diskriminante der Form identisch ist:

$$(1) \qquad \begin{cases} u_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n, \\ u_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_n = a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n. \end{cases}$$

Vor allem ist zu bemerken, daß man schreiben kann

$$(2) \qquad U = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_n x_n.$$

Damit haben wir für U einen Ausdruck, der symmetrisch in den x und den u ist. Wenn diese letzteren als Veränderliche angenommen werden, so verwandelt sich die gegebene quadratische Form in ihre reziproke, vorausgesetzt, daß zwischen den neuen Veränderlichen keine Relationen bestehen. Dies erfordert (§ 61), daß $A \neq 0$ ist. Unter dieser Voraussetzung liefert die Anwendung der Cramerschen Regel auf das System (1)

$$\begin{cases} A x_1 = \alpha_{11} u_1 + \alpha_{21} u_2 + \cdots + \alpha_{n1} u_n, \\ A x_2 = \alpha_{12} u_1 + \alpha_{22} u_2 + \cdots + \alpha_{n2} u_n, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A x_n = \alpha_{1n} u_1 + \alpha_{2n} u_2 + \cdots + \alpha_{nn} u_n. \end{cases}$$

Mithin wird, wenn man in (2) einsetzt,

$$(3) \qquad U = \frac{1}{A} \sum_{i,j} \alpha_{ij} u_i u_j.$$

78. Zu demselben Resultat gelangt man in anderer Weise durch die Bemerkung, daß die Verträglichkeit der Gleichungen (1) und (2) erfordert, daß

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & u_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & u_n \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n & U \end{vmatrix} = 0$$

ist. Hieraus ergibt sich (§ 17) für U der Ausdruck

$$U = -\frac{1}{A}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & u_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & u_n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n & 0 \end{vmatrix},$$

welcher (§ 25) von (3) nicht verschieden ist. Benutzt man dagegen die ursprünglichen Veränderlichen, so kann man schreiben

$$U = -\frac{1}{A^{n-2}}\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} & x_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} & x_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} & x_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & 0 \end{vmatrix}.$$

Es ist nützlich, diese beiden Ausdrücke für U festzuhalten.

79. Es liegt auf der Hand, daß man eine quadratische Form durch eine beliebig große Zahl von Veränderlichen ausdrücken kann. Man braucht sich nur jede Veränderliche durch eine lineare Form mit neuen Veränderlichen ersetzt zu denken, deren Anzahl die der ursprünglichen Veränderlichen übertrifft. Umgekehrt ist es von Wichtigkeit entscheiden zu können, ob eine gegebene quadratische Form durch eine geringere Zahl von unabhängigen Veränderlichen ausdrückbar ist. Wir wollen also annehmen, daß in der quadratischen Form

$$U = \sum_{i,j}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

die n Veränderlichen x sich derart linear gruppieren lassen, daß für U ein Ausdruck durch die m neuen Veränderlichen

$$\begin{cases} y_1 = k_{11}\, x_1 + k_{12}\, x_2 + \dots + k_{1n}\, x_n, \\ y_2 = k_{21}\, x_1 + k_{22}\, x_2 + \dots + k_{2n}\, x_n, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_m = k_{m1} x_1 + k_{m2} x_2 + \dots + k_{mn} x_n \end{cases}$$

herauskommt. Es sei

$$U = \sum_{i,j}^{m} b_{ij} y_i y_j$$

der neue Ausdruck von U. Denkt man sich hier die y eingesetzt und dann das Resultat mit dem ursprünglichen Ausdruck von U verglichen, so ergibt sich

$$(4)\qquad a_{rs} = \sum_{i,j}^{m} b_{ij} k_{ir} k_{js} = \sum_{j=1}^{j=m} c_{jr} k_{js},$$

wo

$$(5)\qquad c_{jr} = \sum_{i=1}^{i=m} b_{ij} k_{ir}$$

ist. Die Gleichung (4) zeigt, daß die Diskriminante A das nach Vertikalreihen gebildete Produkt der Matrices

$$(6)\qquad \left\| \begin{matrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{m1} & k_{m2} & \cdots & k_{mn} \end{matrix} \right\|$$

ist. Wenn $m < n$, so ist dieses Produkt null (§ 29). Läßt sich also eine quadratische Form auf eine geringere Zahl von Veränderlichen reduzieren, so ist ihre Diskriminante null. In kurzem werden wir sehen, daß, wenn die Diskriminante verschwindet, die quadratische Form reduzibel ist, und wir werden also das Theorem aussprechen können: Soll eine quadratische Form irreduzibel sein, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß ihre Diskriminante von Null verschieden ist.

80. Wenn $m = n$ ist, so wird $A = CK$, und die Gleichung (5) zeigt, daß man ebenso $C = BK$ hat. Es ist also $A = BK^2$, d. h. die linear transformierte einer quadratischen Form ist wieder eine quadratische Form, deren Diskriminante gleich ist der Diskriminante der ursprünglichen quadratischen Form, multipliziert mit dem Quadrat des Transformationsmoduls.

81. Der Rang der Diskriminante einer quadratischen Form stellt die Minimalzahl von Veränderlichen dar, auf welche sich die genannte quadratische Form reduzieren läßt. Nach der am Ende des § 43 gemachten Bemerkung kann man immer annehmen, daß die Hauptdeterminante von A unter den Hauptminoren von der Ordnung μ gewählt ist. Es sei

$$\delta = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\mu} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \cdots & a_{\mu\mu} \end{matrix} \right|$$

eine solche Determinante. Die Verträglichkeit der Gleichungen (1) und (2) erfordert (§ 53), daß

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\mu} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\mu} & u_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \dots & a_{\mu\mu} & u_\mu \\ u_1 & u_2 & \dots & u_\mu & U \end{vmatrix} = 0$$

ist. Daraus leitet man ab (§ 25)

$$U = \frac{1}{\delta} \sum_{i,j}^{\mu} a_{ij} u_i u_j,$$

wo a_{ij} das algebraische Komplement von a_{ij} in δ ist. Auf diese Weise sehen wir, daß U tatsächlich auf eine quadratische Form reduziert ist, die nur die Veränderlichen $u_1, u_2, \dots, u_\mu$ enthält. Dieselben sind voneinander unabhängig, weil $\delta \neq 0$ ist. Da ferner $1/\delta$ die Diskriminante der neuen quadratischen Form ist, so ist eine weitere Herabdrückung der Zahl der Veränderlichen unmöglich (§ 79). Diese letzte Behauptung kann man auch durch die Bemerkung beweisen, daß jeder Minor ν-ter Ordnung von A gleich dem Produkt zweier Matrices ist (§ 31), die man durch Auswahl gewisser ν Vertikalreihen aus den Matrices (6) erhält. Solange ν größer als m ist, sagt uns das Theorem von Binet, daß das Produkt der beiden Matrices null ist. Daraus folgt, daß alle Minoren von A verschwinden, deren Ordnung m übertrifft, und es muß daher $\mu \leqq m$ sein, d. h. es ist unmöglich die quadratische Form auf weniger als μ Veränderliche zu reduzieren.

82. Für die irreduziblen quadratischen Formen haben wir (§§ 77, 78) die Möglichkeit erkannt, von einer Form zu der reziproken Form überzugehen. Es ist aber leicht zu sehen, daß so etwas bei den reduziblen quadratischen Formen nicht geschehen kann. Vor allen Dingen bemerke man, daß im Falle $\mu < n - 1$ die reziproke Form gar nicht existiert. In der Tat sind dann die Minoren α_{ij} sämtlich gleich Null, da ihre Ordnung größer ist als μ. Die reziproke Form existiert, wenn $\mu = n - 1$ ist, aber der Rang ihrer Diskriminante ist (§ 36) gleich der Einheit. Die genannte Form läßt sich also (§ 81) auf ein einziges Quadrat reduzieren. Mit andern Worten: Die reziproke Form einer reduziblen quadratischen Form ist, wenn sie existiert, das Quadrat einer linearen Form. Dies läßt sich auch direkt beweisen. Zunächst bemerke man, daß wenigstens ein Hauptelement α_{rr} der reziproken Determinante von Null verschieden ist, weil sonst (§ 45) alle Elemente der reziproken Determinante null sein würden. Darauf schreibe man

$$\alpha_{rr} V = \sum_{i,j} \alpha_{rr} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i,j} \alpha_{ir} \alpha_{rj} x_i x_j$$

oder

$$\alpha_{rr} V = \sum_{i,j} \alpha_{ri} x_i \cdot \alpha_{rj} x_j = (\alpha_{r1} x_1 + \alpha_{r2} x_2 + \cdots + \alpha_{rn} x_n)^2.$$

Invariante Eigenschaften.

83. Invarianten. Es seien $a, b, c, \ldots$ die Koeffizienten einer algebraischen Form und $a', b', c', \ldots$ die analogen Koeffizienten einer durch lineare Transformation aus ihr entstandenen Form. Hat man immer, welches auch die angewandte lineare Transformation sein mag,

$$(7) \qquad \varphi(a', b', c', \ldots) = K^p \varphi(a, b, c, \ldots),$$

wo K der Modul der Transformation ist, so heißt der Ausdruck φ eine Invariante der gegebenen Form. Wenn $p = 0$ ist, so besteht zwischen den neuen Koeffizienten und denen der ursprünglichen Form eine von der benutzten Transformation unabhängige Beziehung, und die Invariante heißt eine absolute. In einem solchen Falle ist es im allgemeinen nicht möglich die gegebene Form in eine andere gleichfalls gegebene zu transformieren, da die neuen Koeffizienten $a', b', c', \ldots$ nicht beliebig gewählt werden können, sondern der Relation

$$(8) \qquad \varphi(a', b', c', \ldots) = \varphi(a, b, c, \ldots)$$

genügen müssen.

84. Dies vorausgeschickt ist es leicht zu ermitteln, ob es Formen gibt, die keine absoluten Invarianten besitzen. Wenn eine Form in n Veränderlichen ν Koeffizienten hat, so läßt sich einsehen, daß man im allgemeinen eine lineare Transformation finden kann, welche sie in eine andere gegebene Form verwandelt, vorausgesetzt, daß die Anzahl n^2 der Elemente der Transformation nicht kleiner ist als die der zu erfüllenden Bedingungen, welche gerade ν ist. Man erhält nämlich die genannten Bedingungen, indem man ausdrückt, daß die Koeffizienten der transformierten Form die a priori festgesetzten Werte $a', b', c', \ldots$ annehmen. Es muß daher (§ 55), wenn eine Beziehung wie (8) nicht besteht,

$$\frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+2}{3} \cdot \frac{n+3}{4} \cdots \frac{n+m-1}{m} < n$$

sein. Man bemerke, daß das Produkt der ersten beiden Faktoren

$$\tfrac{1}{6}(n+1)(n+2) = n + \tfrac{1}{6}(n-1)(n-2) > n$$

ist, wobei n als ganze Zahl und größer als 1 vorausgesetzt wird. Da die folgenden Faktoren sämtlich größer als die Einheit sind, so kann die betrachtete Relation nicht erfüllt sein für Werte von m, die größer als 3 sind. Es ist also $m = 2$ oder $m = 3$. Im ersten Falle kann n beliebig sein, im zweiten ist notwendig $n = 2$. Mit andern Worten: Eine Relation wie (8) kann nicht bestehen für die quadratischen Formen und für die binäre kubische Form. Dies sind also die Formen, welche keine absoluten Invarianten besitzen. Bei den andern Formen haben wir den Fall, daß ν größer als n^2 ist, und die Differenz $\nu - n^2$ stellt die Anzahl der absoluten Invarianten dar. Z. B. hat eine binäre Form vom Grade $m > 2$ gerade $m - 3$ absolute Invarianten, eine ternäre Form von demselben Grade hat deren $\frac{1}{2}(m+1)(m+2) - 9$ u. s. w.

85. Eine Form, die keine absolute Invariante besitzt, kann nicht mehr als eine gewöhnliche Invariante zulassen. In der Tat, wenn die Form die Invarianten φ und ψ zuließe, die bei linearer Transformation in $K^p\varphi$ und $K^q\psi$ übergehen, so ist klar, daß $\varphi^q\psi^{-p}$ in

$$(K^p\varphi)^q(K^q\psi)^{-p} = \varphi^q\psi^{-p}$$

übergehen und eine absolute Invariante sein würde.

86. Eine quadratische Form hat nur eine Invariante: es ist ihre Diskriminante. Wir haben bereits gezeigt (§ 79), daß die Diskriminante eine Invariante ist. Eine weitere Invariante kann es nicht geben, da (§ 85) die quadratischen Formen keine absoluten Invarianten zulassen (§ 84).

87. Aus demselben Grunde kann die kubische Form

$$a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3$$

nicht mehr als eine Invariante haben. Diese eine lautet, wie wir im folgenden sehen werden,

$$4(a_0a_2 - a_1^2)(a_1a_3 - a_2^2) - (a_0a_3 - a_1a_2)^2.$$

Übrigens zeigt eine direkte Rechnung ohne Schwierigkeit, daß nach einer linearen Transformation mit dem Modul K dieser Ausdruck nur den Faktor K^6 annimmt. Dagegen hat die binäre biquadratische Form

$$a_0x^4 + 4a_1x^3y + 6a_2x^2y^2 + 4a_3xy^3 + a_4y^4$$

außer der Invariante

$$I = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2,$$

welche bei linearer Transformation in $K^4 I$ übergeht, noch die Invariante

$$J = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_0 a_3^2 - a_4 a_1^2,$$

welche in $K^6 J$ übergeht. Die einzige absolute Invariante der betrachteten Form wird also (§ 85) ausgedrückt durch den Quotienten von I^3 durch J^2.

88. Anstatt einer einzigen Form können wir ein System von Formen betrachten und die Invariante wie vorhin (§ 83) definieren, indem wir sie uns durch die Koeffizienten aller Formen des Systems ausgedrückt denken. Z. B. ist die Determinante eines Systems von n linearen Formen mit n Veränderlichen eine Invariante, da sie (§ 66) der Gleichung (7) für $p = 1$ genügt. Wenn man eine Invariante einer Form kennt, so lassen sich daraus leicht Invarianten eines aus mehreren ähnlichen Formen bestehenden Systems ableiten. Wir wollen uns auf den Fall zweier quadratischer Formen beschränken, machen aber darauf aufmerksam, daß die folgende Methode auf eine beliebige Zahl von Formen anwendbar ist. Nehmen wir an, daß eine lineare Transformation

$$\Sigma a_{ij} x_i x_j, \qquad \Sigma b_{ij} x_i x_j$$

bezüglich in

$$\Sigma a'_{ij} x_i x_j, \qquad \Sigma b'_{ij} x_i x_j$$

überführt. Es ist klar, daß dieselbe Transformation

$$\Sigma (a_{ij} + \lambda b_{ij}) x_i x_j \quad \text{in} \quad \Sigma (a'_{ij} + \lambda b'_{ij}) x_i x_j$$

verwandeln wird, wo λ eine willkürliche Größe ist. Wenn K der Modul der Transformation ist, so muß (§ 80)

$$\begin{vmatrix} a'_{11} + \lambda b'_{11} & a'_{12} + \lambda b'_{12} & \dots & a'_{1n} + \lambda b'_{1n} \\ a'_{21} + \lambda b'_{21} & a'_{22} + \lambda b'_{22} & \dots & a'_{2n} + \lambda b'_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{n1} + \lambda_n b'_1 & a'_{n2} + \lambda b'_{n2} & \dots & a'_{nn} + \lambda b'_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= K^2 \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda b_{11} & a_{12} + \lambda b_{12} & \dots & a_{1n} + \lambda b_{1n} \\ a_{21} + \lambda b_{21} & a_{22} + \lambda b_{22} & \dots & a_{2n} + \lambda b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} + \lambda b_{n1} & a_{n2} + \lambda b_{n2} & \dots & a_{nn} + \lambda b_{nn} \end{vmatrix}$$

sein. Jede Seite läßt sich (§ 17) in ein Polynom vom Grade n in λ entwickeln. Z. B. läßt sich die Determinante auf der rechten Seite so schreiben:

$$\varphi_0 + \lambda \varphi_1 + \lambda^2 \varphi_2 + \dots + \lambda^n \varphi_n.$$

Bezeichnet man mit φ_ν' das, was aus φ_ν wird, wenn man die Koeffizienten der ursprünglichen Formen durch die der transformierten ersetzt, so hat man

$$\varphi_0' + \lambda\varphi_1' + \cdots + \lambda^n\varphi_n' = K^2(\varphi_0 + \lambda\varphi_1 + \cdots + \lambda^n\varphi_n),$$

welches auch der Wert von λ sein mag. Es ist also

$$\varphi_\nu' = K^2\varphi_\nu, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

und $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sind daher Invarianten des betrachteten Systems. Man beachte, daß φ_0 und φ_n bezüglich mit A und B identisch sind. Die neu erhaltenen Invarianten sind $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$, und man hat z. B.

$$\varphi_1 = \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & b_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

u. s. w. Man bemerke, daß jedes dieser φ als eine partielle Invariante einer einzigen Form betrachtet werden kann, und zwar für alle Transformationen, welche die andere Form ungeändert lassen.

89. Orthogonale Invarianten. Verlangt man, daß $\varphi(a, b, c, \ldots)$ eine Invariante sei nicht für alle möglichen linearen Transformationen, sondern nur für diejenigen, welche orthogonal (§ 68) sind, so erhält man die orthogonalen Invarianten, die offenbar zahlreicher sind als die bisher betrachteten allgemeinen Invarianten. So hat eine quadratische Form U in n Veränderlichen außer der Diskriminante $n-1$ andere orthogonale Invarianten, mit deren Aufsuchung wir uns hier beschäftigen wollen. Nach der am Schluß des vorigen Paragraphen gemachten Bemerkung ist eine orthogonale Invariante von U jede simultane Invariante von U und der Form $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. Nach dem in demselben Paragraphen Gesagten sind also orthogonale Invarianten von U die Koeffizienten $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, (\varphi_n = 1)$ der Potenzen von λ in der Entwickelung von

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}+\lambda \end{vmatrix}.$$

An einer früheren Stelle (§ 27, i) haben wir gesehen, daß φ_ν die Summe aller Hauptminoren $(n-\nu)$-ter Ordnung von A ist. Es gilt also der Satz: Die Summe aller Hauptminoren gleicher Ordnung in der Diskriminante einer quadratischen Form ist eine orthogonale Invariante dieser Form.

90. Übungsbeispiele. a) Die orthogonalen Invarianten der ternären quadratischen Form

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy$$

zu bilden. Die Diskriminante

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$$

hat als Hauptminoren außer a, b, c

$$\begin{vmatrix} b & f \\ f & c \end{vmatrix} = bc - f^2, \quad \begin{vmatrix} c & g \\ g & a \end{vmatrix} = ca - g^2, \quad \begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix} = ab - h^2.$$

Die gesuchten orthogonalen Invarianten sind also

$$a + b + c, \quad bc + ca + ab - f^2 - g^2 - h^2.$$

b) Eine Invariante des Systems von zwei ternären quadratischen Formen zu finden. Diese seien die Form des vorigen Übungsbeispiels und die folgende

$$a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + 2f'yz + 2g'zx + 2h'xy.$$

Die gesuchte Invariante ist

$$\begin{vmatrix} a' & h & g \\ h' & b & f \\ g' & f & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & h' & g \\ h & b' & f \\ g & f' & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & h & g' \\ h & b & f' \\ g & f & c' \end{vmatrix}$$

oder, wenn man entwickelt,

$$bca' + cab' + abc' - (a'f^2 + b'g^2 + c'h^2)$$
$$+ 2(ghf' + hfg' + fgh') - 2(aff' + bgg' + chh').$$

Kanonische Darstellung algebraischer Formen.

91. Wenn eine Form bei linearer Transformation die einfachste Gestalt annimmt, deren sie fähig ist, so sagt man, sie sei auf einen kanonischen Ausdruck reduziert. Übrigens ist die Wahl eines solchen Ausdrucks durchaus Sache der Übereinkunft, aber doch nicht willkürlich. So z. B. läßt sich die binäre kubische Form

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dx^3$$

durch eine lineare Transformation auf den Ausdruck $x^3 + y^3$ reduzieren. Man braucht nämlich nur $x = \alpha x' + \beta y'$, $y = \gamma x' + \delta y'$ zu setzen und die vier Unbekannten α, β, γ, δ so zu bestimmen, daß die vier Koeffizienten der neuen Form gleich den entsprechenden in $x^3 + y^3$ werden. Diese Form kann man also als kanonischen Ausdruck der betrachteten kubischen Form annehmen. Dagegen ist es nicht möglich $x^3 + y^3 + z^3$ als kanonischen Ausdruck der ternären kubischen Formen zu wählen; denn die Anzahl der zu bestimmenden Größen wäre neun, während die Zahl der Bedingungen, denen sie genügen müssen, gleich der Anzahl der Koeffizienten der Form, d. h. gleich zehn ist. Aus diesem Grunde pflegt man eine zehnte Unbestimmte k einzuführen und als kanonischen Ausdruck $x^3 + y^3 + z^3 + 6kxyz$ anzunehmen. Es ist wohl zu beachten, daß diese Reduktionen in speziellen Fällen versagen können. Es gibt z. B. binäre kubische Formen, die nicht auf $x^3 + y^3$ reduzierbar sind, dafür aber auf xy^2.

92. Als kanonischen Ausdruck der quadratischen Formen pflegt man anzunehmen

$$U = \alpha_1 y_1^{\,2} + \alpha_2 y_2^{\,2} + \cdots + \alpha_n y_n^{\,2}, \tag{9}$$

wo die α konstante Größen und die y lineare Formen in den ursprünglichen Veränderlichen x sind. Die Reduktion einer quadratischen Form auf einen solchen kanonischen Ausdruck ist auf unendlich viele Weisen möglich, da die n^2 Elemente der unbekannten Transformation

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = k_{11} y_1 + k_{12} y_2 + \cdots + k_{1n} y_n, \\ x_2 = k_{21} y_1 + k_{22} y_2 + \cdots + k_{2n} y_n, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n = k_{n1} y_1 + k_{n2} y_2 + \cdots + k_{nn} y_n \end{array}\right. \tag{10}$$

nur $\frac{1}{2} n(n-1)$ Bedingungen genügen müssen. In der Tat, um U mit Hilfe der Transformation (10) auf den Ausdruck (9) zu reduzieren, muß man die Elemente k_{ij} derart bestimmen, daß in der transformierten quadratischen Form $a_{ij} = 0$ ist für $i \neq j$. Die Transformation wird aber vollkommen bestimmt, wenn man verlangt, daß sie orthogonal sei. Sie muß alsdann (§ 73) wegen der Orthogonalität $\frac{1}{2} n(n+1)$ Bedingungen genügen und weiteren $\frac{1}{2} n(n-1)$, damit die transformierte Form die Gestalt (9) habe. Die Gesamtzahl der Bedingungen ist also gleich

$$\tfrac{1}{2} n(n+1) + \tfrac{1}{2} n(n-1) = n^2$$

oder gleich der Anzahl der zu bestimmenden Elemente. Wir wollen uns mit dieser Bestimmung beschäftigen.

93. Denken wir uns, daß man von der Form (9) zu der ursprünglichen Form zurückkehrt mit Hilfe der inversen Transformation von (10), welche wegen der Orthogonalität (§ 72) durch die Formeln

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = k_{11} x_1 + k_{21} x_2 + \cdots + k_{n1} x_n, \\ y_2 = k_{12} x_1 + k_{22} x_2 + \cdots + k_{n2} x_n, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_n = k_{1n} x_1 + k_{2n} x_2 + \cdots + k_{nn} x_n \end{array}\right.$$

definiert ist. Die Form (9) wird

$$U = \sum_{r=1}^{r=n} \alpha_r (k_{1r} x_1 + k_{2r} x_2 + \cdots + k_{nr} x_n)^2 .$$

Durch Identifizierung mit dem ursprünglichen Ausdruck von U ergibt sich

$$a_{ij} = \sum_{r=1}^{r=n} \alpha_r k_{ir} k_{jr},$$

d. h. für $j = 1, 2, 3, \ldots, n$

$$\left\{\begin{array}{l} a_{i1} = \alpha_1 k_{i1} k_{11} + \alpha_2 k_{i2} k_{12} + \cdots + \alpha_n k_{in} k_{1n}, \\ a_{i2} = \alpha_1 k_{i1} k_{21} + \alpha_2 k_{i2} k_{22} + \cdots + \alpha_n k_{in} k_{2n}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{in} = \alpha_1 k_{i1} k_{n1} + \alpha_2 k_{i2} k_{n2} + \cdots + \alpha_n k_{in} k_{nn}. \end{array}\right.$$

Betrachtet man $\alpha_1 k_{i1}, \alpha_2 k_{i2}, \ldots, \alpha_n k_{in}$ als Unbekannte, so gibt die Cramersche Regel

$$K \alpha_j k_{ij} = a_{i1} \varkappa_{1j} + a_{i2} \varkappa_{2j} + \cdots + a_{in} \varkappa_{nj}.$$

Daraus folgt auf Grund bekannter Eigenschaften (§ 70)

$$\alpha_j k_{ij} = a_{i1} k_{1j} + a_{i2} k_{2j} + \cdots + a_{in} k_{nj}.$$

Setzt man jetzt $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, so erhält man das System

$$(11) \quad \left\{\begin{array}{llll} (a_{11} - \alpha_j) k_{1j} + & a_{12} k_{2j} + \cdots + & a_{1n} k_{nj} = 0, \\ a_{21} k_{1j} + & (a_{22} - \alpha_j) k_{2j} + \cdots + & a_{2n} k_{nj} = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} k_{1j} + & a_{n2} k_{2j} + \cdots + & (a_{nn} - \alpha_j) k_{nj} = 0, \end{array}\right.$$

welches sich als ein System von n linearen homogenen Gleichungen mit n Unbekannten betrachten läßt. Soll es möglich sein, für die Unbekannten $k_{1j}, k_{2j}, \ldots, k_{nj}$ Werte zu finden, die nicht sämtlich verschwinden, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß die Determinante des Systems:

$$(12) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} - \alpha_j & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \alpha_j & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \alpha_j \end{vmatrix}$$

verschwindet. Folglich sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ die n Wurzeln der Gleichung

$$(13)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-x \end{vmatrix} = 0$$

und haben daher (§ 33, d) reelle Werte. Übrigens gelangt man zu diesem letzten Resultat in direkter Weise durch Betrachtung der quadratischen Form $U - \alpha(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$, welche sich in $(\alpha_1 - \alpha)y_1^2 + (\alpha_2 - \alpha)y_2^2 + \cdots + (\alpha_n - \alpha)y_n^2$ transformieren muß und sich daher für $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ auf weniger als n Veränderliche reduziert. Daraus folgt (§ 79), daß ihre Diskriminante für diese Werte von α verschwinden muß.

94. Es ist nunmehr leicht die Elemente der Transformation zu bestimmen, indem man von den Systemen (11) Gebrauch macht, in welchen die α als bekannte Größen zu betrachten sind. Nehmen wir dasjenige System (11), welches einem gegebenen Werte von j entspricht, so wissen wir, daß die Unbekannten den algebraischen Komplementen der Elemente einer Reihe proportional sind (§ 59) oder den Quadratwurzeln der algebraischen Komplemente der Hauptelemente (§ 45), wenn wir beachten, daß die Determinante des Systems symmetrisch ist. Wenn a_{ij} das algebraische Komplement von $a_{ii} - \alpha_j$ in der Determinante (12) ist, so hat man für jeden Wert von j

$$\frac{k_{1j}}{\sqrt{a_{1j}}} = \frac{k_{2j}}{\sqrt{a_{2j}}} = \cdots = \frac{k_{nj}}{\sqrt{a_{nj}}} = \frac{1}{\sqrt{a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{nj}}},$$

wenn man berücksichtigt, daß $k_{1j}^2 + k_{2j}^2 + \cdots + k_{nj}^2 = 1$ ist. Es wird also

$$k_{ij} = \sqrt{\frac{a_{ij}}{a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{nj}}}.$$

95. Beachtet man, daß die Diskriminante der Form (9) $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n$ ist, und daß sie daher von Null verschieden ist, wenn kein Koeffizient α verschwindet, so sieht man sofort, daß jeder kanonische Ausdruck an sich irreducibel ist. Die in den beiden vorigen Paragraphen auseinandergesetzte Methode hat den Vorzug, auch auf die reduziblen quadratischen Formen anwendbar zu sein, und erlaubt daher die Reduktion einer gegebenen quadratischen Form auf die kleinste Zahl von Veränderlichen auszuführen. Tatsächlich kann man (§ 27, i) der Gleichung (13) die Form geben

$$A - x\sigma_{n-1} + x^2\sigma_{n-2} - \cdots \mp x^{n-1}\sigma_1 \pm x^n = 0,$$

wenn man mit σ_ν die Summe aller Hauptminoren von A bezeichnet, welche die Ordnung ν haben. Diese Minoren sind alle null, wenn ihre Ordnung den Rang μ der Diskriminante übertrifft. Wenn also die quadratische Form reduzibel ist, so wird die letzte Gleichung

$$(\sigma_\mu - x\sigma_{\mu-1} + x^2\sigma_{\mu-2} - \cdots \mp x^{\mu-1}\sigma_1 \pm x^\mu)\, x^{n-\mu} = 0.$$

Dieselbe besitzt $n - \mu$ verschwindende Wurzeln, und in dem kanonischen Ausdruck (9) bleiben daher nur μ Glieder bestehen, d. h. die quadratische Form ist auf die kleinste Zahl von Veränderlichen (§ 81) reduziert.

96. Wir wollen ein anderes interessantes Verfahren zur Reduktion einer quadratischen Form auf einen kanonischen Ausdruck auseinandersetzen und gehen dabei von der Bemerkung aus, daß die Transformation

$$(14)\qquad \left|\begin{array}{l} y_1 = x_1 + k_{12}x_2 + k_{13}x_3 + \cdots + k_{1n}x_n, \\ y_2 = \qquad\quad x_2 + k_{23}x_3 + \cdots + k_{2n}x_n, \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ y_n = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x_n \end{array}\right.$$

ebenso viele unbestimmte Größen enthält, als bei der genannten Reduktion Bedingungen zu erfüllen sind, d. h. $\frac{1}{2}n(n-1)$. Setzen wir $x_{\nu+1} = x_{\nu+2} = \cdots = x_n = 0$. Dies bedeutet eine Beschränkung der Form auf nur ν Veränderliche, und andererseits sieht man, daß die Transformation (14), wenn in ihr ν statt n gesetzt wird, gerade diejenige ist, welche den kanonischen Ausdruck $\alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \cdots + \alpha_\nu y_\nu^2$ in die so beschränkte Form überführt; denn $y_{\nu+1}, y_{\nu+2}, \ldots, y_n$ verschwinden gleichzeitig mit den entsprechenden x. Die Diskriminante jenes Ausdrucks ist $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu$, die der Form, in welche er übergeht,

$$(15)\qquad A_\nu = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \cdots & a_{\nu\nu} \end{vmatrix},$$

und die Transformation (14) ist offenbar unimodular. Folglich ist (§ 79)

$$A_\nu = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_\nu,$$

woraus sich unter der Voraussetzung, daß die Determinanten $A_1, A_2, \ldots$ von Null verschieden sind, ergibt

$$\alpha_1 = A_1, \quad \alpha_2 = \frac{A_2}{A_1}, \quad \alpha_3 = \frac{A_3}{A_2}, \quad \ldots, \quad \alpha_n = \frac{A}{A_{n-1}}.$$

Wir sehen also, daß die betrachtete quadratische Form auf den kanonischen Ausdruck

$$(16)\qquad A_1 y_1^2 + \frac{A_2}{A_1} y_2^2 + \frac{A_3}{A_2} y_3^2 + \cdots + \frac{A}{A_{n-1}} y_n^2$$

reduzierbar ist, wo die A_ν die Bedeutung (15) haben. Praktisch läßt sich diese Reduktion in der Weise ausführen, daß man eine der Veränderlichen durch Abtrennung eines Ausdrucks zu isolieren sucht, der das Quadrat einer linearen Form ist. Läßt man z. B. zu, daß nicht $a_{11} = 0$ ist, so sieht man sofort, daß in $a_{11} U$ die Glieder, welche x_1 enthalten, zu dem Quadrat von $a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \cdots$ gehören. Setzt man also

$$y_1 = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 + \cdots,$$

so wird $U = \alpha_1 y_1^2 + U'$, wo U' eine quadratische Form in den übrig bleibenden Veränderlichen $x_2, x_3, \ldots$ ist. Nimmt man an, daß $a_{11} a_{22} - a^2_{12}$ nicht null ist, so kann man in analoger Weise in U' die Veränderliche x_2 isolieren. Wird

$$y_2 = x_2 + \frac{a_{11} a_{23} - a_{12} a_{13}}{a_{11} a_{22} - a^2_{12}} x_3 + \frac{a_{11} a_{24} - a_{12} a_{14}}{a_{11} a_{22} - a^2_{12}} x_4 + \cdots$$

gesetzt, so findet man $U' = \alpha_2 y_2^2 + U''$, wo $U'' = \alpha_3 x_3^2 + \cdots$ ist, u. s. w. Wenn es auf diesem Wege gelingen soll U auf die Form (9) zu bringen, so müssen, wie man sieht, die Veränderlichen in geeigneter Anordnung betrachtet werden, um in der Reihe $A_1, A_2, A_3, \ldots$ verschwindende Glieder zu vermeiden. Dies ist nicht immer möglich.

97. Trägheitsgesetz. Wir haben bereits bemerkt (§ 92), daß es für eine quadratische Form mit n Veränderlichen kanonische Ausdrücke in $\frac{1}{2} n(n+1)$-fach unendlicher Anzahl gibt. Es ist aber bemerkenswert, daß alle eine gemeinsame Eigenschaft genießen, die von großer Wichtigkeit ist und die Sylvester angegeben hat. Wir meinen das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ und $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ seien die Koeffizienten von zwei kanonischen Ausdrücken einer und derselben Form, so daß man für alle Systeme von Werten der x oder der y

$$(17)\qquad \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2 = \beta_1 y_1^2 + \beta_2 y_2^2 + \cdots + \beta_n y_n^2$$

hat. Man nehme als unabhängige Veränderliche die x an, während sich die y linear durch die x ausdrücken. Auf den beiden Seiten von (17) gebe es μ bezw. ν negative Koeffizienten, und es werde angenommen $\mu < \nu$. Den μ Veränderlichen x, welche auf der linken Seite negative Koeffizienten haben, erteilen wir den Wert 0. Es bleiben übrig $n - \mu$ Veränderliche, welche man immer derart bestimmen kann, daß sich auf der rechten Seite von (17) diejenigen Veränderlichen y auf Null reduzieren, welche positive Koeffizienten haben. Die Anzahl dieser letzten Veränderlichen ist in der Tat

$n - \nu < n - \mu$, und die genannte Bestimmung läßt sich daher (§ 57) auf unendlich viele Weisen ausführen. Wenn $\mu > \nu$ wäre, so würden wir durch dasselbe Verfahren die positiven Glieder auf der linken und die negativen auf der rechten Seite zum Verschwinden bringen. Wäre also μ von ν verschieden, so gäbe es unendlich viele Wertsysteme der Veränderlichen, für welche die Identität (17) sich auf die absurde Gleichheit zwischen einer wesentlich positiven und einer andern, wesentlich negativen Größe reduzierte. Es ist deshalb notwendig $\mu = \nu$. Mit andern Worten: In den unendlich vielen kanonischen Ausdrücken einer gegebenen quadratischen Form ist die Anzahl der mit einem und demselben Zeichen behafteten Quadrate konstant. Hierbei ist immer stillschweigend vorausgesetzt, daß es sich um Formen und Transformationen mit reellen Koeffizienten handelt.

98. Es folgt unmittelbar aus dem Trägheitsgesetz, daß es, um die Vorzeichen der Quadrate in den kanonischen Ausdrücken einer gegebenen quadratischen Form kennen zu lernen, genügt diese Vorzeichen in einem einzigen kanonischen Ausdruck zu beobachten, z. B. in (16). Offenbar hat α_ν das Zeichen $+$ oder das Zeichen $-$, je nachdem $A_{\nu-1}$ und A_ν dasselbe Zeichen oder entgegengesetzte Zeichen haben. Daraus ergibt sich: Die Anzahl der negativen Glieder in jedem kanonischen Ausdruck einer quadratischen Form ist gleich der Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe $1, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A$. Diese Aussage setzt wesentlich voraus, daß kein Glied der Reihe null ist. Wir wollen jedoch unter Beschränkung auf den Fall, wo ein Glied A_ν null ist, während die Nachbarglieder $A_{\nu-1}$ und $A_{\nu+1}$ es nicht sein sollen, beweisen, daß das Theorem bestehen bleibt unter der Bedingung, daß man A_ν unterdrückt. Zunächst bemerken wir, daß $A_{\nu-1}$ und $A_{\nu+1}$ entgegengesetzte Zeichen haben, da (§ 25) aus

$$A_{\nu+1} = -\sum_{i,j}^{\nu} a_{ij}\, a_{i,\nu+1}\, a_{\nu+1,j}$$

durch Multiplikation mit $A_{\nu-1} = a_{\nu\nu}$ folgt (§ 36)

$$A_{\nu-1} A_{\nu+1} = -\sum_{i,j}^{\nu} a_{i\nu}\, a_{\nu j}\, a_{i,\nu+1}\, a_{\nu+1,j} = -\sum_{i,j}^{\nu} a_{i\nu}\, a_{i,\nu+1} \cdot a_{j\nu}\, a_{j,\nu+1}$$

oder

$$A_{\nu-1} A_{\nu+1} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,\nu-1} & a_{1,\nu+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,\nu-1} & a_{2,\nu+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \cdots & a_{\nu,\nu-1} & a_{\nu,\nu+1} \end{vmatrix}^2 .$$

Nun betrachte man anstatt der Form U eine andere U', die man erhält, indem man α von den Hauptelementen der Diskriminante von U subtrahiert. Denkt man sich U und U' mit Hilfe des Verfahrens in § 93 auf kanonischen Ausdruck gebracht, so hat man

$$U' = (\alpha_1 - \alpha)\, y_1^{\,2} + (\alpha_2 - \alpha)\, y_2^{\,2} + \cdots + (\alpha_n - \alpha)\, y_n^{\,2},$$

und es ist klar, daß man α dem absoluten Betrage nach hinreichend klein wählen kann, damit die entsprechenden Glieder in den beiden kanonischen Ausdrücken dieselben Vorzeichen haben. Es genügt, wenn α zwischen der größten negativen Wurzel und der kleinsten positiven Wurzel der Gleichung (13) enthalten ist. Um die Zahl der mit negativem Vorzeichen behafteten Quadrate in den kanonischen Ausdrücken von U zu bestimmen, können wir jetzt auf Grund des Trägheitsgesetzes diese Form durch U' ersetzen. Da ferner die Subtraktion der (dem absoluten Betrage nach beliebig kleinen) Größe α von den Hauptelementen der Diskriminante von U in $A_1, A_2, \ldots$ Änderungen hervorruft, die so klein gemacht werden können als man will, so ist leicht einzusehen, daß für ein hinreichend kleines α^2 diejenigen unter den genannten Größen, welche nicht null sind, ihr Zeichen bewahren, während es sich so einrichten läßt, daß die verschwindenden aufhören zu verschwinden. Es behalten also $A_{\nu-1}$ und $A_{\nu+1}$, während sie zu $A'_{\nu-1}$ und $A'_{\nu+1}$ werden, entgegengesetzte Vorzeichen und der beim Übergange von $A_{\nu-1}$ zu $A_{\nu+1}$ beobachtete Zeichenwechsel ist also auch in der Reihe $A'_{\nu-1}, A'_\nu, A'_{\nu+1}$ zu bemerken, **welches auch das Vorzeichen von A'_ν sein mag.**

99. Beispiele. a) Wenn a und $ab - h^2$ nicht null sind, so kann man durch das in § 96 angegebene Verfahren die quadratische Form

$$U = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy$$

auf folgende Gestalt bringen:

$$U = a\left(x + \frac{h}{a}y + \frac{g}{a}z\right)^2 + \frac{ab - h^2}{a}\left(y + \frac{af - gh}{ab - h^2}z\right)^2$$
$$+ \frac{abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2}{ab - h^2}z^2.$$

Diese Identität hat gar keinen Sinn mehr, noch auch ist es möglich, durch ein analoges Verfahren eine andere an ihre Stelle setzen, wenn a, b, c oder auch b, c, g, h null sind. Man muß alsdann auf das in § 93 auseinandergesetzte Verfahren zurückgreifen, welches immer zum Ziele führt.

b) So findet man z. B., wenn die quadratische Form $U = yz + zx + xy$ gegeben ist,

$$U = \tfrac{1}{3}(x + y + z)^2 - \tfrac{1}{4}(x - y)^2 - \tfrac{1}{12}(x + y - 2z)^2.$$

Auf diese quadratische Form ist das zweite Verfahren nicht anwendbar, da die Reihe

$$1,\ A_1 = 0,\ A_2 = -\tfrac{1}{4},\ A = \tfrac{1}{4}$$

einen verschwindenden Term enthält. Da jedoch die Zeichen der nicht verschwindenden Glieder $+ - +$ sind und, wie man sieht, zwei Wechsel aufweisen, so kann man sicher sein, daß zwei die Anzahl der negativen Glieder in jedem kanonischen Ausdruck von U ist. Dies kann man verifizieren, indem man U durch die quadratische Form

$$U' = U - \alpha(x^2 + y^2 + z^2)$$

ersetzt, welche für ein zwischen $-\frac{1}{2}$ und 1 (diese ausgeschlossen) enthaltenes α in ihren kanonischen Ausdrücken ebenso viele negative Glieder aufweisen muß als es deren in U gibt. Und in der Tat findet man mit Hilfe des ersten Verfahrens

$$U' = \frac{1-\alpha}{3}(x + y + z)^2 - \frac{1+2\alpha}{4}(x - y)^2 - \frac{1+2\alpha}{12}(x + y - 2z)^2.$$

Mit Hilfe des zweiten erhält man

$$U' = -\alpha\left(x - \frac{y+z}{2\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{4\alpha} - \alpha\right)\left(y + \frac{z}{1-2\alpha}\right)^2 - \left(\frac{1}{1-2\alpha} + \alpha\right)z^2$$

und sieht, daß man außerdem nur $\alpha < \frac{1}{2}$ vorauszusetzen braucht, damit in der Reihe

$$1,\ A_1' = -\alpha,\ A_2' = -\tfrac{1}{4} + \alpha^2,\ A' = (1-\alpha)(\tfrac{1}{2} + \alpha)^2$$

die nicht verschwindenden Glieder dieselben Zeichen haben, die sie bei U hatten, während das verschwindende Glied ein Zeichen annimmt, welches keinen Einfluß auf die Anzahl der Zeichenwechsel hat; denn die Zeichen $+ \pm -$ der drei ersten Glieder bieten immer einen einzigen Wechsel. Endlich bemerke man, daß man für $\alpha = \frac{1}{2}$ hat $A_2' = 0$, daß aber die Zeichen $+ - +$ der nicht verschwindenden Glieder in der Reihe der A' immer noch zwei Wechsel aufweisen.

c) Kehren wir zurück zu der allgemeinen ternären quadratischen Form U, um auf sie das in § 98 aufgestellte Kriterium anzuwenden. Wenn wenigstens einer der Koeffizienten a, b, c von Null verschieden ist, so kann man immer annehmen, daß z. B. $a > 0$ ist. Alsdann ist die quadratische Form auf den Ausdruck $x^2 + y^2 - z^2$ reduzierbar, wenn ihre Diskriminante negativ, und auf $x^2 + y^2 + z^2$ oder auf $x^2 - y^2 - z^2$, wenn bei positiver Diskriminante bezüglich $ab > h^2$ oder $ab < h^2$ ist. Man bemerke, daß im zweiten Falle, d. h. wenn A positiv ist, $ab - h^2$ und $ac - g^2$ beide positiv oder beide negativ sind auf Grund der Identität

$$Aa = (ab - h^2)(ac - g^2) - (af - gh)^2.$$

Wenn daher $ab - h^2$ positiv ist, so sind b und c ebenfalls positiv wie a. Sind ferner a, b, c null, so ist die quadratische Form reduzierbar auf $x^2 - y^2 - z^2$ oder auf $x^2 + y^2 - z^2$, je nachdem A positiv oder negativ ist.

100. In den Anwendungen hat man oft wesentlich positive quadratische Formen zu betrachten. Sie haben die Eigenschaft, für jedes System nicht sämtlich verschwindender Werte, die man den Veränderlichen erteilt, einen positiven Wert anzunehmen. Eine solche

Form darf keine negativen Quadrate in ihren kanonischen Ausdrücken zulassen. Sonst würde man ihr durch Nullsetzen derjenigen Veränderlichen, deren Quadrate das positive Vorzeichen haben, negative Werte erteilen können. Es ist also notwendig, daß die Determinanten A_1, $A_2, \ldots, A$ sämtlich positiv sind, und dies ist hinreichend, damit die quadratische Form gezwungen sei immer positiv zu bleiben. Wir können deshalb das folgende äußerst wichtige Theorem aussprechen: Damit die irreduzible quadratische Form

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots$$

wesentlich positiv sei, sind notwendig und hinreichend die Bedingungen

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Soll dagegen die quadratische Form wesentlich negativ sein, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß die Werte derselben Determinanten abwechselnde Vorzeichen haben von der ersten a_{11} beginnend, welche negativ sein muß. Die in § 98 gelassenen Lücken können Zweifel in Betreff der Gültigkeit der obigen Schlüsse entstehen lassen für den Fall, daß die Reihe $A_1, A_2, \ldots$ verschwindende Glieder enthält. Es läßt sich aber leicht direkt konstatieren, daß in einem solchen Falle die quadratische Form nicht ein konstantes Zeichen bewahren kann. In der Tat, wenn $a_{11} = 0$ wäre, so würde man der quadratischen Form die Gestalt $U = \alpha x_1 + \beta$ geben können, wo α und β unabhängig von x_1 sind. Werden also die Werte der übrigen Veränderlichen beliebig fixiert, jedoch so, daß nicht $\alpha = 0$ wird, so ist klar, daß man noch die Freiheit hat, x_1 derart zu fixieren, daß U einen beliebigen Wert annimmt. Wenn ferner nicht $a_{11} = 0$ ist, so sei A_ν das erste verschwindende Glied in der Reihe $A_2, A_3, \ldots$, und man bemerke, daß es wegen $A_{\nu-1} \neq 0$ stets möglich ist, für $x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}$ Werte zu finden, die sich von x_ν nur um konstante Faktoren unterscheiden und so beschaffen sind, daß

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{i\nu}x_\nu = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, \nu)$$

wird. Bezeichnet man also mit β den Inbegriff derjenigen Glieder von U, welche die ν ersten Veränderlichen nicht enthalten, so wird

$$U = \beta + 2\sum_{i=1}^{i=\nu} (a_{i,\nu+1}x_{\nu+1} + a_{i,\nu+2}x_{\nu+2} + \cdots + a_{in}x_n)x_i,$$

mithin $U = \alpha x_\nu + \beta$, nachdem man

$$\alpha = \frac{2}{A_{\nu-1}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,\nu-1} & a_{1,\nu+1}x_{\nu+1} + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,\nu-1} & a_{2,\nu+1}x_{\nu+1} + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \cdots & a_{\nu,\nu-1} & a_{\nu,\nu+1}x_{\nu+1} + \cdots + a_{\nu n}x_n \end{vmatrix}$$

gesetzt hat. Auch α hängt, wie man sieht, nur von $x_{\nu+1}, x_{\nu+2}, \ldots, x_n$ ab. Erteilt man daher diesen Veränderlichen willkürliche Werte, indem man vermeidet, daß $\alpha = 0$ wird, so kann man dann noch immer für x_ν einen positiven oder negativen Wert angeben, der dem absoluten Betrage nach groß genug ist, damit U nach Belieben einen positiven oder einen negativen Wert annimmt. Es bleibt uns nur noch übrig ein Bedenken zu beseitigen, daß nämlich α identisch verschwinden könnte. In diesem Falle hätte man

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,\nu-1} & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,\nu-1} & a_{2i} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \cdots & a_{\nu,\nu-1} & a_{\nu i} \end{vmatrix} = 0$$

für $i = \nu, \nu + 1, \ldots, n$. Es würden also (§ 63) alle in den ν ersten Horizontalreihen von A enthaltenen Minoren null sein, und man hätte daher (§ 22) $A = 0$ gegen die Voraussetzung, daß die quadratische Form U nicht reduzibel ist.

101. Wir wollen uns jetzt von den quadratischen Formen etwas entfernen und dieses erste Buch schließen mit einigen Andeutungen über die Reduktion der binären Formen auf einen kanonischen Ausdruck. Man versuche die Form

$$(18) \qquad a_0 x^m + \frac{m}{1} a_1 x^{m-1} y + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} y^2 + \cdots + a_m y^m$$

in eine Summe m-ter Potenzen

$$(19) \qquad \alpha_1 (x + k_1 y)^m + \alpha_2 (x + k_2 y)^m + \cdots + \alpha_r (x + k_r y)^m$$

zu transformieren, deren Anzahl r möglichst klein ist. Wenn man versucht (18) mit (19) zu identifizieren, so erhält man $m + 1$ Bedingungen, während $2r$ die Anzahl der in dem Ausdruck (19) enthaltenen Unbestimmten ist. Um sie bestimmen zu können, ist es im allgemeinen notwendig, daß $2r \geqq m + 1$ ist, und es muß daher r gleich der kleinsten ganzen Zahl gewählt werden, die nicht von $\frac{1}{2}(m + 1)$ übertroffen wird. Für $m = 2n - 2$ wird $r = n$, und man hat $2n - 1$ Bedingungen für $2n$ Unbestimmte. Daraus folgt, daß die binären Formen von gerader Ordnung in unendlich vielen Weisen auf einen Ausdruck wie (19) reduzierbar sind. Dagegen wird, wenn $m = 2n - 1$ ist, $r = n$, und man hat $2n$ Bedingungen für $2n$ Unbestimmte. Es sei

$$\begin{aligned} & a_0 x^{2n-1} + (2n-1) a_1 x^{2n-2} y + \cdots + a_{2n-1} y^{2n-1} \\ & = \alpha_1 (x + k_1 y)^{2n-1} + \alpha_2 (x + k_2 y)^{2n-1} + \cdots + \alpha_n (x + k_n y)^{2n-1}. \end{aligned}$$

Durch Identifizierung ergibt sich

$$(20) \qquad \begin{cases} a_0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n, \\ a_1 = \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \cdots + \alpha_n k_n, \\ a_2 = \alpha_1 k_1^2 + \alpha_2 k_2^2 + \cdots + \alpha_n k_n^2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{2n-1} = \alpha_1 k_1^{2n-1} + \alpha_2 k_2^{2n-1} + \cdots + \alpha_n k_n^{2n-1}. \end{cases}$$

Betrachten wir nun die $n+1$ Gleichungen, welche auf die i-te folgen, und erinnern wir uns daran, daß die genannten Gleichungen, welche die n Unbekannten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ enthalten, nur dann zusammenbestehen können, wenn

$$\begin{vmatrix} a_i & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_{i+1} & k_1 & k_2 & \ldots & k_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i+n} & k_1^n & k_2^n & \ldots & k_n^n \end{vmatrix} = 0$$

ist oder

$$\varkappa_0 a_i + \varkappa_1 a_{i+1} + \varkappa_2 a_{i+2} + \cdots + \varkappa_n a_{i+n} = 0, \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

wobei mit $\varkappa_0, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ die algebraischen Komplemente der Elemente der ersten Vertikalreihe bezeichnet werden. Ferner wird, wenn man die erste Vertikalreihe durch eine beliebige andre ersetzt,

$$\varkappa_0 + \varkappa_1 k_i + \varkappa_2 k_i^2 + \cdots + \varkappa_n k_i^n = 0.$$

Wir haben also, wenn wir beachten, daß die $\varkappa$ von i unabhängig sind,

$$\begin{cases} \varkappa_0 + \varkappa_1 k_i + \varkappa_2 k_i^2 + \cdots + \varkappa_n k_i^n = 0, \\ \varkappa_0 a_0 + \varkappa_1 a_1 + \varkappa_2 a_2 + \cdots + \varkappa_n a_n = 0, \\ \varkappa_0 a_1 + \varkappa_1 a_2 + \varkappa_2 a_3 + \cdots + \varkappa_n a_{n+1} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varkappa_0 a_{n-1} + \varkappa_1 a_n + \varkappa_2 a_{n+1} + \cdots + \varkappa_n a_{2n-1} = 0. \end{cases}$$

Dies ist ein System von $n+1$ linearen homogenen Gleichungen in den $\varkappa$, und falls diese $\varkappa$ nicht null sind, wie es der Fall ist, wenn die k sämtlich verschieden sind, so ist die Determinante des Systems null, so daß also

$$(21)\qquad \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & a_n & a_{n+1} & \dots & a_{2n-1} \end{vmatrix} = 0$$

ist für $x = k_1, k_2, \dots, k_n$. Es genügt demnach die Gleichung (21) aufzulösen, um die Werte der k zu erhalten. Setzt man sie in n Gleichungen (12) ein, welche es auch sein mögen, so ergeben sich dann die Werte der α.

102. Übungsbeispiel. Die binäre kubische Form

$$a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 y + 3 a_2 x y^2 + a_3 y^3$$

auf ihren kanonischen Ausdruck zu bringen. Wenn $a_0 a_2 = a_1^2$ wäre, so würde man der kubischen Form sofort die gewünschte Gestalt

$$\frac{1}{a_0^2}(a_0 x + a_1 y)^3 + \frac{a_0 a_3 - a_1 a_2}{a_0} y^3$$

geben können. Es sei also $a_0 a_2 \neq a_1^2$. Wenn die Invariante (§ 87)

$$\varDelta = 4(a_0 a_2 - a_1^2)(a_1 a_3 - a_2^2) - (a_0 a_3 - a_1 a_2)^2$$

von Null verschieden ist, so liefert die Gleichung (21) zwei verschiedene Wurzeln

$$k_1 = \frac{a_0 a_3 - a_1 a_2 + \sqrt{-\varDelta}}{2(a_0 a_2 - a_1^2)}, \quad k_2 = \frac{a_0 a_3 - a_1 a_2 - \sqrt{-\varDelta}}{2(a_0 a_2 - a_1^2)},$$

und aus den Gleichungen $\alpha_1 + \alpha_2 = a_0$, $\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 = a_1$ ergeben sich für α_1 und α_2 zwei derartige Werte, daß sich die betrachtete kubische Form in den Ausdruck $\alpha_1 \xi^3 + \alpha_2 \eta^3$ überführen läßt, wenn man $\xi = x + k_1 y$, $\eta = x + k_2 y$ setzt. Man bemerke, daß ξ und η die beiden Linearfaktoren sind, in welche sich die quadratische Form

$$\begin{vmatrix} a_0 x + a_1 y & a_1 x + a_2 y \\ a_1 x + a_2 y & a_2 x + a_3 y \end{vmatrix} = (a_0 a_2 - a_1^2) x^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2) x y + (a_1 a_3 - a_2^2) y^2,$$

deren Diskriminante $\frac{1}{4}\varDelta$ ist, stets zerlegen läßt. In der Tat sieht man sofort, daß diese quadratische Form durch identische Umformung in $(a_0 a_2 - a_1^2)\xi\eta$ übergeht. Besteht ferner zwischen ihren Koeffizienten die Relation $\varDelta = 0$, so läßt sich die kubische Form, wenn sie nicht der Kubus einer linearen Form ist, nicht auf die angegebene Gestalt bringen. Man kann dagegen (vgl. § 91) erreichen, daß sie die Gestalt $a_0 \xi^2 \eta$ annimmt, indem man

$$k_1 = \frac{a_0 a_3 - a_1 a_2}{2(a_0 a_2 - a_1^2)} = 2\frac{a_1 a_3 - a_2^2}{a_0 a_3 - a_1 a_2}, \quad k_2 = \frac{a_3(a_0 a_2 - a_1^2)}{a_0(a_1 a_3 - a_2^2)}$$

macht.

Zweites Buch.

Irrationale Zahlen. Grenzwerte. Unendliche Reihen und Produkte.

Irrationale Zahlen.

Grundlegende Begriffe.

103. Aus den Elementen sind wir bekannt mit der Theorie der rationalen Zahlen, d. h. der ganzen Zahlen (einschließlich der Null) und der gebrochenen Zahlen. Denken wir uns nun dieses Zahlengebiet in zwei Klassen, die untere und die obere, wie wir sie nennen werden, derart zerlegt, daß jede Zahl der unteren Klasse kleiner ist als jede beliebige Zahl der oberen Klasse. Es kann sein, daß in der unteren Klasse eine Zahl a existiert, welche größer ist als alle andern, oder daß die obere Klasse eine Zahl b enthält, welche kleiner ist als alle andern in derselben Klasse. In diesem Falle sagt man, daß die gemachte Zerlegung eine rationale Zahl definiert, und zwar gerade die Zahl a oder die Zahl b. Es sei hier bemerkt, daß a und b nicht gleichzeitig existieren können. Sonst könnte man zwischen diese Zahlen unendlich viele andere rationale Zahlen einschalten, welche weder der einen noch der andern Klasse angehören würden. Es kann aber auch sein, daß weder eine Zahl a noch eine Zahl b existiert. In diesem Falle wollen wir übereinkommen zu sagen, daß jene Art von Zerlegung eine irrationale Zahl definiert. Die Irrationalzahlen werden also definiert durch diejenigen Zerlegungen des rationalen Gebiets, welche folgende Eigenschaften haben: 1) Jede Zahl der unteren Klasse ist kleiner als jede Zahl der oberen Klasse. 2) Es gibt in der unteren Klasse keine Zahl, die alle andern übertrifft. 3) Es gibt in der oberen Klasse keine Zahl, die kleiner ist als alle andern in derselben Klasse.

104. Beispiele: a) Werfen wir z. B. in die eine Klasse die rationale Zahl a und alle rationalen Zahlen, die kleiner sind als a, so wird die obere Klasse aus allen rationalen Zahlen bestehen, die größer sind als a, und wird die Eigenschaft haben, keine Zahl zu enthalten, die kleiner ist als alle andern Zahlen. Wählt man nämlich in ihr eine Zahl a', so ist aus der Theorie der rationalen Zahlen bekannt[1]), daß sich zwischen a und $a' > a$ unendlich viele andere rationale Zahlen einschalten lassen, die notwendig zu der oberen Klasse gehören. Aber die untere Klasse hat nicht die Eigenschaft, keine Zahl zu enthalten, die größer ist als alle andern, da eine solche Zahl existiert, nämlich gerade a. Diese Art von Zerlegung definiert also nicht eine Irrationalzahl, sondern sie definiert die rationale Zahl a.

b) Dagegen bemerke man, daß die Zahl $\sqrt{2}$ nicht existiert, so lange man sich auf das Gebiet der rationalen Zahlen beschränkt. Es ist aber möglich sie als eine Irrationalzahl zu definieren, welche einer Zerlegung auf Grund des folgenden Kriteriums entspricht: Man werfe in die obere Klasse alle positiven rationalen Zahlen, deren Quadrat 2 übertrifft, und in die untere Klasse jede andere rationale Zahl. Um zu beweisen, daß diese Zerlegung des rationalen Gebiets eine Irrationalzahl definiert, muß man zeigen, daß die beiden Klassen die für diesen Zweck erforderlichen Eigenschaften haben. Vor allen Dingen ist es evident, daß die Zahlen der unteren Klasse kleiner sind als die der oberen Klasse, da von zwei positiven rationalen Zahlen diejenige die kleinere ist, welche das kleinere Quadrat hat. Wenn ferner a eine positive Zahl der unteren Klasse ist, so gibt es immer eine rationale Zahl, die größer als a ist und derselben Klasse angehört. Um sich davon zu überzeugen, hat man nur nachzuweisen, daß sich immer eine positive rationale Zahl h bestimmen läßt derart, daß $a+h$ zu der unteren Klasse gehört, daß mit andern Worten nicht nur $a^2 < 2$, sondern auch $(a+h)^2 < 2$ oder $(2a+h)h < 2 - a^2$ ist. Nehmen wir $h < 1$ an, so wird die vorstehende Ungleichung befriedigt sein für $h < \frac{2-a^2}{2a+1}\cdot$ Es wird daher genügen, h rational, positiv und kleiner als die kleinere der beiden Zahlen 1, $\frac{2-a^2}{2a+1}$ zu wählen. In analoger Weise ließe sich zeigen, daß es, wenn a der oberen Klasse angehört, immer eine rationale Zahl gibt, die kleiner als a ist und derselben Klasse angehört.

105. Gleichheit und Ungleichheit. Man sagt, die Zahlen α und β seien gleich, und schreibt $\alpha = \beta$, wenn die Klassen von α mit den entsprechenden Klassen von β identisch sind. Es ist ferner evident, daß die Identität der unteren Klassen die der oberen Klassen nach sich zieht und umgekehrt. Man sagt, α sei kleiner als β, und schreibt $\alpha < \beta$, wenn es eine rationale Zahl gibt, die gleichzeitig der oberen Klasse von α und der unteren von β angehört. Ist im besondern β rational, so drückt die Ungleichung $\alpha < \beta$ nur aus, daß β der oberen Klasse von α angehört. Ebenso drückt, wenn α rational

1) Man muß sich hier daran erinnern, daß bei Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen und Divisionen, ausgeführt mit rationalen Zahlen, sich immer rationale Zahlen ergeben.

ist, die genannte Ungleichung aus, daß α der unteren Klasse von β angehört. Man sagt ferner, α sei positiv, wenn es größer als 0 ist, wenn also seine untere Klasse die Null einschließt. Man sagt, α sei negativ, wenn die Null der oberen Klasse von α angehört.

106. Zahlen, die dem absoluten Betrage nach gleich sind. Man kehre das Vorzeichen aller Zahlen der unteren Klasse von α um und betrachte dieselben als die Elemente der oberen Klasse einer andern Zahl β, deren untere Klasse offenbar aus den mit umgekehrtem Vorzeichen genommenen Zahlen der oberen Klasse von α bestehen wird. Es ist klar, daß α und β entgegengesetzte Zeichen haben, da die Null gleichzeitig der unteren Klasse von α und der oberen von β angehört oder umgekehrt. Unter diesen Umständen kommt man überein zu sagen, α und β seien dem absoluten Betrage nach gleich, und zu schreiben $\beta = -\alpha$. Man bemerke, daß durch Wiederholung dessen, was mit den Klassen von α geschehen ist, bei denjenigen von β sich α ergeben würde. Mit andern Worten, wenn $\beta = -\alpha$, so ist $\alpha = -\beta$.

107. Inverse Zahlen. Es sei $\alpha > 0$, und wir wollen unter ausschließlicher Beschränkung auf die positiven rationalen Zahlen die inversen Zahlen zu denen der beiden Klassen von α bilden, indem wir gleichzeitig diese Klassen vertauschen. Auf diese Weise wird eine andere Zahl β definiert, welche man die inverse von α nennt und mit $\frac{1}{\alpha}$ bezeichnet. Es ist leicht zu sehen, daß sich aus $\beta = \frac{1}{\alpha}$ ergibt $\alpha = \frac{1}{\beta}$. Wenn ferner α negativ ist, so stellt das Symbol $\frac{1}{\alpha}$ eine negative Zahl dar, deren absoluter Betrag der inverse des absoluten Betrages von α ist. Mit andern Worten, wenn $\alpha < 0$ ist, so kommt man überein

$$\frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{-\alpha}$$

zu setzen als Definition der linken Seite. Endlich wollen wir immer festhalten, daß für $\alpha = 0$ das Symbol $\frac{1}{\alpha}$ nicht definiert worden ist und infolgedessen gar keinen Sinn hat.

108. Wenn $\alpha < \beta$ ist, so gibt es unendlich viele rationale Zahlen a, die zwischen α und β liegen. In der Tat existiert immer eine rationale Zahl a derart, daß $\alpha < a < \beta$ ist. Da a nicht die größte Zahl in der unteren Klasse von β sein kann, so gibt es in dieser Klasse wenigstens eine rationale Zahl $a' > a$, die ebenfalls der oberen Klasse von α angehört, so daß $\alpha < a < a' < \beta$ ist. Zwischen a und a' können wir aber unendlich viele rationale Zahlen einschalten, deren jede gleichzeitig der oberen Klasse von α und der unteren von β

angehören wird. Es ist ferner klar, daß der Satz bestehen bleibt, wenn wenigstens eine der beiden Zahlen rational ist.

109. Das Paar von Ungleichungen $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$ zieht die Ungleichung $\alpha < \gamma$ nach sich. Man bemerke, daß die Definition der Ungleichungen $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$ die Existenz von zwei rationalen a und b impliziert, für welche $\alpha < a < \beta$, $\beta < b < \gamma$ ist. Man sieht, daß a und b bezüglich der unteren Klasse und der oberen Klasse von β angehören. Daraus folgt, daß $a < b$ ist. Da ferner b in der unteren Klasse von γ enthalten ist, so gilt dies auch von a, d. h. es gibt eine Zahl, die gleichzeitig der oberen Klasse von α und der unteren von γ angehört. Also ist $\alpha < \gamma$.

110. Zwischen zwei rationalen Zahlen, deren Differenz beliebig klein gemacht werden kann, kann es nur eine einzige Zahl geben. Es sei in der Tat $a < \alpha < b$, $a < \beta < b$. Wenn $\alpha < \beta$ wäre, so könnte man sich zwei feste Zahlen a' und b' denken derart, daß $\alpha < a' < b' < \beta$ ist, und dann würde auch $a < a' < b' < b$ sein, mithin $b - a > b' - a'$, so daß man gegen die Voraussetzung $b - a$ nicht kleiner als $b' - a'$ machen könnte. Analog schließt man für $\alpha > \beta$. Es ist also absurd anzunehmen, β könne von α verschieden sein, wenn $b - a$ kleiner gemacht werden kann als jede noch so kleine positive Zahl.

111. Es ist immer möglich eine beliebige Zahl zwischen zwei rationale Zahlen einzuschließen, die sich voneinander um weniger als eine beliebig klein gewählte positive Größe unterscheiden. Wenn α zwischen den rationalen Zahlen a und b enthalten ist, so gehört die Zahl $\frac{1}{2}(a + b)$ der unteren Klasse oder der oberen Klasse von α an. Im ersten Falle setze man $a_1 = \frac{1}{2}(a + b)$, $b_1 = b$ und im zweiten $a_1 = a$, $b_1 = \frac{1}{2}(a + b)$. Die Zahl α ist auch zwischen den Zahlen a_1 und b_1 enthalten, deren Differenz die Hälfte von $b - a$ ist. Verfährt man analog mit a_1 und b_1, so ergeben sich die Zahlen a_2 und b_2, dann aus diesen a_3 und b_3 u. s. w., so daß $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a)$ ist. α ist also zwischen zwei Zahlen a_n und b_n eingeschlossen, deren Differenz so klein gemacht werden kann als man will, indem man n hinreichend groß wählt.

112. Aus der unteren Klasse einer Irrationalzahl kann man immer eine Folge nicht abnehmender rationaler Zahlen aussondern, welche schließlich jede Zahl der unteren Klasse übertreffen. Die vorhin gebildete Folge $a, a_1, a_2, a_3, \ldots$ ist so beschaffen, daß jedes ihrer Glieder gleich dem vorhergehenden oder größer als dasselbe ist. Es ist nur noch zu zeigen, daß man, wenn eine beliebige Zahl a' aus der unteren Klasse von α gewählt wird, einen hinreichend großen Wert von n finden kann, für welchen $a_n > a'$ ist. Da a' nicht die größte Zahl der unteren Klasse ist, so kann man immer eine andere Zahl $a'' > a'$ finden, die derselben Klasse angehört. Inzwischen haben wir gesehen, daß die Differenz $b_n - a_n$ kleiner gemacht werden kann als jede positive Größe, also im besondern kleiner als $a'' - a'$. Daraus folgt, daß man für einen passend gewählten Wert von n hat $b_n - a_n < a'' - a'$, d. h.

$$a_n > b_n - a'' + a' > a'.$$

113. Hiernach ist klar, daß die Folge $a, a_1, a_2, \ldots$ (oder auch $b, b_1, b_2 \ldots$) als Definition der Irrationalzahl α dienen kann. Wenn man nämlich diese Folge als gegeben betrachtet, so führt sie zu einer Zerlegung des rationalen Gebietes in zwei Klassen mit den bekannten Eigenschaften. Es genügt jede rationale Zahl a' der unteren Klasse oder der oberen Klasse zuzuweisen, je nachdem es sich als möglich oder unmöglich herausstellt, in der gegebenen Folge eine Zahl zu finden, die nicht kleiner als a' ist. Diese Bemerkung ist insofern von Wichtigkeit, als sie einen neuen Weg für das Studium der Irrationalzahlen eröffnet, wobei man dieselben als definiert durch Folgen von rationalen Zahlen betrachtet. Die Theorie der Zahlenfolgen wurde in strenger Weise begründet von Heine[1]), und die Theorie der Irrationalzahlen steht mit ihr in engster Beziehung in den Arbeiten von G. Cantor, Lipschitz und andern. Aber dreißig Jahre früher hatte schon Catalan im Unterricht und in mehreren bescheidenen Publikationen den Grund zu der neuen Theorie der Irrationalzahlen gelegt[2]). Auf feinere Begriffe gründet Weierstraß die Theorie dieser Zahlen, die er als Summe von unendlich vielen rationalen Zahlen betrachtet. Wir ziehen es hier vor, bei dem weiteren Studium der Irrationalzahlen die Zerlegung in Klassen zu benutzen, welche von Dedekind herrührt und von Dini, Tannery und andern adoptiert worden ist[3]).

Operationen mit Irrationalzahlen.

114. Addition. a) Summe der Zahlen α und β nennt man und bezeichnet mit $\alpha + \beta$ diejenige Zahl, sie sei rational oder nicht, welche die Summe von zwei beliebigen rationalen Zahlen,

---

1) „Die Elemente der Funktionenlehre" (Crelles Journal, Bd. 74).

2) Vgl. Mathesis, 1886, S. 151.

3) Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen (Braunschweig, 1872); Dini, Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabile reale (Pisa, 1878), auch deutsch von Lüroth und Schepp; Tannery, Introduction à la théorie des fonctions d'une variable (Paris, 1886).

die bezüglich kleiner sind als α und β, übertrifft und von der Summe von zwei beliebigen rationalen Zahlen, die bezüglich größer sind als α und β, übertroffen wird. Nach Aufstellung dieser Definition wollen wir beweisen, daß es immer eine Zahl $\alpha + \beta$ gibt und nicht mehr als eine geben kann.

b) Es sei

$$(1) \qquad a < \alpha < a', \quad b < \beta < b'.$$

Jede rationale Zahl r, welche nicht die Form $a + b$ hat, d. h. sich nicht in die Summe von zwei rationalen Zahlen zerlegen läßt, die bezüglich kleiner sind als α und β, übertrifft notwendig alle Zahlen, die die genannte Form haben. In der Tat, wenn $r < a + b$ wäre, so würde sich daraus ergeben $r - a < b < \beta$, mithin ließe sich gegen die Voraussetzung r in die Summe von zwei rationalen Zahlen, a und $r - a$, zerlegen, die bezüglich kleiner sind als α und β. Ebenso beweist man, daß eine rationale Zahl, die nicht die Form $a' + b'$ hat, kleiner ist als jede Zahl von dieser Form. Wenn es folglich eine rationale Zahl r gibt, welche weder die eine noch die andere der Formen $a + b$ und $a' + b'$ hat, so ist diese Zahl so beschaffen, daß man immer

$$a + b < r < a' + b'$$

hat, welches auch die rationalen Zahlen a, b, a', b' sein mögen, die den Bedingungen (1) genügen. In diesem Falle existiert die Summe $\alpha + \beta$ und ist gerade r.

c) Wenn eine solche Zahl nicht existiert, so bedeutet dies, daß jede rationale Zahl die eine oder die andere der Formen $a + b$, $a' + b'$ haben muß. Man bilde mit den Zahlen von beiden Formen zwei Klassen. Dadurch wird eine Irrationalzahl γ definiert, da immer $a + b < a' + b'$ ist und es außerdem in der unteren Klasse keine größte Zahl und in der oberen Klasse keine kleinste Zahl gibt. Wir können nämlich zwei neue rationale Zahlen a_1 und b_1 finden derart, daß $a < a_1 < \alpha$, $b < b_1 < \beta$ ist, und es wird dann $a + b < a_1 + b_1$, u. s. w. Da nun aber immer

$$a + b < \gamma < a' + b',$$

so ist die gesuchte Summe gerade γ.

d) Es existiert also immer eine Zahl, rational oder nicht, welche der Definition der Summe $\alpha + \beta$ entspricht. Es bleibt noch übrig zu zeigen, daß eine solche Zahl einzig ist. Man kann nun aber (§ 111) α zwischen zwei rationale Zahlen a und a' einschließen, welche sich voneinander um weniger als eine beliebig kleine Größe unterscheiden. Dasselbe gilt von β. Inzwischen leitet man aus

$$a' - a < \tfrac{1}{2}\varepsilon, \quad b' - b < \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

durch Addition ab $(a' + b') - (a + b) < \varepsilon$, mithin ist (§ 110) die Zahl $\alpha + \beta$, die zwischen zwei rationalen Zahlen liegt, deren Differenz kleiner ist als die beliebig kleine positive Zahl ε, eine vollkommen bestimmte Zahl.

115. Eigenschaften der Addition. a) Da die Summe $\alpha + \beta$ mit Hilfe der Summen rationaler Zahlen $a + b$ und $a' + b'$ definiert ist, welche sich nicht ändern, wenn man in ihnen die Glieder vertauscht, so ist offenbar $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

b) Analog beweist man, daß $\alpha + \beta + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ ist, u. s. w.

c) Wenn $\beta = 0$ ist, so sind die Zahlen b die negativen rationalen Zahlen und die Zahlen b' die positiven rationalen Zahlen. Daraus folgt $a + b < a < \alpha$, $a' + b' > a' > \alpha$. Die Klassen $(a + b)$ und $(a' + b')$ definieren also die Zahl α. Es ist mit andern Worten $\alpha + 0 = \alpha$.

d) Wenn $\beta = -\alpha$ ist, so sind die Zahlen b die Zahlen a' mit umgekehrtem Vorzeichen (§ 106), und da $a' > a$ ist, so hat man zugleich $a + b < 0$. Ebenso sind die Zahlen b' die Zahlen a mit umgekehrtem Vorzeichen, und es ist daher $a' + b' > 0$. Die Zahl, welche immer zwischen $a + b$ und $a' + b'$ enthalten ist, ist also die Null. Es ist mit andern Worten $\alpha + (-\alpha) = 0$ oder kurz $\alpha - \alpha = 0$.

e) Addiert man zu einer Zahl verschiedene Zahlen, so ergeben sich verschiedene Summen. In der Tat, wenn $\alpha < \beta$ ist, so kann man sich zwei Zahlen a und b denken derart, daß $\alpha < a < b < \beta$ ist. Außerdem läßt sich (§ 111) γ zwischen zwei Zahlen c und c' einschließen in der Weise, daß $c' - c < b - a$ oder $a + c' < b + c$ ist. Auf der andern Seite ist $\alpha + \gamma < a + c'$, $b + c < \beta + \gamma$ nach der Definition der Summen $\alpha + \gamma$, $\beta + \gamma$. Wenn also $\alpha < \beta$ ist, so ist $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$.

116. Subtraktion. Es existiert immer eine Zahl, welche, zu β addiert, als Summe α gibt. Diese Zahl ist $\alpha + (-\beta)$. In der Tat ist nach den Eigenschaften der Addition

$$\alpha + (-\beta) + \beta = \alpha + (-\beta + \beta) = \alpha + 0 = \alpha.$$

Es kann keine andere Zahl geben, welche dieselbe Eigenschaft genießt; denn wir haben gesehen, daß zwei verschiedene Zahlen, zu der Zahl β addiert, nicht dieselbe Summe geben können. Also ist die Zahl $\alpha + (-\beta)$ oder kurz $\alpha - \beta$, welche, zu β addiert, α gibt, einzig. Sie ist per definitionem die Differenz zwischen α und β.

117. Multiplikation. α und β seien positiv. Sind a, b, a', b' positive rationale Zahlen, die den Bedingungen (1) genügen, so kann jede positive rationale Zahl r eine der Formen ab, $a'b'$ haben oder keine von beiden. Wenn r nicht die Form ab hat, so muß immer

$r > ab$ sein. Sonst würde sich aus $r < ab$ ergeben $\frac{r}{a} < b < \beta$, und r wäre gegen die Voraussetzung zerlegbar in das Produkt von zwei rationalen Zahlen a und $\frac{r}{a}$, die bezüglich kleiner sind als α und β. Ebenso muß, wenn r nicht die Form $a'b'$ hat, immer $r < a'b'$ sein. Folglich ist, wenn r weder die Form ab noch die Form $a'b'$ hat, $ab < r < a'b'$ für alle Werte von a, b, a', b', die den Bedingungen (1) genügen. Wenn es keine rationale Zahl mit dieser Eigenschaft gibt, so bedeutet dies, daß jede rationale Zahl die eine oder die andere der Formen ab, $a'b'$ hat. Alsdann betrachte man die Irrationalzahl, welche durch die Klassen (ab) und $(a'b')$ definiert wird. Man erkennt auf diese Weise, daß sicher eine Zahl γ existiert, rational oder irrational, welche die Eigenschaft besitzt, das Produkt von zwei positiven rationalen Zahlen, die bezüglich kleiner sind als α und β, immer zu übertreffen und von dem Produkt von zwei beliebigen rationalen Zahlen, die bezüglich größer sind als α und β, übertroffen zu werden. Diese Zahl ist einzig. In der Tat, man wähle nach beliebiger Fixierung der positiven Zahl ε unter den Zahlen, welche den oberen Klassen von α und β gemeinsam angehören, eine Zahl c, deren Quadrat größer ist als $\frac{1}{3}\varepsilon$. Darauf bestimme man die üblichen Zahlen a, b, a', b' derart, daß $a' - a$ und $b' - b$ kleiner als $\frac{\varepsilon}{3c}$ werden. Alsdann hat man, da $a + b + \frac{\varepsilon}{3c} < 3c$ ist,

$$a'b' < \left(a + \frac{\varepsilon}{3c}\right)\left(b + \frac{\varepsilon}{3c}\right) = ab + \left(a + b + \frac{\varepsilon}{3c}\right)\frac{\varepsilon}{3c} < ab + \varepsilon$$

oder $a'b' - ab < \varepsilon$. Also ist (§ 110) die Zahl γ vollkommen bestimmt. Sie ist per definitionem das Produkt der Zahlen α und β und wird mit $\alpha\beta$ bezeichnet.

118. Das Produkt von zwei Zahlen ist auf diese Weise nur für den Fall definiert, daß diese Zahlen beide positiv sind. Man nennt allgemein Produkt von α und β und bezeichnet mit $\alpha\beta$ das Produkt der absoluten Beträge von α und β, und zwar positiv oder negativ genommen, je nachdem α und β dasselbe Vorzeichen oder entgegengesetzte Vorzeichen haben. Es ist mit andern Worten

$$\alpha\beta = -(-\alpha)\beta, \quad \alpha\beta = -\alpha(-\beta), \quad \alpha\beta = (-\alpha)(-\beta).$$

Was das Produkt von α mit 0 anbelangt, so ist es per definitionem null. Im folgenden werden wir der Kürze wegen annehmen, α und β seien positiv. Es wird dann leicht sein, die gefundenen Eigenschaften auf die andern Fälle auszudehnen.

119. Eigenschaften der Multiplikation. a) $\alpha\beta = \beta\alpha$; b) $\alpha\beta\gamma = \alpha(\beta\gamma)$

u. s. w.; c) $\alpha \cdot 1 = \alpha$; d) $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$; e) wenn man eine Zahl mit verschiedenen Zahlen multipliziert, so erhält man verschiedene Produkte. Alle diese Eigenschaften lassen sich durch analoge Überlegungen beweisen, wie sie in § 115 angewandt worden sind.

120. Division. Es existiert immer eine Zahl, welche, mit $\beta \neq 0$ multipliziert, α ergibt. Sie ist das Produkt $\alpha \cdot \frac{1}{\beta}$, welches man der Kürze wegen schreibt $\frac{\alpha}{\beta}$. In der Tat ist nach den Eigenschaften der Multiplikation

$$\left(\alpha \cdot \frac{1}{\beta}\right)\beta = \alpha\left(\frac{1}{\beta} \cdot \beta\right) = \alpha \cdot 1 = \alpha.$$

Es gibt keine andern Zahlen mit derselben Eigenschaft; denn wir haben gesehen, daß zwei verschiedene Zahlen, mit β multipliziert, nicht dasselbe Produkt α liefern können. Also ist die Zahl $\frac{\alpha}{\beta}$, welche, mit β multipliziert, α ergibt, einzig. Sie ist per definitionem der Quotient von α durch β. Auch hier bemerke man, daß für $\beta = 0$ das Symbol $\frac{\alpha}{\beta}$ überhaupt keine Bedeutung hat.

121. In analoger Weise ließen sich die übrigen Regeln des algebraischen Kalküls auf die Irrationalzahlen ausdehnen. Um z. B. zu beweisen, daß $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ ist u. s. w., braucht man nur die entsprechenden Zerlegungen in Klassen zu betrachten und die Identität der gleichnamigen Klassen in Evidenz zu setzen. Für uns genügt es gezeigt zu haben, welchen Weg man bei derartigen Beweisen einzuschlagen hat, um so mehr, als die vollständige Ausdehnung des algebraischen Kalküls auf die Irrationalzahlen sich von selbst und ganz natürlich aus der wichtigen Theorie ergeben wird, welche wir jetzt entwickeln wollen.

Theorie der Grenzwerte.

Das Konvergieren nach einem Grenzwert.

122. Definition. a) Man sagt, die Zahl a_n, welche mit n veränderlich ist, sei für unendliches n unendlich groß, wenn sie mit unendlich zunehmendem n schließlich größer wird und bleibt als jede beliebig große gegebene Zahl. Ausführlich ausgedrückt: Wenn jeder Zahl l eine Zahl ν entspricht derart, daß für $n > \nu$ immer $a_n > l$ ist, so sagt man, a_n sei unendlich groß oder es wachse über alle Grenzen oder es konvergiere nach Unendlich.

b) Man sagt, a_n sei für unendliches n unendlich klein oder infinitesimal, wenn es schließlich dem absoluten Betrage nach kleiner wird und bleibt als jede beliebig kleine positive Zahl. Anders ausgedrückt: Wenn jeder positiven Zahl ε eine Zahl ν entspricht derart, daß für $n > \nu$ immer $|a_n| < \varepsilon$ ist[1]), so sagt man, die Zahl a_n sei infinitesimal oder sie konvergiere nach Null.

c) Wenn man allgemeiner sagt, a_n konvergiere für unendliches n nach a oder die Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ lasse den Grenzwert (Limes) a zu, und wenn man $\lim a_n = a$ schreibt, so will man damit ausdrücken, daß die Differenz $a_n - a$ infinitesimal ist. Im besondern ist der Grenzwert einer infinitesimalen Größe null.

d) Man pflegt auch zu schreiben $\lim a_n = \infty$, um auszudrücken, daß a_n unendlich groß ist, und man pflegt zu sagen, a_n habe als Grenzwert das positiv Unendliche oder einfach das Unendliche, eine Ausdrucksweise, die ganz und gar auf Übereinkunft beruht. Man sagt ferner, a_n habe als Grenzwert das negativ Unendliche, und schreibt $\lim a_n = -\infty$, um auszudrücken, daß $-a_n$ nach Unendlich konvergiert.

123. Bemerkungen. a) Wenn a_n nach a konvergiert, so konvergiert $-a_n$ nach $-a$. In der Tat sind die beiden Differenzen

$$a_n - a, \quad -a_n - (-a) = a - a_n$$

dem absoluten Betrage nach gleich, und es kann daher nicht eine von ihnen infinitesimal sein, ohne daß es auch die andere ist.

b) Wenn die Zahl a_n zwischen zwei infinitesimalen Größen enthalten ist, so ist sie infinitesimal. In der Tat kann ihr absoluter Betrag nicht größer sein als die beiden absoluten Beträge der gegebenen Größen, mithin muß sie kleiner werden und bleiben können als jede positive Zahl.

c) Wenn für unendliches n die Zahl a_n nach a konvergiert, so konvergiert der absolute Betrag von a_n nach dem absoluten Betrage von a. In der Tat, da der absolute Betrag der Differenz zweier Zahlen niemals von der Differenz der absoluten Beträge dieser Zahlen übertroffen wird, so ist klar, daß der absolute Betrag von $a_n - a$ nicht kleiner ist als der von $|a_n| - |a|$. Die letzte Differenz ist also auf Grund der vorigen Bemerkung gleichzeitig mit der ersten unendlich klein.

d) Wenn eine Zahl unendlich groß ist, so ist die inverse Zahl unendlich klein. In der Tat, wenn ε positiv und so

1) Mit $|x|$ pflegt man den absoluten Betrag von x zu bezeichnen.

klein als man will gegeben ist, so kann man immer einen Wert von n finden, von welchem ab

$$a_n > \frac{1}{\varepsilon}, \text{ mithin } \frac{1}{a_n} < \varepsilon$$

ist. Ist also $\lim a_n = \infty$, so ist $\lim \frac{1}{a_n} = 0$.

e) Die Umkehrung ist nicht richtig. Man kann nur sagen, daß die inversen Zahlen einer positiven und einer negativen unendlich kleinen Größe den Grenzwert ∞ bezw. $-\infty$ haben. Wenn aber a_n nicht beim Konvergieren nach Null schließlich ein bestimmtes Vorzeichen annimmt, so oszilliert die inverse Zahl unaufhörlich von positiven Werten zu negativen Werten, die absolut genommen beliebig groß werden. So hat die Folge $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ zwar den Grenzwert Null. Die aus den inversen Zahlen bestehende, also $1, -2, 3, -4, 5, \ldots$ hat aber keinen Grenzwert.

124. Methode der Grenzwerte. Diese weittragende Rechnungsmethode besteht in dem Übergange von Relationen, die zwischen veränderlichen Zahlen bestehen, zu analogen Relationen zwischen ihren Grenzwerten. Sie beruht auf einer Anzahl von Sätzen, deren Beweis sehr einfach wird, wenn man beachtet, daß auf Grund der Definition (§ 122, b, c) die Existenz des Grenzwertes a von a_n die Möglichkeit involviert, immer einen Wert von n zu finden, von welchem ab a_n eine beliebige Zahl, die kleiner als a ist, übertrifft und kleiner ist als irgend eine Zahl, die größer als a ist. Es genügt ε gleich dem absoluten Betrage der Differenz zwischen a und der betrachteten Zahl zu nehmen. So können wir, indem wir uns auf früher Gesagtes beziehen (§ 112), behaupten, daß eine irrationale Zahl sich immer als Grenzwert einer Folge von rationalen Zahlen betrachten läßt.

125. Eine Veränderliche kann sich nicht gleichzeitig mehreren Grenzwerten nähern. In der Tat, wenn a_n zwei Grenzwerte zuließe, die nicht einander gleich sind, und zwischen denselben in beliebiger Weise eine Zahl c gewählt wird, so würden wir einen Wert des Index finden können, von welchem ab wir gleichzeitig $a_n < c$, $a_n > c$ haben würden. Dies ist absurd. Man bemerke jedoch, daß a_n sehr wohl nach verschiedenen Grenzwerten konvergieren kann für verschiedene Formen des Index. So hat z. B. die Folge $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$ keinen bestimmten Grenzwert, während die Glieder an ungerader Stelle nach Null und diejenigen an gerader Stelle nach der Einheit konvergieren. Es ist ferner wichtig zu bemerken, daß auf Grund der Definition des Grenzwertes jede Folge von unendlich vielen Zahlen, die aus einer Folge ausgesondert ist, welche nach einem Grenzwert konvergiert, denselben Grenzwert zuläßt.

126. Wenn zwei Veränderliche nach verschiedenen Grenzwerten konvergieren, so übertrifft schließlich diejenige, welche den größeren Grenzwert hat, die andere. Mit andern Worten,

$$\text{wenn } \lim a_n > \lim b_n, \text{ so ist } a_n > b_n$$

von einem gewissen Werte des Index ab. In der Tat, wenn zwischen den beiden Grenzwerten in beliebiger Weise eine Zahl c gewählt wird, so hat man für einen genügend großen Wert von n und für alle größeren Werte $a_n > c$, $b_n < c$, mithin $a_n > b_n$.

127. Wenn eine Veränderliche schließlich kleiner als eine andere bleibt, so kann der Grenzwert der ersten nicht größer sein als derjenige der zweiten. Mit andern Worten,

$$\text{wenn } a_n < b_n, \text{ so ist } \lim a_n \leq \lim b_n,$$

falls die beiden Grenzwerte existieren. In der Tat, wenn $\lim a_n > \lim b_n$ wäre, so würde schließlich gegen die Voraussetzung $a_n > b_n$ sein.

128. Aus den beiden letzten Sätzen lassen sich gewisse Folgerungen ableiten, die bemerkenswert sind. Vor allem ist die Bemerkung von Wichtigkeit, daß eine Veränderliche schließlich das Vorzeichen ihres Grenzwertes annimmt und behält. Wenn nämlich $\lim a_n > 0$ ist, so wird schließlich $a_n > 0$ sein. Eine Folge von Zahlen, die nach einem positiven Grenzwert konvergieren, kann also nur eine begrenzte Anzahl von negativen oder verschwindenden Gliedern enthalten. Umgekehrt ist, wenn $a_n > 0$, $\lim a_n \geq 0$, d. h. eine positive Veränderliche kann nur nach einem positiven oder verschwindenden Grenzwert konvergieren. Ebenso kann eine negative Veränderliche nicht nach einem positiven Grenzwert konvergieren. Daraus geht hervor, daß eine aus unendlich vielen positiven und unendlich vielen negativen Zahlen bestehende Folge keinen von Null verschiedenen Grenzwert zulassen kann.

129. Die Summe und das Produkt von mehreren unendlich kleinen Größen in endlicher Anzahl sind unendlich klein. Wenn ν die Anzahl der gegebenen unendlich kleinen Größen ist und die positive Zahl ε beliebig gewählt wird, so braucht man nur den absoluten Betrag einer jeden von ihnen definitiv kleiner als $\frac{\varepsilon}{\nu}$ bezw. $\sqrt[\nu]{\varepsilon}$ zu machen, um zu erreichen, daß der absolute Betrag ihrer Summe bezw. derjenige ihres Produktes kleiner wird und bleibt als ε. In der Tat ist bekanntlich der absolute Betrag eines Produktes gleich dem Produkt der absoluten Beträge der Faktoren und der absolute Betrag einer Summe nicht größer als die Summe der absoluten Beträge der Summanden.

130. Wenn zwei Veränderliche nach einem gemeinsamen Grenzwert konvergieren, so konvergiert jede dazwischen liegende Veränderliche nach demselben Grenzwert. Es sei $a_n < b_n < c_n$ und $\lim a_n = \lim c_n = a$. Die Differenz $b_n - a$ ist unendlich klein (§ 123, b), da sie immer zwischen den Differenzen $a_n - a$ und $c_n - a$ liegt, deren jede nach der Annahme unendlich klein ist. Also ist $\lim b_n = a$.

131. Wenn eine Veränderliche nach einem Grenzwert konvergiert, so konvergieren zwei Veränderliche, deren Differenz nach Null konvergiert, und die immer die erste Veränderliche zwischen sich einschließen, mit dieser nach demselben Grenzwert. Es sei $a_n < b_n < c_n$, $\lim b_n = a$, $\lim (a_n - c_n) = 0$. Wir schreiben $a_n - a = (a_n - b_n) + (b_n - a)$. Die Differenz $a_n - b_n$, welche zwischen 0 und der unendlich kleinen Größe $a_n - c_n$ liegt, konvergiert nach Null. Auch die Differenz $b_n - a$ ist nach der Voraussetzung unendlich klein, d. h. man hat (§ 129) $\lim a_n = a$, und dann ist wegen $c_n - a = (c_n - a_n) + (a_n - a)$ auch $\lim c_n = a$.

132. Die Summe von mehreren Veränderlichen in endlicher Anzahl, welche nach bestimmten Grenzwerten konvergieren, hat als Grenzwert die Summe dieser Grenzwerte. In der Tat, wenn die Veränderlichen a_n, b_n, c_n, ... bezüglich nach a, b, c, ... konvergieren, so bedeutet dies (§ 122, c), daß die Differenzen $a_n - a$, $b_n - b$, $c_n - c$, ... unendlich klein sind, und es ist deshalb (§ 129) unendlich klein ihre Summe

$$(a_n + b_n + c_n + \cdots) - (a + b + c \cdots).$$

Also haben wir

$$\begin{aligned}\lim (a_n + b_n + c_n + \cdots) &= a + b + c + \cdots \\ &= \lim a_n + \lim b_n + \lim c_n + \cdots.\end{aligned}$$

Unter den Folgerungen dieses Satzes wollen wir die folgende erwähnen: Wenn die Differenz von zwei Veränderlichen nach Null konvergiert und eine derselben nach einem Grenzwert konvergiert, so konvergiert auch die andere nach demselben Grenzwert. In der Tat, wenn a_n nach a konvergiert und $a_n - b_n$ nach Null, so hat man

$$\lim b_n = \lim a_n + \lim (b_n - a_n) = a.$$

133. Das Produkt von mehreren Veränderlichen in endlicher Anzahl, welche nach bestimmten Grenzwerten konvergieren, hat als Grenzwert das Produkt dieser Grenzwerte. In der Tat, wenn man die Zahlen

$$a_n = a + (a_n - a),\ b_n = b + (b_n - b),\ c_n = c + (c_n - c), \ldots$$

miteinander multipliziert, so wird das Produkt gleich $abc\ldots$, vermehrt um eine endliche Anzahl von Gliedern, deren jedes unendlich klein ist. Mithin ist

$$\lim a_n b_n c_n \cdots = abc \cdots = \lim a_n \cdot \lim b_n \cdot \lim c_n \cdots.$$

134. Wenn a_n nach einem Grenzwert a konvergiert, der von Null verschieden ist, so konvergiert $\frac{1}{a_n}$ nach $\frac{1}{a}\cdot$ In der Tat, wählt man n so groß, daß a_n das Vorzeichen seines Grenzwertes hat und mit wachsendem n bewahrt, so hat man

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a_n - a}{a a_n}\right|.$$

Ist nun in beliebiger Weise eine positive Zahl ε gegeben, die kleiner als 1 ist und beachtet man, daß $\frac{a_n}{a}$, das Produkt von a_n und $\frac{1}{a}$, nach der Einheit konvergiert, so kann man einen Wert von n finden, von welchem ab $\frac{a_n}{a}$ beständig größer ist als ε und außerdem der absolute Betrag von $a_n - a$ kleiner ist als $\varepsilon^2 a^2$. Es wird dann sein

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| < \frac{\varepsilon^2 a}{a_n} < \varepsilon,\quad \lim \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}\cdot$$

135. Der Grenzwert eines Quotienten ist gleich dem Quotienten der Grenzwerte des Zählers und des Nenners, vorausgesetzt, daß der zweite Grenzwert von Null verschieden ist. In der Tat ist nach den beiden letzten Paragraphen

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim a_n \cdot \lim \frac{1}{b_n} = \lim a_n \cdot \frac{1}{\lim b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}\cdot$$

Es ist von Wichtigkeit niemals die wesentliche Einschränkung $\lim b_n \neq 0$ aus den Augen zu lassen.

Fundamentaltheoreme.

136. Theorem I. Jede wachsende Veränderliche hat einen endlichen oder unendlichen Grenzwert.

Wenn a_n nicht unbegrenzt wächst, so gibt es wenigstens eine Zahl, welche nicht von a_n überschritten wird, und es ist klar, daß jede Zahl, die größer ist als die erwähnte, dieselbe Eigenschaft haben wird. Wir teilen nun alle rationalen Zahlen in zwei Klassen, indem wir jede Zahl r der unteren oder der oberen Klasse zuweisen, je nachdem es sich als möglich oder als unmöglich erweist in der Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine Zahl zu finden, die größer ist als r. Die Zahlen der unteren Klasse sind offenbar kleiner als die der oberen Klasse, und es ist außerdem ersichtlich, daß es in der unteren Klasse keine Zahl geben kann, welche alle andern derselben Klasse übertrifft. In der Tat, wenn die Zahl r in der unteren Klasse in beliebiger Weise gewählt und eine Zahl a_n gefunden ist, die sie übertrifft, so wird jede zwischen r und a_n liegende rationale Zahl derselben Klasse angehören. Die gedachte Zerlegung des rationalen Gebietes definiert also (§ 103) eine Zahl a, die rational oder irrational sein kann[1]. Es geht aus der Theorie der Irrationalzahlen (§ 112) hervor, daß man immer, wenn ε positiv und beliebig klein gegeben ist, in der unteren Klasse von a eine Zahl r finden kann, welche $a - \varepsilon$ übertrifft. Wenn daher eine Zahl a_n gefunden ist, die größer als r ist, so wird a fortiori $a_n > a - \varepsilon$ sein, d. h. die positive Differenz $a - a_n$ wird kleiner sein als ε und wird es auch immer bleiben, wenn n wächst, da a fest bleibt und a_n mit n zunimmt. Es ist also $\lim a_n = a$. In analoger Weise läßt sich zeigen, daß eine Folge, deren Glieder abnehmen (oder, besser gesagt, nicht zunehmen), nach dem negativen Unendlich oder nach einem endlichen Grenzwerte konvergiert.

137. Hilfssatz. Aus jeder Zahlenfolge kann man immer eine andere Folge aussondern, die nach einem endlichen oder unendlichen Grenzwert konvergiert.

Wenn die vorgelegte Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ nicht unendlich viele Zahlen enthält, die kleiner oder gleich a_1 sind, so kommen in ihr sicher unendlich viele Zahlen vor, die a_1 übertreffen. Nehmen wir, um einen bestimmten Fall zu betrachten, an, es seien darin unendlich viele Zahlen größer als a_1, und bezeichnen wir mit a_{r_1} eine derselben. Zu dieser kann es wieder eine Zahl a_{r_2} geben, welche auf sie folgt und sie übertrifft, und unter den Zahlen, welche auf a_{r_2} folgen, kann es unter Umständen eine geben, a_{r_3}, die größer ist als a_{r_2}, u. s. w. Läßt sich die Wahl dieser Zahlen ins Unendliche fortsetzen, so wird dadurch aus der gegebenen Folge eine Folge wachsender Zahlen ausgesondert, welche auf Grund des im vorigen Paragraphen Gesagten nach einem endlichen oder unendlichen Grenzwert konvergieren. Im entgegengesetzten Falle muß man schließlich eine Zahl a_{r_λ} finden, welche von den auf sie folgenden Zahlen nicht übertroffen wird.

---

1) Sie ist rational, wenn es in der oberen Klasse eine Zahl gibt, die kleiner ist als alle andern Zahlen derselben Klasse.

Unter diesen wird es immer noch unendlich viele Zahlen geben, welche größer als a_1 sind. Mit einer derselben, a_{s_1}, beginne man eine neue Folge wachsender Zahlen, die möglicherweise mit einem Gliede a_{s_μ} endigt, welches nicht kleiner ist als irgend ein folgendes Glied, aber kleiner oder gleich a_{r_λ}. Fährt man in dieser Weise fort, so entsteht das Schema

$$\begin{array}{l} a_1 < a_{r_1} < a_{r_2} < \cdots < a_{r_\lambda}, \\ a_1 < a_{s_1} < a_{s_2} < \cdots < a_{s_\mu}, \\ a_1 < a_{t_1} < a_{t_2} < \cdots < a_{t_\nu}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ , \end{array}$$

und wenn man nicht zu einer unbegrenzten Folge von wachsenden Zahlen gelangt, so entsteht schließlich die unbegrenzte Reihe nicht wachsender Zahlen

$$a_{r_\lambda} \geqq a_{s_\mu} \geqq a_{t_\nu} \geqq \cdots,$$

welche einen endlichen Grenzwert zuläßt.

138. Bemerkungen. a) Wenn die Veränderlichen a_n und b_n derart sind, daß, falls a_n nach einem Grenzwert a konvergiert, auch b_n nach einem Grenzwert b konvergiert, und wenn verschiedenen Werten von a verschiedene Werte von b entsprechen, so kann man auch behaupten, daß der Grenzwert von a_n existiert, wenn derjenige von b_n existiert. In der Tat, wenn die Folge $a_1, a_2, \ldots$ keinen bestimmten Grenzwert hätte, so würden sich aus ihr Folgen aussondern lassen, die ungleiche Grenzwerte zuließen, denen daher ungleiche Grenzwerte von b_n entsprechen würden. Es würde also b_n gegen die Voraussetzung keinen bestimmten Grenzwert haben.

b) Schon in § 125 haben wir ein Beispiel gegeben für eine Folge, die sich in zwei andere zerlegen läßt, deren jede einen Grenzwert hat. Im Falle unendlich vieler Teilfolgen ist zu bemerken, daß sich die unendlich vielen Grenzwerte auch in stetiger Weise aneinanderreihen können. Ist z. B. ν die Anzahl der Ziffern von n, so kann die Zahl $a_n = \frac{10^\nu}{n}$ nach jeder Zahl konvergieren, die größer als 1, aber nicht größer als 10 ist. In der Tat, wenn a eine solche Zahl ist, so genügt es, n die Reihe der größten Ganzen durchlaufen zu lassen, die in

$$\frac{10}{a}, \quad \frac{100}{a}, \quad \frac{1000}{a}, \quad \frac{10\,000}{a}, \ldots$$

enthalten sind, um zu bewirken, daß a_n nach a konvergiert.

139. Theorem II. Soll a_n einen endlichen Grenzwert besitzen, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß jeder noch so kleinen positiven Zahl ε eine Zahl ν entspricht derart, daß $|a_{n'} - a_{n''}| < \varepsilon$ ist für alle Paare von Werten n', n'', die größer als ν sind.

Wenn a_n nach a konvergiert, so bedeutet dies, daß bei gegebenem ε, welches positiv ist und beliebig klein sein darf, sich ν derart bestimmen läßt, daß man hat

$$|a_{n'} - a| < \tfrac{1}{2}\varepsilon, \quad |a_{n''} - a| < \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

für alle Werte von n' und n'', die größer als ν sind. Es ist also

$$|a_{n'} - a_{n''}| \leq |a_{n'} - a| + |a - a_{n''}| < \varepsilon.$$

Umgekehrt wollen wir bei gegebenem ε annehmen, es lasse sich ν in der Weise bestimmen, daß für alle Werte von n' und n'', die größer als ν sind, $|a_{n'} - a_{n''}| < \frac{1}{2}\varepsilon$ ist. Dann werden insbesondere, wenn wir n' festhalten, alle Zahlen a_n mit einem Index $n > n'$ zwischen $a_{n'} - \frac{1}{2}\varepsilon$ und $a_{n'} + \frac{1}{2}\varepsilon$ fallen. Daraus folgt, daß, wenn man durch das in § 137 angegebene Verfahren aus der Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine andere $a_r, a_s, a_t, \ldots$ aussondert, die nach einem Grenzwert konvergiert, dieser Grenzwert notwendig endlich sein wird. Nennen wir ihn a. Ist nun in der Folge $r, s, t, \ldots$ ein Index $\mu > \nu$ gefunden, der genügend groß ist, um $|a_\mu - a| < \frac{1}{2}\varepsilon$ zu machen, so wird überhaupt für alle Werte von n, die größer als ν sind,

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_\mu| + |a_\mu - a| < \varepsilon$$

sein, mithin $\lim a_n = a$.

140. Theorem III. Wenn a_n und b_n für unendlich zunehmendes n nach Null konvergieren und außerdem b_n beständig abnimmt, so hat man

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}}, \tag{1}$$

vorausgesetzt, daß der zweite Grenzwert existiert.

Wenn l der Wert der rechten Seite von (1) ist, so gibt es zu jeder positiven Zahl ε einen Wert von n derart, daß die Brüche

$$\frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}}, \quad \frac{a_{n+1} - a_{n+2}}{b_{n+1} - b_{n+2}}, \quad \ldots, \quad \frac{a_{n+\nu-1} - a_{n+\nu}}{b_{n+\nu-1} - b_{n+\nu}}$$

alle zwischen $l - \frac{1}{2}\varepsilon$ und $l + \frac{1}{2}\varepsilon$ enthalten sind, wie groß auch ν sein mag. Daraus folgt, da die Nenner alle positiv sind, daß zwischen denselben Zahlen der Bruch enthalten ist, der als Zähler die Summe der Zähler der betrachteten Brüche und als Nenner die Summe der Nenner hat. Es ist also

$$\left|\frac{a_n - a_{n+\nu}}{b_n - b_{n+\nu}} - l\right| < \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

wo n beliebig groß ist. Da der hier auftretende Bruch, wenn n fest bleibt und ν unendlich zunimmt, nach $\frac{a_n}{b_n}$ konvergiert, so kann man ν derart wählen, daß

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_n - a_{n+\nu}}{b_n - b_{n+\nu}}\right| < \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

ist, und dann folgt

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - l\right| < \varepsilon, \quad \lim \frac{a_n}{b_n} = l.$$

141. Theorem IV. Wenn für unendlich zunehmendes n die Veränderliche b_n, welche immer wächst, jede Grenze überschreitet, so hat man

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}, \tag{2}$$

vorausgesetzt, daß der zweite Grenzwert existiert.

Wenn l der Wert der rechten Seite von (2) ist, so gibt es zu jeder positiven Zahl ε eine Zahl ν derart, daß für $n > \nu$ immer

$$\left|\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} - l\right| < \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

ist. Mit andern Worten, die Brüche

$$\frac{a_{\nu+1} - a_\nu}{b_{\nu+1} - b_\nu}, \quad \frac{a_{\nu+2} - a_{\nu+1}}{b_{\nu+2} - b_{\nu+1}}, \quad \ldots, \quad \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$$

sind sämtlich zwischen $l - \frac{1}{2}\varepsilon$ und $l + \frac{1}{2}\varepsilon$ enthalten, mithin ist, da die Nenner positiv sind, gleichzeitig

$$\left|\frac{a_n - a_\nu}{b_n - b_\nu} - l\right| < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Wir wollen ν so groß wählen, daß nicht nur diese Ungleichung erfüllt, sondern auch $b_\nu > 0$ ist. Das ist immer möglich, da nach der Voraussetzung b_n mit n unbegrenzt zunimmt. Aus eben diesem Grunde wird sich, wenn ν fixiert ist, n derart bestimmen lassen, daß $\frac{1}{2}\varepsilon b_n$ den absoluten Betrag von $a_\nu - l b_\nu$ übertrifft und dann mit wachsendem n beständig größer bleibt als dieser Wert. Wenn man nunmehr beachtet, daß

$$\frac{a_n}{b_n} - l = \frac{a_\nu - l b_\nu}{b_n} + \left(1 - \frac{b_\nu}{b_n}\right)\left(\frac{a_n - a_\nu}{b_n - b_\nu} - l\right)$$

ist, so findet man sofort

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - l\right| < \varepsilon, \quad \lim \frac{a_n}{b_n} = l.$$

142. Folgerungen. a) Wenn eine Folge einen endlichen

Grenzwert zuläßt, so konvergieren das arithmetische Mittel und das geometrische Mittel der n ersten Glieder für unendliches n nach demselben Grenzwert.

Auf Grund des letzten Theorems ist in der Tat

$$\lim \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \lim a_n, \tag{3}$$

wenn der rechts stehende Grenzwert existiert. Im folgenden werden wir sehen, daß der Grenzwert des Logarithmus einer Veränderlichen sich nicht unterscheidet von dem Logarithmus des Grenzwertes dieser Veränderlichen. Dies zugegeben erhält man, wenn in der vorigen Gleichung a_n durch $\log a_n$ ersetzt wird,

$$\lim \log \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = \lim \log a_n,$$

mithin

$$\lim \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = \lim a_n, \tag{4}$$

vorausgesetzt, daß der Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

b) Wenn in einer beliebigen Folge das Verhältnis eines Gliedes zu dem vorhergehenden nach einem endlichen Grenzwert konvergiert, so konvergiert auch die n-te Wurzel des n-ten Gliedes nach demselben Grenzwert.

Es genügt in der Tat in der Formel (4) a_n durch $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ zu ersetzen, um zu erhalten

$$\lim \sqrt[n]{a_1 \frac{a_2}{a_1} \frac{a_3}{a_2} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}}} = \lim \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

d. h.

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}. \tag{5}$$

143. Bemerkungen. a) In den obigen Sätzen wird die Existenz der Grenzwerte auf den rechten Seiten der Formeln (1), (2), (3), (4), (5) vorausgesetzt und daraus die Existenz der Grenzwerte auf den linken Seiten abgeleitet. Diese können aber auch existieren, wenn jene nicht existieren. Wir haben z. B. gesehen, daß, wenn der Grenzwert a der Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ existiert, auch derjenige der Folge

$$a_1, \ \tfrac{1}{2}(a_1 + a_2), \ \tfrac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3), \ \tfrac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4), \ \cdots$$

existiert und gleich a ist. Es kann aber bei der zweiten Folge ein Grenzwert vorhanden sein, ohne daß die erste einen solchen besitzt. So ergibt sich aus der Folge

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots \tag{6}$$

die andere

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{4}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{3}{6}, \tfrac{4}{7}, \tfrac{4}{8}, \ldots,$$

welche nach $\frac{1}{2}$ konvergiert, während die erste Folge nach keinem Grenzwert konvergiert.

b) Es lassen sich unendlich viele Folgen konstruieren, bei welchen dieses Verhalten zu konstatieren ist. Nehmen wir z. B. an, das System der ganzen und positiven Zahlen lasse sich in r Systeme $A_1, A_2, \ldots$ zerlegen derart, daß a_n den Grenzwert l_i zuläßt, wenn n das System A_i durchläuft. Es sei n_i die Anzahl der Elemente von A_i, welche nicht größer sind als n, und α_{in} die Summe der entsprechenden Glieder der betrachteten Folge. Für die Teilfolge, deren Glieder nach l_i konvergieren, hat man $\lim \frac{\alpha_{in}}{n_i} = l_i$, da n_i gleichzeitig mit n unbegrenzt zunimmt, weil sonst das System A_i nicht unendlich viele Zahlen enthalten würde. Nun kann man schreiben

$$\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \frac{\alpha_{1n}}{n_1} \cdot \frac{n_1}{n} + \frac{\alpha_{2n}}{n_2} \cdot \frac{n_2}{n} + \cdots + \frac{\alpha_{rn}}{n_r} \cdot \frac{n_r}{n}.$$

Es ist leicht einzusehen, daß der Grenzwert des Verhältnisses $\frac{n_i}{n}$, wenn er existiert, die Wahrscheinlichkeit[1] darstellt dafür, daß eine beliebig gewählte ganze Zahl dem System A_i angehört. Es sei p_i diese Wahrscheinlichkeit. Für unendliches n erhält man

$$\lim \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = l_1 p_1 + l_2 p_2 + \cdots + l_r p_r.$$

Z. B. hat man bei der Folge (6) zwei Systeme: A_1 bestehend aus den ungeraden Zahlen, A_2 aus den geraden Zahlen. Offenbar ist $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ und $l_1 = 1$, $l_2 = 0$. Der Grenzwert der zweiten Folge ist also $1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

c) Analoge Betrachtungen lassen sich für eine Folge von positiven Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ anstellen, aus der man die andere

$$a_1, \sqrt[2]{a_1 a_2}, \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}, \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}, \ldots$$

ableitet. Wenn die Systeme A, die Grenzwerte l, die Wahrscheinlichkeiten p existieren, so hat man

$$\lim \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = l_1^{p_1} l_2^{p_2} \ldots l_r^{p_r}.$$

144. Theorem V. Wenn a_n und b_n für unendlich zunehmendes n bezüglich nach a und b konvergieren, so hat man

$$\lim \frac{1}{n}(a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1) = ab.$$

---

1) Baltzer, Elemente der Mathematik, 2. Teil, § 29.

Ist ν das größte Ganze, welches in $\frac{1}{2}n$ enthalten ist, so hat man

$$\lim \frac{\nu}{n} = \lim \frac{n-\nu}{n} = \frac{1}{2}.$$

Da a_n nach a konvergiert, so konvergiert sein absoluter Betrag nach $|a|$, mithin ist (§ 142, a)

$$\lim \frac{1}{n}(|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_\nu|)$$

$$= \lim \frac{\nu}{n} \lim \frac{1}{\nu}(|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_\nu|) = \frac{1}{2}|a|.$$

Ist eine Zahl $\alpha > \frac{1}{2}|a|$ gewählt, so können wir also behaupten, daß von einem bestimmten Werte von n ab beständig

$$\frac{1}{n}(|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_\nu|) < \alpha$$

sein wird. Dies vorausgeschickt betrachte man den Ausdruck

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\{a_1(b_n - b) + a_2(b_{n-1} - b) + \cdots + a_\nu(b_{n-\nu+1} - b)\}.$$

Man kann annehmen, n sei bereits so groß gewählt, daß der absolute Betrag von $b_r - b$ kleiner als $\frac{\varepsilon}{\alpha}$ ist für alle Werte von r, welche $n - \nu$ übertreffen. Auf diese Weise hat man für einen gewissen Wert von n und für alle größeren Werte

$$|\sigma_n| < \frac{\varepsilon}{\alpha} \cdot \frac{|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_\nu|}{n} < \varepsilon,$$

mithin $\lim \sigma_n = 0$, d. h.

$$\lim \frac{1}{n}(a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_\nu b_{n-\nu+1}) = b \lim \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu).$$

Die rechte Seite ist gleich

$$b \lim \frac{\nu}{n} \lim \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu}{\nu} = \frac{1}{2}ab.$$

Also ist

$$\lim \frac{1}{n}(a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_\nu b_{n-\nu+1}) = \frac{1}{2}ab.$$

Analog würde man beweisen, daß

$$\lim \frac{1}{n}(a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_{\nu+1} b_{n-\nu}) = \frac{1}{2}ab$$

ist. Durch Addition ergibt sich

$$\lim \frac{1}{n}(a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1) = ab.$$

145. Theorem VI. Wenn b_n mit unendlich zunehmendem n abnehmend nach Null konvergiert, während $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ jede Grenze überschreitet, so hat man

$$\lim \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \lim \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n),$$

vorausgesetzt, daß der zweite Grenzwert existiert.

Man bemerke, daß der Satz evident sein und ohne alle Beschränkungen gelten würde, die wir b_n auferlegt haben, wenn der Grenzwert von a_n existierte. In diesem Falle hätte man in der Tat auf Grund des Theorems IV

$$\lim \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \lim a_n = \lim \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

Aber der vorliegende Satz ist gerade dann von Nutzen, wenn der Grenzwert von a_n nicht existiert. Wird

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n\alpha_n$$

gesetzt und angenommen, daß α_n für unendliches n nach dem Grenzwert α konvergiert, so können wir schreiben

$$\begin{aligned} & a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \\ &= \alpha_1 b_1 + (2\alpha_2 - \alpha_1) b_2 + \cdots + (n\alpha_n - (n-1)\alpha_{n-1}) b_n \\ &= \alpha_1 (b_1 - b_2) + 2\alpha_2 (b_2 - b_3) + \cdots + n\alpha_n (b_n - b_{n+1}) + n\alpha_n b_{n+1}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, wenn wir $c_n = n(b_n - b_{n+1})$ setzen und bemerken, daß

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n - nb_{n+1}$$

ist,

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n &= \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \cdots + \alpha_n c_n \\ &+ \alpha_n \{(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) - (c_1 + c_2 + \cdots + c_n)\}, \end{aligned}$$

ferner

$$(7) \qquad \begin{aligned} & \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \\ &= \alpha_n + \frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \left(\frac{\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \cdots + \alpha_n c_n}{c_1 + c_2 + \cdots + c_n} - \alpha_n \right). \end{aligned}$$

Da b_n abnimmt, so ist c_n positiv. Außerdem überschreitet $c_1 + c_2 + \cdots + c_n$ jede Grenze. In der Tat, ist l so groß gegeben, als man will, so kann man immer erreichen, daß $c_1 + c_2 + \cdots + c_n$ größer als l wird. Es genügt ν so groß zu wählen, daß $b_1 + b_2 + \cdots + b_\nu$ die Zahl l übertrifft und dann n derart zu bestimmen, daß

$$b_{n+1} < \frac{1}{\nu}(b_1 + b_2 + \cdots + b_\nu - l)$$

ist. Diese beiden aufeinander folgenden Bestimmungen sind möglich, da $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ jede Grenze überschreitet, während b_n mit wachsendem n nach Null konvergiert. Beachtet man, daß b_n beständig abnimmt, so ist

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n > b_1 + b_2 + \cdots + b_\nu + (n - \nu) b_{n+1} - nb_{n+1},$$

d. h.

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n > b_1 + b_2 + \cdots + b_\nu - \nu b_{n+1} > l.$$

Dies vorausgeschickt hat man (§ 141)

$$\lim \frac{\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \cdots + \alpha_n c_n}{c_1 + c_2 + \cdots + c_n} = \lim \frac{\alpha_n c_n}{c_n} = \lim \alpha_n.$$

Der zweite Teil der rechten Seite von (7) besteht also aus einem Faktor, der nach Null konvergiert, multipliziert mit

$$\frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = 1 - \frac{n b_{n+1}}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n},$$

einer Größe, die zwischen 0 und 1 enthalten ist. Also konvergiert der betrachtete Ausdruck nach Null, während der erste Teil der rechten Seite von (7) nach α konvergiert. Folglich ist

$$\lim \frac{\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_n b_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \alpha.$$

Übungen über die Berechnung von Grenzwerten.

146. Es sei eine positive Zahl a gegeben, und es werde für unendliches n der Grenzwert von a^n gesucht. Wenn $a = 1$ ist, so ist immer $a^n = 1$. Wenn $a < 1$ ist, so hat man $a^n = a^{n-1} \cdot a < a^{n-1}$, d. h. a^n nimmt beständig ab, wenn n wächst, und konvergiert daher auf Grund des Theorems I nach einem endlichen Grenzwert $l \geqq 0$. Läßt man nun aber in der obigen Identität n unendlich zunehmen, so erhält man $l = la$, d. h. $(1 - a)l = 0$, folglich $l = 0$. Für $a > 1$ hat man dagegen $a^n = a^{n-1} \cdot a > a^{n-1}$, mithin konvergiert a^n, indem es gleichzeitig mit n wächst, nach einem endlichen oder unendlichen Grenzwert. Aber der Grenzwert kann nicht endlich sein, da er einen positiven Wert l haben müßte, während aus der obigen Identität für unendliches n folgen würde $l = la$, $(a - 1)l = 0$, $l = 0$. Also ist

$$\lim a^n = 0 \text{ für } a < 1, \quad \lim a^n = \infty \text{ für } a > 1.$$

Übrigens ist jedes dieser beiden Resultate eine unmittelbare Folge des anderen (§ 123, d, e).

147. Noch leichter erledigt sich die Berechnung des Grenzwertes von $\frac{a^n}{n!}$. Die Identität

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{a}{n}$$

zeigt, welches auch der Wert von $a > 0$ sein mag, daß die betrachtete Zahl schließlich immer abnimmt, sobald nämlich n größer als a ist. Also konvergiert dieselbe nach einem Grenzwert $l \geqq 0$. Nun liefert aber die obige Identität, wenn man darin n ins Unendliche wachsen läßt, sofort $l = l \cdot 0 = 0$. Also ist

$$\lim \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Es ist ferner evident, daß dieses Resultat auch für $a < 0$ gilt.

148. Es werde angenommen, daß der Grenzwert a von a_n existiert. Welches ist dann der Grenzwert von a_n^m? Wenn m eine positive ganze Zahl ist, so konvergiert a_n^m als Produkt von m Veränderlichen, deren jede nach a konvergiert, nach a^m (§ 133). Wenn ferner m die inverse einer positiven ganzen Zahl m' ist und man setzt $a_n^m = b_n$, so ist $a_n = b_n^{m'}$. Da nun a_n nach $b^{m'}$ konvergiert, wenn b_n nach b konvergiert, so kann man (§ 138, a) umgekehrt behaupten, daß, wenn der Grenzwert a von a_n existiert, auch derjenige von b_n existiert, und man hat $a = b^{m'}$, d. h. $b = a^m$. Wenn m gleich p/q ist, wo p und q ganze positive Zahlen sind, so kann man schreiben

$$\lim a_n^m = \lim \sqrt[q]{a_n^p} = \sqrt[q]{a^p} = a^m.$$

Ist endlich m gleich einer negativen Rationalzahl $-m'$, so hat man (§ 134)

$$\lim a_n^m = \lim \frac{1}{a_n^{m'}} = \frac{1}{a^{m'}} = a^m.$$

Es ist also für jeden rationalen Wert des Exponenten $\lim a_n^m = (\lim a_n)^m$.

149. Wenn man annimmt, daß der Grenzwert a von a_n existiert, welches ist dann der Grenzwert von b^{a_n}? Wir wollen zunächst voraussetzen, die Zahl b, die immer positiv sein soll, sei kleiner als 1, und mit α_n den absoluten Betrag von $a_n - a$ bezeichnen. Wird eine beliebig kleine positive Zahl ε vorgelegt, so kann man (§ 146) einen Wert ν finden, von welchem ab $(1-\varepsilon)^\nu$ kleiner bleibt als b. Nach Fixierung von ν wähle man n derart, daß α_n kleiner wird als $1/\nu$ und bei zunehmendem n auch so bleibt. Es wird dann sein

$$1 - b^{\alpha_n} < 1 - (1-\varepsilon)^{\nu\alpha_n} < 1 - (1-\varepsilon) = \varepsilon.$$

Mithin ergibt sich nacheinander

$$\lim b^{\alpha_n} = 1, \quad \lim b^{a_n} = b^a, \quad \text{d. h.} \quad \lim b^{a_n} = b^{\lim a_n}.$$

Ist $b > 1$, so kann man schreiben

$$\lim b^{a_n} = \lim \frac{1}{b^{-a_n}} = \frac{1}{b^{-a}} = b^a.$$

150. Wenn man annimmt, daß a_n nach a konvergiert, welches ist dann der Grenzwert von $\log a_n$? Aus $\alpha_n = \log a_n$ folgt $a_n = b^{\alpha_n}$, wenn b die Basis des Logarithmensystems ist, welches man betrachtet. Wenn α_n nach einem Grenzwert α konvergiert, so konvergiert a_n nach b^α. Es existiert also (§ 138, a) umgekehrt der Grenzwert von α_n, wenn derjenige von a_n existiert, und man hat

$$a = b^\alpha, \quad \alpha = \log a.$$

Es ist also

$$\lim \log a_n = \log \lim a_n.$$

151. Wenn a und b für unendliches n die Grenzwerte von a_n und b_n sind, welches ist dann der Grenzwert von $a_n^{b_n}$? Wird $c_n = a_n^{b_n}$ gesetzt, so folgt daraus $\log c_n = b_n \log a_n$, mithin $\log c = b \log a$ und endlich $c = a^b$. Es ist also

$$\lim a_n^{b_n} = (\lim a_n)^{\lim b_n}. \tag{8}$$

152. Wenn man annimmt, daß a_n nach a konvergiert, welches ist dann der Grenzwert von $n(a_n - a_{n-1})$? Läßt man die Existenz dieses Grenzwertes l zu, so kann man schreiben (§ 141)

$$a = \lim \frac{n a_n}{n} = \lim \{n a_n - (n-1) a_{n-1}\} = \lim n (a_n - a_{n-1}) + \lim a_{n-1}$$

oder $a = l + a$, mithin $l = 0$. Entweder hat also $n(a_n - a_{n-1})$ keinen Grenzwert, oder es konvergiert nach Null. Es ist ferner leicht zu zeigen, daß das arithmetische Mittel seiner n ersten Werte immer nach Null konvergiert. In der Tat ist dieses Mittel

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) a_n - \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

und hat (§ 142, a) als Grenzwert $a - a$, d. h. Null.

153. Sind die positiven Zahlen a und $b > a$ gegeben, so werde mit a_1 ihr geometrisches Mittel, mit b_1 ihr arithmetisches Mittel bezeichnet, d. h. es werde

$$a_1 = \sqrt{ab}, \quad b_1 = \tfrac{1}{2}(a + b)$$

gesetzt. In analoger Weise wollen wir aus a_1 und b_1 die Zahlen a_2 und b_2 ableiten, aus diesen a_3 und b_3 u. s. f. Allgemein sei

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + b_n). \tag{9}$$

Offenbar ist $a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$ für jeden Wert von n, d. h.

$$a < a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < b_3 < b_2 < b_1 < b.$$

a_n wächst also mit zunehmendem n, bleibt aber beständig kleiner als b, während b_n abnimmt, aber immer größer als a bleibt. Daraus folgt (§ 136), daß a_n und b_n endliche Grenzwerte α und β haben. Es ergibt sich nun z. B. aus der zweiten der Relationen (9), wenn man n unbegrenzt zunehmen läßt, $\beta = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ und daher $\alpha = \beta$. Dieser gemeinsame Grenzwert von a_n und b_n heißt das arithmetisch-geometrische Mittel der Zahlen a und b. Durch ein analoges Verfahren beweist man, daß die nach dem Gesetz

$$a_{n+1} = \frac{2 a_n b_n}{a_n + b_n}, \quad b_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + b_n)$$

konstruierten Folgen als gemeinsamen Grenzwert das geometrische Mittel von a und b haben, welches man also auch das arithmetisch-harmonische Mittel dieser Zahlen nennen kann.

154. Es sei gegeben eine Folge von Zahlen derart, daß jedes Glied das arithmetische Mittel der beiden vorhergehenden ist. Dann ist klar, daß die Zahlen a_1, a_3, a_5, ... in einem Sinne variieren, während a_2, a_4, a_6, ... in entgegengesetztem Sinne aufeinander folgen. Da nun sowohl die einen wie die andern zwischen a und b bleiben, den Werten der beiden ersten Glieder der Folge, so müssen sie nach endlichen Grenzwerten konvergieren. Diese sind gleich. Das erkennt man sofort, wenn man in der Relation $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$ den Index n unendlich zunehmen läßt. Übrigens kann man direkt die Existenz des Grenzwertes konstatieren und gleichzeitig seinen Wert berechnen, indem man den Ausdruck des allgemeinen Gliedes sucht:

$$a_n = \frac{a+2b}{3} + (-1)^n \frac{b-a}{3 \cdot 2^{n-2}}.$$

Man sieht dann sofort, daß $\lim a_n = \frac{1}{3}(a+2b)$ ist.

155. Es ist hier eine kurze Digression notwendig, um gewisse Ungleichheiten zu beweisen, die bei verschiedenen Fragen von Nutzen sind. α_1, α_2, α_3, ... seien positive Zahlen kleiner als 1, und es werde mit $\sigma_{n,r}$ die Summe aller Produkte von je r der n ersten bezeichnet. Bekanntlich ist dann

$$(10)\quad (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\cdots(1-\alpha_n) = 1 - \sigma_{n,1} + \sigma_{n,2} - \cdots \pm \sigma_{n,n}.$$

Wir wollen zeigen, daß man immer schreiben kann

$$(11)\quad (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\cdots(1-\alpha_n) = 1 - \sigma_{n,1} + \sigma_{n,2} - \cdots \pm \theta\sigma_{n,r},$$

wo θ zwischen 0 und 1 liegt. Mit andern Worten: Wenn man auf der rechten Seite von (10) die Glieder fortläßt, die hinter $\sigma_{n,r}$ kommen, so erhält man etwas Kleineres oder etwas Größeres als links steht, je nachdem r ungerade oder gerade ist. Um dies zu beweisen, genügt es offenbar zu zeigen, daß die für $n = r$ augenscheinlich richtige Gleichung (11), falls sie für einen gewissen Wert von n gilt, auch bestehen bleibt, wenn man n in $n+1$ verwandelt. Multipliziert man aber die beiden Seiten von (11) mit $1 - \alpha_{n+1}$, so kommt

$$\begin{aligned}(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\cdots(1-\alpha_{n+1}) &= 1 - \sigma_{n,1} + \sigma_{n,2} - \cdots \pm \theta\sigma_{n,r}\\ &\quad - \alpha_{n+1} + \alpha_{n+1}\sigma_{n,1} - \cdots \pm \alpha_{n+1}\sigma_{n,r-1} \mp \theta\alpha_{n+1}\sigma_{n,r}.\end{aligned}$$

Inzwischen bemerke man, daß $\sigma_{n+1,r} = \sigma_{n,r} + \alpha_{n+1}\sigma_{n,r-1}$ ist. Dann folgt

$$\begin{aligned}(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\cdots(1-\alpha_{n+1}) &= 1 - \sigma_{n+1,1} + \sigma_{n+1,2} - \cdots \mp \sigma_{n+1,r-1}\\ &\quad \pm \left(\alpha_{n+1}\sigma_{n,r-1} + \theta(1-\alpha_{n+1})\sigma_{n,r}\right).\end{aligned}$$

Die Größe in Klammern, welche offenbar positiv ist, ist nicht größer als

$$\alpha_{n+1}\sigma_{n,r-1} + (1-\alpha_{n+1})\sigma_{n,r} = \sigma_{n+1,r} - \alpha_{n+1}\sigma_{n,r} < \sigma_{n+1,r}.$$

Man kann ihr also die Form $\theta'\sigma_{n+1,r}$ geben, wo θ' zwischen 0 und 1 liegt.

156. Wir wollen die Formel (11) benutzen, um zu untersuchen, wie $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ mit unendlich zunehmendem n variiert. Wenn α eine positive Zahl kleiner als 1 ist, so hat man $(1-\alpha)^n > 1 - n\alpha$ und im besondern für $\alpha = 1/n^2$

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{1}{n}, \text{ d. h. } \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1-\frac{1}{n}\right)^{1-n}.$$

Beachtet man ferner, daß

$$(12) \qquad \left(1-\frac{1}{n}\right)^{1-n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

ist, so ergibt sich

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Die betrachtete Zahl wächst also beständig. Es ist jedoch nach derselben Formel (11)

$$(1-\alpha)^n > 1 - \frac{n}{1}\alpha + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\alpha^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^3$$

und im besondern für $\alpha = \frac{1}{n}$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n > \frac{n^2-1}{3n^2} = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) > \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Daraus ergibt sich unter Berücksichtigung der Identität (12)

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1} > \frac{1}{3}, \quad \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < 3.$$

Wir sehen auf diese Weise, daß die Zahl $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ gleichzeitig mit n wächst, daß sie aber die 3 nicht überschreiten kann. Mithin muß sie nach einem endlichen Grenzwert konvergieren. Man bezeichnet ihn mit e, und er hat in der Mathematik eine außerordentliche Wichtigkeit. Es ist also

$$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

für unendlich zunehmendes n. Aber es ist zu bemerken, daß dieselbe Gleichung besteht, wenn n nach $-\infty$ konvergiert. Setzt man nämlich $n = -m$, wo m ganz und positiv ist und unendlich zunimmt, so hat man nach der Identität (12)

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim\left(1-\frac{1}{m}\right)^{1-m} = \lim\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1} = e.$$

157. Wenn man annimmt, daß a_n für unendliches n nach Unendlich konvergiert, welches ist dann der Grenzwert von $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$? Wenn m das größte in a_n enthaltene Ganze ist, so hat man immer $m < a_n < m+1$, mithin wächst $m+1$ (folglich auch m) mit n ins Unendliche. Inzwischen ist

$$\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^m<\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}<\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$$

oder

$$\frac{m+1}{m+2}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}<\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}<\frac{m+1}{m}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}.$$

Wenn man sich daher an die Schlußbemerkung des § 125 erinnert, so sieht man, daß $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$ zwischen zwei Zahlen eingeschlossen ist, die nach e konvergieren. Es ist also (§ 130)

$$\lim\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e.$$

Offenbar gelangt man zu demselben Resultat unter der Voraussetzung, daß a_n nach $-\infty$ konvergiert.

158. Wenn man annimmt, daß der Grenzwert a von a_n existiert, welches ist dann der Grenzwert von $\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n$? Setzen wir $n=a_n\alpha_n$. Wenn $a \neq 0$ ist, so ist klar (§ 123, c), daß α_n nach $\pm\infty$ konvergiert. Inzwischen hat man

$$\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)^{a_n\alpha_n}=\left(\left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n}\right)^{a_n},$$

mithin auf Grund von (8)

$$\lim\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n=e^a.$$

Dieses Resultat bleibt bestehen für $a=0$. Betrachten wir in der Tat nur die positiven Glieder oder nur die negativen Glieder der Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$, so gilt die angestellte Schlußweise auch noch, und man erhält $e^0=1$ als Grenzwert. Für die verschwindenden Glieder, wenn es solche gibt, ist die betrachtete Zahl genau gleich 1.

159. Wenn man annimmt, daß der Grenzwert a von a_n existiert, welches ist dann der Grenzwert von $n\left(\sqrt[n]{a_n}-1\right)$? Aus

$$b_n=n\left(\sqrt[n]{a_n}-1\right)$$

entnimmt man

$$a_n=\left(1+\frac{b_n}{n}\right)^n.$$

Läßt man jetzt n nach $+\infty$ konvergieren, so ergibt sich $a=e^b$, d. h. $b=\log a$, wobei das Symbol log hier wie auch sonst in diesem Lehrbuch einen natürlichen oder Neperschen Logarithmus bezeichnet, d. h. einen Logarithmus in dem System, welches als Basis die Zahl e hat. Man beachte, daß der Grenzwert von b_n existiert (§ 138, a), wenn derjenige von a_n existiert. Es ist also

$$\lim n\left(\sqrt[n]{a_n}-1\right)=\log a.$$

160. Man betrachte die Zahl

$$l_n = \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n,$$

welche ein Mittel zwischen a und b darstellt, das für $n = 1$ mit dem arithmetischen Mittel, für $n = 2$ mit dem arithmetischen Mittel des arithmetischen und des geometrischen Mittels von a und b zusammenfällt u. s. f. Es ist leicht zu zeigen, daß für unendlich zunehmendes n der Grenzwert von l_n das geometrische Mittel $\sqrt{ab}$ wird. Man schreibe in der Tat

$$l_n = \left(\frac{\sqrt[n]{a} - 1 + \sqrt[n]{b} - 1}{2} + 1\right)^n.$$

Setzt man

$$c_n = \tfrac{1}{2}\left\{n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) + n\left(\sqrt[n]{b} - 1\right)\right\},$$

so hat man $l_n = \left(1 + \frac{c_n}{n}\right)^n$. Jetzt beachte man, daß (§ 159)

$$c = \lim c_n = \tfrac{1}{2}(\log a + \log b) = \log \sqrt{ab}$$

ist. Dann erhält man (§ 158) $l = e^c = \sqrt{ab}$. Es ist also für unendliches n

$$\lim \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = \sqrt{ab}.$$

161. Der Grenzwert von $\sqrt[n]{n}$ für unendliches n läßt sich sofort berechnen (§ 142, b), indem man schreibt

$$\lim \sqrt[n]{n} = \lim \frac{n+1}{n} = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Dasselbe Resultat ergibt sich, wenn man zeigt, daß der Logarithmus von $\sqrt[n]{n}$ nach Null konvergiert. Hierzu gelangt man unter Anwendung des Theorems IV:

$$\lim \frac{\log n}{n} = \lim \left\{\log(n+1) - \log n\right\} = \lim \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0.$$

Ist allgemeiner eine noch so große Zahl p fixiert, so hat das Verhältnis von $(\log n)^p$ zu n den Grenzwert Null, woraus, wenn man dieses Verhältnis zur Potenz $q = 1/p$ erhebt, sich folgern läßt, daß das Verhältnis von $\log n$ zu n^q, wie klein auch die positive Zahl q sein mag, immer nach dem Grenzwert Null konvergiert. Diese Sätze werden wir in allgemeinerer Form in einem der nächsten Paragraphen aufstellen.

162. Man betrachte eine Folge von Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$, welche beständig wachsend jede Grenze überschreiten, und es sei

$$\lim n(a_n - a_{n-1}) = l. \tag{13}$$

Nach dem, was wir in § 152 gesehen haben, bedeutet die Voraussetzung $l \neq 0$ das Ausschließen der Möglichkeit, daß a_n nach einem endlichen

Grenzwert konvergiert. Man kann aber noch etwas mehr behaupten, daß nämlich die Gleichung (13) mit $l \neq 0$ schon die Bedingung dafür enthält, daß a_n nach $\pm\infty$ konvergiert. In der Tat erhält man unter Anwendung des Theorems IV

$$\lim \frac{a_n}{\log n} = \lim \frac{a_n - a_{n-1}}{\log n - \log(n-1)} = \lim \frac{n(a_n - a_{n-1})}{\log\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}} = l.$$

Wenn also $l > 0$ ist, und man wählt eine positive Zahl $\alpha < l$, so wird man schließlich haben $a_n > \alpha \log n$, folglich ist $\lim a_n = \infty$. Ebenso sieht man sofort, daß für $l < 0$ $\lim a_n = -\infty$ ist. Dies erkennt man auch, wenn man ausdrückt, daß nach l das arithmetische Mittel (vgl. § 152) der n ersten Werte von $n(a_n - a_{n-1})$ konvergieren muß:

$$\lim \left(a_n - \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right) = l.$$

Würde a_n nach einem endlichen Grenzwerte konvergieren, so hätte man $l = 0$. Wenn also nicht $l = 0$ ist, so muß a_n, welches schließlich mit n beständig wächst oder beständig abnimmt, je nachdem $l > 0$ oder $l < 0$ ist, im ersten Falle nach $+\infty$, im zweiten nach $-\infty$ konvergieren.

163. Dies vorausgeschickt wollen wir zeigen, daß, wie groß auch p sein mag, das Verhältnis von a_n^p zu n immer die Null als Grenzwert hat. Zunächst bemerke man, daß

$$\lim \frac{a_{n-1}}{a_n} = \lim \left(1 - \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n}\right) = 1$$

ist, mithin

$$\lim \frac{a_n^p - a_{n-1}^p}{(a_n - a_{n-1})\, a_n^{p-1}} = \lim \left\{1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^{p-1}\right\} = p.$$

Nun liefert aber das Theorem IV

$$\lim \frac{a_n^p}{n} = \lim (a_n^p - a_{n-1}^p) = p \lim (a_n - a_{n-1})\, a_n^{p-1} = pl \cdot \lim \frac{a_n^{p-1}}{n}.$$

Wendet man mehrere Male nacheinander dieses Resultat an, so ergibt sich

$$\lim \frac{a_n^p}{n} = pl \cdot \lim \frac{a_n^{p-1}}{n} = p(p-1)\, l^2 \cdot \lim \frac{a_n^{p-2}}{n} = \cdots = p!\, l^p \cdot \lim \frac{1}{n} = 0.$$

Es ist ferner klar, daß dieser Schluß auch gilt, wenn p keine ganze Zahl ist, da es genügt p durch eine ganze Zahl $p' > p$ zu ersetzen und zu bemerken, daß man hat $a_n^p < a_n^{p'}$, sobald n genügend groß ist, damit $a_n > 1$ ist und bleibt. Endlich genügt es, wie klein auch die positive Zahl q sein mag, $p = \frac{1}{q}$ zu nehmen, um zu erhalten (§ 148)

$$\lim \frac{a_n}{n^q} = \lim \left(\frac{a_n^p}{n}\right)^q = \left(\lim \frac{a_n^p}{n}\right)^q = 0.$$

Man bemerke, daß für $q = 0$ die linke Seite ∞ ist.

164. Den Grenzwert von $\frac{1}{n}\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}$ für unendliches n zu finden. Setzt man

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{n}\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdots n},$$

so ergibt sich

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!\,n^n}{n!\,(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n,$$

mithin

$$\lim\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}.$$

Also ist (§ 142, b)

$$\lim\frac{1}{n}\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} = \frac{1}{e}\cdot$$

165. Den Grenzwert von $\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots 2n}$ für unendliches n zu finden. Setzt man

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots 2n},$$

so läßt sich daraus folgern

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2(2n+1)\,n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{4n+2}{n+1}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Mithin ist

$$\lim\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots 2n} = \frac{4}{e}\cdot$$

Zu demselben Resultat gelangt man unter Berücksichtigung der Identität

$$\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots 2n} = \frac{4\left(\frac{1}{2n}\sqrt[2n]{(2n)!}\right)^2}{\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}}.$$

166. Wenn man den Grenzwert von

$$\frac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$$

für unendliches n sucht, so erkennt man sofort, daß man ein bekanntes Theorem anwenden kann, wenn p größer als -1 ist, da in diesem Falle n^{p+1} mit n beständig wachsend jede Grenze überschreitet. Folglich ist

$$\lim\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}} = \lim\frac{n^p}{n^{p+1}-(n-1)^{p+1}} = \lim\frac{1}{n\left\{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{p+1}\right\}}$$

$$= \lim\frac{1}{(p+1)\left(1-\frac{p}{2n}+\cdots\right)} = \frac{1}{p+1}.$$

167. Es werde verlangt, den Grenzwert von

$$\frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1}$$

für unendliches n zu finden. Wendet man wieder das Theorem IV auf den gegebenen Ausdruck an, nachdem man ihn auf einen einzigen Nenner gebracht hat, so erhält man

$$\lim \frac{(p+1)(1^p + 2^p + \cdots + n^p) - n^{p+1}}{(p+1)\, n^p} = \lim \frac{(p+1)\, n^p - \left\{ n^{p+1} - (n-1)^{p+1} \right\}}{(p+1)\left\{ n^p - (n-1)^p \right\}},$$

und die rechte Seite ist gleichwertig mit

$$\lim \frac{n^p - \left(n^p - \frac{1}{2}\, p\, n^{p-1} + \cdots\right)}{p n^{p-1} - \frac{1}{2}\, p(p-1)\, n^{p-2} + \cdots} = \lim \frac{\frac{1}{2} - \frac{p-1}{6n} + \cdots}{1 - \frac{p-1}{2n} + \cdots} = \frac{1}{2}.$$

Es ist also

$$\lim \left(\frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1} \right) = \frac{1}{2}.$$

168. Es sei die Aufgabe gestellt, für unendliches n den Grenzwert zu finden von

$$\frac{n}{p-1} - \left\{ \left(\frac{n}{n+1}\right)^p + \left(\frac{n}{n+2}\right)^p + \left(\frac{n}{n+3}\right)^p + \cdots \right\}.$$

Der Ausdruck in Klammern besteht aus unendlich vielen Gliedern, und wir wissen noch nicht, welches seine Bedeutung sein kann. Wir werden aber sehr bald sehen, daß er für $p > 1$ eine bestimmte Zahl darstellt, die mit n veränderlich ist, und wir werden außerdem erkennen, daß diese Zahl, von dem Faktor n^p befreit, nach Null konvergiert, wenn n ins Unendliche wächst. Wenn wir nun mit l_n den vorgelegten Ausdruck bezeichnen, so können wir sagen, daß die Zahl

$$n^{-p} l_n = \frac{1}{(p-1)\, n^{p-1}} - \left\{ \frac{1}{(n+1)^p} + \frac{1}{(n+2)^p} + \frac{1}{(n+3)^p} + \cdots \right\}$$

für unendlich zunehmendes n den Grenzwert Null hat. Um jetzt den Grenzwert l zu finden, wenden wir das Theorem III an:

$$l = \lim \frac{n^{-p} l_n}{n^{-p}} = \lim \frac{n^{-p} l_n - (n+1)^{-p} l_{n+1}}{n^{-p} - (n+1)^{-p}} = \lim \frac{\frac{n+1}{p-1}\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{p-1} - 1\right\} - 1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p - 1}$$

$$= \lim \frac{\frac{p}{2n} + \frac{p(p-2)}{6n^2} + \cdots}{\frac{p}{n} + \frac{p(p-1)}{2n^2} + \cdots} = \frac{1}{2}.$$

In den letzten drei Nummern wird p als ganze Zahl vorausgesetzt. Wir werden jedoch sehen, wenn wir uns andere Kenntnisse angeeignet haben, daß diese Beschränkung sich aufheben läßt.

Grenzwerte einer Zahlenmenge.

169. Zu einer weiteren Fassung des Begriffes „Grenzwert" werden wir gelangen, indem wir eine beliebige Menge von Zahlen betrachten, die alle auf einmal gegeben sind, anstatt, wie wir es bisher angenommen haben, nach einem bestimmten Gesetze aufeinander zu folgen. Die Zahlen einer Folge bilden, wenn man von der Ordnung, in welcher sie aufeinander folgen, absieht, eine Menge; umgekehrt lassen sich aber keineswegs die Zahlen einer Menge immer so ordnen, daß man sagen kann, welches die Zahl ist, die hinter einer andern kommt. Das einfachste Beispiel liefert uns die Menge aller Zahlen, die zwischen zwei gegebenen Zahlen a und b enthalten sind. Eine solche Menge heißt ein Intervall und wird mit (a, b) bezeichnet. Die Zahlen a und b nennt man die Grenzen des Intervalls, und sie sind, wenn nicht das Gegenteil ausdrücklich gesagt wird, als mit zu dem Intervall gehörig zu betrachten. Die kleinere heißt die untere Grenze, die andre die obere Grenze des Intervalls, und der absolute Betrag ihrer Differenz ist das Maß für die Größe des Intervalls. Es können auch unendlich große Intervalle vorkommen, d. h. Intervalle, die so groß sind, als man will. So hat man z. B. unter (a, ∞) ein Intervall (a, b) zu verstehen, in welchem es erlaubt sein soll, b beliebig große Werte zu erteilen, und jenes Intervall besteht also aus allen Zahlen, die nicht kleiner als a sind, wie $(-\infty, b)$ aus allen denjenigen, die nicht größer als b sind. Es kann auch der Fall eintreten, daß man ein Intervall zu betrachten hat, welches so klein ist, als man will. Um auszudrücken, daß irgend eine Eigenschaft in einem derartigen Intervall stattfindet, von welchem a die untere oder die obere Grenze ist, sagt man, daß dieselbe rechts bezw. links von a bestehe, wobei man immer a ausgeschlossen denkt; und man sagt, sie sei in der Umgebung von a vorhanden, wenn sie sowohl rechts als auch links von a stattfindet, ohne jedoch auszuschließen, daß sie manchmal nur auf einer Seite von a bestehen kann. Es ist also mit andern Worten die rechte (linke) Seite von a der Inbegriff aller Zahlen, die größer (kleiner) sind als a und so nahe an a liegen, als man will; und die Umgebung von a ist der Inbegriff aller Zahlen, die so nahe an a liegen als man will, mit Ausnahme von a. Wenn man diese Ausschließung nicht machen will, so muß man ausdrücklich sagen, daß man die rechte oder die linke Seite oder die Umgebung einer gegebenen Zahl und diese Zahl selbst betrachtet.

170. Eine Menge heißt endlich, wenn die Zahlen, welche sie bilden, einem endlichen Intervall angehören. Offenbar kann man ein solches Intervall (a, b) beliebig groß machen, indem man a abnehmen und b zunehmen läßt, ohne daß es aufhört alle Zahlen der Menge zu enthalten. Es ist aber nicht möglich, dasselbe beliebig klein zu machen, wenn die Menge nicht bloß eine einzige Zahl enthält. Wenn a wächst und b abnimmt, so kann es sein (und wir werden weiter unten sehen, daß dies immer der Fall ist), daß man schließlich zwei Zahlen λ und μ trifft von folgender Beschaffenheit: In dem Intervall (λ, μ) liegt wie in (a, b) jede Zahl der Menge; läßt man aber, wenn auch noch so wenig, λ wachsen oder μ abnehmen, so enthält das neue Intervall nicht mehr alle jene Zahlen. Die Grenzen dieses kleinsten Intervalles (λ, μ) nennt man die untere Grenze und die obere Grenze der betrachteten Menge, und man kann folgende Definition aufstellen: Die untere (obere) Grenze einer Zahlenmenge ist die größte (kleinste) unter allen Zahlen, welche nicht größer (nicht kleiner) sind als irgend eine Zahl der Menge. Jede dieser Grenzen gehört nicht immer der gegebenen Menge an. Aber es ist klar, daß sie, wenn es der Fall ist, die kleinste oder die größte Zahl der Menge darstellt. Gibt es umgekehrt eine solche kleinste (oder größte) Zahl, so ist sie notwendig die untere (oder die obere) Grenze der betrachteten Menge. So hat z. B. eine Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ von wachsenden Zahlen, die nach a konvergieren, die Grenzen a_1 und a. Während aber a_1 die kleinste Zahl der Menge ist, kann man a nicht als die größte bezeichnen, da sie nicht zu den gegebenen Zahlen gehört, weil beständig $a_n < a$ ist. Also ist a nur die obere Grenze, und in der Tat wird man, wenn a' irgend eine Zahl kleiner als a ist, schließlich immer $a_n > a'$ haben, falls man n genügend groß wählt. Daraus folgt, daß unter den Zahlen, die von keiner Zahl der Folge übertroffen werden, a die kleinste ist. Dagegen existiert eine kleinste und eine größte Zahl bei jeder Folge von Zahlen, die nach einem endlichen Grenzwert konvergieren, indem sie um denselben oszillieren. Ebenso ist die untere (obere) Klasse einer Irrationalzahl a eine Menge von Rationalzahlen, unter denen es nach der Definition von a (§ 103) keine größte (kleinste) gibt; und eben aus diesem Grunde (§ 112) hat die genannte Klasse a als obere (untere) Grenze.

171. Hilfssatz. Jedes Kriterium, welches eine Zerlegung des Inbegriffs aller Zahlen in zwei Klassen gestattet derart, daß die Zahlen der einen Klasse kleiner sind als die der andern, bestimmt eine Zahl, welche entweder in der unteren Klasse die größte oder in der oberen Klasse die kleinste ist.

Nehmen wir in der Tat eine Zahl a in der unteren Klasse, eine Zahl b in der oberen Klasse, und teilen wir durch die Zahl $c = \frac{1}{2}(a + b)$

das Intervall (a, b) in zwei Teile. Je nachdem c der unteren oder der oberen Klasse angehört, wollen wir das Intervall (c, b) oder (a, c) betrachten und es immer mit (a_1, b_1) bezeichnen, so daß, im ersten Falle $a_1 = c > a$, $b_1 = b$ und im zweiten $a_1 = a$, $b_1 = c < b$ ist. In beiden Fällen ist

$$a_1 \geqq a, \quad b_1 \leqq b, \quad b_1 - a_1 = \tfrac{1}{2}(b - a).$$

Wie aus (a, b) das Intervall (a_1, b_1) abgeleitet worden ist, kann man aus diesem in derselben Weise ein Intervall (a_2, b_2) ableiten, aus dem letzteren ein neues (a_3, b_3) u. s. f. Man gelangt so zu einem Intervall (a_n, b_n), welches sich, wie groß auch n sein mag, immer noch genau so verhält wie (a, b), insofern nämlich die untere Grenze des Intervalls der unteren und die obere Grenze der oberen Klasse angehört. Inzwischen hat man

$$a \leqq a_1 \leqq a_2 < \ldots, \quad b \geqq b_1 \geqq b_2 \geqq \ldots, \quad b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}$$

und erkennt, daß die Zahlen a_n, die immer kleiner bleiben als b, mit n wachsen oder wenigstens nicht abnehmen. Sie konvergieren also (§ 136) nach einem endlichen Grenzwert ξ, nach welchem auch die b_n konvergieren, da mit unendlich zunehmendem n

$$\lim (b_n - a_n) = \lim \frac{b - a}{2^n} = 0, \quad \lim b_n = \lim a_n + \lim (b_n - a_n) = \xi$$

ist. Dieses ξ ist nun aber die durch die beiden Klassen bestimmte Zahl. Wird $x < \xi$ beliebig fixiert, so muß es, da $\lim a_n = \xi$ ist, möglich sein, n so groß zu wählen, daß $a_n > x$ ist, und x gehört daher wie a_n zur unteren Klasse. In derselben Weise zeigt man, daß jede Zahl, die größer ist als ξ, der oberen Klasse angehört. Nun ist aber ξ selbst notwendig in einer der beiden Klassen enthalten, da wir angenommen haben, daß sich die Klassifikation auf alle Zahlen erstreckte. Ferner ist klar, daß ξ in der Klasse, zu welcher es gehört, die größte oder die kleinste Zahl ist; denn wenn man seinen Wert auch noch so wenig vergrößert bezw. verkleinert, fällt es in die andre Klasse.

172. Theorem I. Jede endliche Menge hat eine obere und eine untere Grenze.

Wir wollen in eine Klasse, die wir die untere nennen, alle Zahlen werfen, die nicht größer sind als irgend eine Zahl der Menge, und in die andre diejenigen, welche irgend eine Zahl der Menge übertreffen. Jede Zahl a der unteren Klasse ist kleiner als jede Zahl b der oberen Klasse. Wenn wir nämlich sagen, b gehöre dieser Klasse an, so muß es in der Menge wenigstens eine Zahl α geben, die kleiner als b ist, und da andrerseits a die Zahl α nicht übertreffen kann, so ist $a < \alpha < b$. Die in dieser Weise gemachte Klassifikation aller Zahlen definiert auf Grund des vorigen Hilfssatzes eine Zahl λ. Nun kann es in der oberen Klasse keine Zahl b geben, die kleiner ist als alle andern, da jede Zahl b', für welche $\alpha < b' < b$ ist, derselben Klasse angehört. Also ist λ die größte Zahl in der unteren Klasse, d. h. die größte unter den Zahlen, die nicht größer sind als irgend eine Zahl der Menge. Sie ist also die untere Grenze. In derselben Weise beweist man die Existenz der oberen Grenze.

173. Ausdehnung des Begriffes Grenzwert. Wenn eine Menge aus unendlich vielen verschiedenen Zahlen besteht, die nach einem endlichen Grenzwert konvergieren, so ist dieser Grenzwert offenbar durch den Umstand charakterisiert, daß es in seiner Umgebung unendlich viele Zahlen der Menge gibt. Hieraus ergibt sich von selbst der Gedanke, in dem allgemeinen Falle als Grenzwert jede Zahl zu bezeichnen, welche die angegebene Eigenschaft hat. Die Folgen von Zahlen, die nach einem Grenzwert konvergieren, sind dann insofern von ganz besonderer Art, als jede von ihnen nur einen Grenzwert zuläßt. Eine Menge kann also mehrere Grenzwerte haben und auch unendlich viele Grenzwerte. Es kann sogar vorkommen, daß alle ihre Zahlen und außerdem noch andere Zahlen Grenzwerte sind, wofür ein ganz einfaches Beispiel der Inbegriff aller rationalen Zahlen liefert, da immer unendlich viele solche Zahlen in die Umgebung einer beliebigen rationalen oder irrationalen Zahl fallen. Man bemerke, daß, wenn auf der rechten (linken) Seite eines Grenzwertes ξ unendlich viele Zahlen einer Menge liegen, ξ die untere (obere) Grenze derjenigen Zahlen der Menge ist, die größer (kleiner) als ξ sind. Umgekehrt sind die untere Grenze und die obere Grenze, wenn sie nicht zu der Menge gehören, Grenzwerte für dieselbe.

174. Theorem II. Jede endliche Menge, die aus unendlich vielen Zahlen besteht, hat mindestens einen Grenzwert.

In der Tat, wenn wir das Intervall (a, b), welches alle Zahlen der Menge enthält, wie in § 171 halbieren, so muß es offenbar wenigstens in einem der beiden Teilintervalle noch unendlich viele Zahlen der Menge geben. Ein solches Intervall, welches halb so groß wie das vorige ist, werde mit (a_1, b_1) bezeichnet, und aus ihm leite man in analoger Weise eine Folge von Intervallen (a_n, b_n) ab, deren Grenzen dann, wie wir gesehen haben, nach einem gemeinsamen Grenzwert ξ konvergieren. Ist nun eine positive Zahl h fixiert, so muß es möglich sein, eine Zahl n zu finden, so groß, daß $a_n > \xi - h$ ist und gleichzeitig $b_n < \xi + h$. Alsdann ist das Intervall (a_n, b_n) in $(\xi - h, \xi + h)$ enthalten, und es fallen in dieses wie in (a_n, b_n) unendlich viele Zahlen der Menge, und zwar für beliebig kleine Werte von h. Also ist ξ ein Grenzwert.

175. Theorem III. Jede endliche Menge, die aus unendlich vielen Zahlen besteht, hat immer einen kleinsten Grenzwert und einen größten Grenzwert.

Die Grenzwerte einer Menge, die in dem Intervall (λ, μ) und in keinem kleineren enthalten ist, bilden eine endliche Menge und haben folglich eine untere Grenze $\lambda_0 \geqq \lambda$ und eine obere $\mu_0 \leqq \mu$. Um das Theorem zu beweisen, genügt es, zu zeigen, daß diese Zahlen λ_0 und μ_0 ebenfalls Grenzwerte der gegebenen Menge sind. Für λ_0 liegt dies auf der Hand, wenn es gelingt $x (> \lambda_0)$ so nahe an λ_0 zu wählen, daß das Intervall (λ_0, x) unter Ausschluß der unteren Grenze keinen Grenzwert enthält. Ist das nicht möglich, so bedeutet es, daß in das Innere von (λ_0, x), wie sehr sich auch x der Zahl λ_0 nähern mag, immer Grenzwerte und mit diesen unendlich viele Zahlen der gegebenen Menge fallen. Daraus folgt, daß λ_0 ein Grenzwert dieser Menge ist. Dasselbe läßt sich von μ_0 zeigen.

176. Um zu zeigen, wie die größere Allgemeinheit der Begriffe eine klarere und leichtere Erfassung der Wahrheiten ermöglicht, wollen wir bemerken, in welcher Weise sich aus dem Theorem II unmittelbar der in § 137 aufgestellte Satz ergibt. Wenn die Zahlenmenge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ nicht nach der positiven und nach der negativen Seite hin endlich ist, so kann man offenbar aus ihr eine Folge von Zahlen herausgreifen, die nach $+\infty$ oder nach $-\infty$ konvergieren. Ist dagegen die Menge endlich, so gibt es wenigstens eine Zahl ξ, in deren Umgebung unendlich viele Zahlen der Folge liegen. Ist dies z. B. auf der rechten Seite von ξ der Fall, so kann man immer von einer Zahl a_r ausgehend, die größer als ξ ist, eine zweite $a_s < a_r$ finden, dann eine neue $a_t < a_s$ u. s. f. Man erhält dadurch aus der gegebenen Folge eine andre $a_r, a_s, a_t, \ldots$, die nach einem Grenzwert konvergiert. Übrigens ist dieser Hilfssatz zum Beweise des Theorems in § 139 nicht mehr nötig, da sich aus der selbstverständlichen Bemerkung, daß die Gleichheit zwischen dem kleinsten und dem größten Grenzwert notwendig und hinreichend für die Existenz eines einzigen Grenzwertes ist, leicht die bekannte notwendige und hinreichende Bedingung dafür ableiten läßt, daß die Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ nach einem endlichen Grenzwert konvergieren. In der Tat, wenn es für einen positiven und beliebig kleinen Wert von ε gelingt, eine Zahl ν zu finden derart, daß für $n', n'' > \nu$ immer $|a_{n'} - a_{n''}| < \varepsilon$ ist, so fallen die Zahlen $a_{\nu+1}, a_{\nu+2}, \ldots$ sämtlich in das Intervall $(a_{\nu+1} - \varepsilon, a_{\nu+1} + \varepsilon)$. Mithin kann es nur in diesem Intervall einen Grenzwert ξ geben, und nach § 174 gibt es tatsächlich einen. Es kann kein andrer Grenzwert ξ' existieren, sonst könnte man ε nicht kleiner als $\frac{1}{2}|\xi - \xi'|$ wählen.

177. Bei gewissen Fragen sind die Zahlen λ_0 und μ_0 von größerer Wichtigkeit als λ und μ. Sie ändern sich nicht, wie es bei λ und μ geschehen kann, wenn in der gegebenen Menge eine oder mehrere Zahlen unterdrückt werden, weil diese Unterdrückungen keinen Grenzwert aufheben. Wenn nicht $\lambda_0 = \lambda$ ist, so können in das Intervall (λ, x) für $x < \lambda_0$ offenbar nicht unendlich viele Zahlen der Menge fallen, während dies sicher für $x > \lambda_0$ der Fall ist. Eine analoge Bemerkung läßt sich für μ_0 machen. Also sind λ_0 und μ_0 bezüglich die obere und die untere Grenze derjenigen Zahlen x, für welche in (λ, x) oder in (x, μ) nicht unendlich viele Zahlen der betrachteten Menge fallen. Dadurch ist nicht ausgeschlossen, daß außerhalb des Intervalles (λ_0, μ_0), d. h. auf der linken Seite von λ_0 und auf der rechten Seite von μ_0 auch unendlich viele Zahlen dieser Menge liegen können. Es ist ja z. B. möglich, daß λ_0 nicht zu der Menge der Zahlen x gehört, deren obere Grenze es ist.

178. Um die vorhergehenden Betrachtungen noch klarer zu machen, wollen wir uns denken, daß in der unbegrenzten Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$, die wir nach der positiven und nach der negativen Seite hin als endlich voraussetzen, die ersten n Glieder unterdrückt werden. Die Restfolge $a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots$ gestattet immer eine untere Grenze $\lambda_n \geqq \lambda_{n-1}$ und eine obere Grenze $\mu_n \leqq \mu_{n-1}$. Die Zahlen $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$, welche nie abnehmen und kleiner sind als μ, konvergieren für unendliches n nach einem Grenzwert $\lambda_0 \leqq \mu$, und die Zahlen $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$, welche nie zunehmen, aber größer sind als λ, konvergieren nach einem Grenzwert $\mu_0 \geqq \lambda$. Es ist dann leicht zu konstatieren, daß diese beiden Grenzwerte gerade die Zahlen λ_0 und μ_0 sind, welche wir oben definiert haben. Sie sind durch die folgenden Eigenschaften charakterisiert:

a) Die Zahlen der Folge sind schließlich alle größer als eine beliebige Zahl, die kleiner ist als λ_0, und kleiner als eine beliebige Zahl, die größer als μ_0 ist.

b) Man findet, wie weit man auch in der Folge gehen mag, immer noch Glieder, die kleiner sind, und Glieder, die größer sind als eine beliebige Zahl zwischen λ_0 und μ_0.

Auf Grund der ersten Eigenschaft verhalten sich die linke Seite des kleinsten Grenzwertes und die rechte Seite des größten Grenzwertes wie die linke und die rechte Seite des einzigen Grenzwertes, wenn dieser existiert, und man kann wohl sagen, daß die Zahlen der Folge schließlich um ein Intervall oszillieren, welches sich ausnahmsweise auf eine einzige Zahl reduzieren kann. Wenn aber eine solche

Zahl, d. h. ein einziger Grenzwert, nicht existiert, so ist es unmöglich, zu jeder positiven Zahl ε eine Zahl ν zu finden derart, daß für $n', n'' > \nu$ immer $|a_{n'} - a_{n''}| < \varepsilon$ ist; denn auf Grund der zweiten Eigenschaft gibt es, wenn $\varepsilon < \mu_0 - \lambda_0$ ist, beliebig große Werte von n' und n'' derart, daß $|a_{n'} - a_{n''}| > \varepsilon$ ist: es genügt

$$a_{n'} < \tfrac{1}{2}(\lambda_0 + \mu_0 - \varepsilon), \quad a_{n''} > \tfrac{1}{2}(\lambda_0 + \mu_0 + \varepsilon)$$

zu wählen.

Theorie der Reihen.

Erste Definitionen und Beispiele.

179. Eine der wichtigsten Anwendungen der Theorie der Grenzwerte besteht darin, zu untersuchen, welche Bedeutung einem Aggregat von unendlich vielen Zahlen $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ beigelegt werden muß, und ob auf ein solches Aggregat, welches man als eine Reihe bezeichnet, immer die Eigenschaften der aus einer endlichen Anzahl von Teilen zusammengesetzten Summen anwendbar sind. Wir wollen mit S_n die Summe der n ersten Glieder bezeichnen. Wenn n unendlich zunimmt, so kann S_n nach einem Grenzwerte konvergieren oder nicht. Im ersten Falle ist die Reihe konvergent oder divergent, je nachdem der Grenzwert endlich oder unendlich ist. Im zweiten Falle heißt sie unbestimmt. Man bemerke, daß eine unbestimmte Reihe sich immer durch eine geeignete Gruppierung der Glieder derart reduzieren läßt, daß sie konvergent oder divergent wird. Wir wissen in der Tat (§ 137), daß man eine Folge von ganzen Zahlen $r, s, t, \ldots$ bilden kann, die beständig zunehmen und so beschaffen sind, daß S_n sich einem endlichen oder unendlichen Grenzwert nähert, wenn n die Folge durchläuft. Mit andern Worten: Die Reihe

$$(u_1 + u_2 + \cdots + u_r) + (u_{r+1} + \cdots + u_s) + (u_{s+1} + \cdots + u_t) + \cdots,$$

in welcher alle in einer Klammer stehenden Glieder immer als ein einziges Glied bildend betrachtet werden, ist konvergent oder divergent. Dieser Umstand zeigt, daß für die Addition von unendlich vielen Zahlen nicht das sogenannte assoziative Gesetz gilt, und später werden wir sehen, daß auch nicht immer das kommutative Gesetz besteht. Umgekehrt ist es wichtig zu bemerken, daß es nicht erlaubt ist, die Glieder einer konvergenten oder divergenten Reihe in

Teile zu zerlegen. Dies könnte in der Tat Unbestimmtheit hervorbringen.

180. Wenn die Reihe konvergent ist, so heißt der Grenzwert S von S_n für unendliches n die Summe der Reihe, und man kommt überein zu schreiben

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots.$$

Die Differenz $R_n = S - S_n$, welche nach Null konvergiert, wenn n unendlich zunimmt, führt den Namen Rest. Offenbar ist R_n das, was aus der Summe der Reihe wird, wenn man darin die n ersten Glieder unterdrückt. Läßt man nämlich in der Gleichung

$$S_{n+p} - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}$$

p ins Unendliche wachsen, während n konstant bleibt, so konvergiert die linke nach $S - S_n$, d. h. nach R_n, und man kann daher schreiben

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \cdots.$$

181. Es ist wichtig zu bemerken, daß eine Reihe mit positiven Gliedern nicht unbestimmt sein kann. Da in der Tat

$$S_n = S_{n-1} + u_n > S_{n-1}$$

ist, so sieht man, daß S_n mit zunehmendem n wächst und sich daher einem endlichen oder unendlichen Grenzwert nähert, d. h. die Reihe ist konvergent oder divergent. Dasselbe gilt von den Reihen mit negativen Gliedern. Jede unbestimmte Reihe besteht also notwendig aus unendlich vielen positiven und unendlich vielen negativen Gliedern.

182. Beispiele. Die geometrische Progression $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ liefert Beispiele für konvergente, divergente und unbestimmte Reihen. Wenn x absolut genommen kleiner als 1 ist, so konvergiert x^n (§ 146) mit unendlich zunehmendem n nach Null. Wenn $x > 1$ ist, so wächst x^n ins Unendliche. Wenn $x < -1$ ist, so überschreitet x^n dem absoluten Betrage nach jede Grenze, ist aber positiv oder negativ, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Bemerkt man außerdem, daß

$$S_n = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

ist, so sieht man sofort, daß die betrachtete Reihe divergent ist für $x > 1$, konvergent für $1 > x > -1$ und unbestimmt für $-1 > x$. Im besondern erhält man für $x = 1$ und $x = -1$ die Reihen

$$1 + 1 + 1 + 1 + \cdots, \quad 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots,$$

von denen die erste offenbar divergent ist ($S_n = n$). Die zweite ist unbestimmt, da S_n abwechselnd die Werte 1 und 0 annimmt, je nachdem n ungerade oder gerade ist. Zusammenfassend können wir sagen (vgl. § 169), daß die vorgelegte Reihe nur konvergiert, wenn x dem Intervall $(-1, 1)$

mit Ausschluß der Grenzen angehört. Aus diesem Grunde pflegt man das genannte Intervall das **Konvergenzintervall** der betrachteten Reihe zu nennen. Wir wollen jetzt andere bemerkenswerte Beispiele für konvergente und für divergente Reihen geben, welche uns im folgenden von Nutzen sein werden.

183. Harmonische Reihe. Unter den divergenten Reihen ist von Wichtigkeit die harmonische Reihe

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots.$$

Die Summe der ersten n Glieder pflegt man mit H_n zu bezeichnen. Man braucht nur die Identität $n(H_n - H_{n-1}) = 1$ zu beachten, um sagen zu können (§ 162), daß H_n mit n unbegrenzt zunimmt; und man kann hinzufügen, daß die harmonische Reihe **schwach divergent** ist, da H_n ins Unendliche wächst wie der natürliche Logarithmus von n, d. h. sehr langsam im Vergleich zu n. Die Divergenz kann man auch konstatieren, indem man sich daran erinnert (§ 156), daß $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ beständig wachsend nach e konvergiert, so daß man der Reihe nach hat

$$e > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \frac{1}{n} > \log\left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad H_n > \log(n+1), \quad \lim H_n = \infty.$$

Um etwas Genaueres zu erkennen, wollen wir die Zahlen $a_n = H_n - \log n$ betrachten, die offenbar positiv sind. In kurzem (§ 186) werden wir sehen, daß

$$\frac{1}{n} < -\log\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \log\frac{n}{n-1}$$

ist. Daraus folgt

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n} - \log\frac{n}{n-1} < 0,$$

so daß also die **positiven** Zahlen a_n beständig abnehmen, wenn n wächst, und daher nach einem endlichen Grenzwert konvergieren. Diesen Grenzwert pflegt man mit $\mathfrak{C}$ zu bezeichnen und nennt ihn die **Eulersche Konstante**. Auf anderm Wege gelingt es ihren Wert zu berechnen:

$$\mathfrak{C} = 0{,}5772156649015328\ldots$$

Wir wollen inzwischen bemerken, daß man schreiben kann

$$H_n = \log n + \mathfrak{C} + \varrho_n, \tag{1}$$

wo ϱ_n nach Null konvergiert, wenn n unbegrenzt zunimmt.

184. Exponentialreihe. Mit diesem Namen belegt man die Reihe

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots,$$

weil ihre Summe e^x ist, welches auch der Wert von x sein mag. Man hat in der Tat nach der Newtonschen Formel

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n,$$

wenn zur Abkürzung

$$v_r = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdots r}\cdot\frac{x^r}{n^r} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)\frac{x^r}{r!}$$

gesetzt wird. Man bemerke, daß, wenn r konstant bleibt,

$$\lim_{n=\infty} v_r = \frac{x^r}{r!}$$

ist. Wir haben nun zwei Fälle zu betrachten. Ist x positiv, so hat man

$$v_{r+\nu} = v_r \frac{\left(1-\frac{r}{n}\right)\left(1-\frac{r+1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{r+\nu-1}{n}\right)}{(r+1)(r+2)\cdots(r+\nu)}x^\nu < v_r\left(\frac{x}{r+1}\right)^\nu.$$

Daraus folgt, wenn man annimmt, daß r nicht kleiner ist als das größte in x enthaltene Ganze,

$$v_{r+1} + v_{r+2} + \cdots + v_n < v_r\left(\frac{x}{r+1} + \frac{x^2}{(r+1)^2} + \cdots\right) = \frac{x v_r}{r+1-x}.$$

Also ist

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - \frac{x v_r}{r+1-x} < 1 + v_1 + v_2 + \cdots + v_r < \left(1+\frac{x}{n}\right)^n,$$

mithin für unendlich zunehmendes n

$$e^x - \frac{x^{r+1}}{r!\,(r+1-x)} < 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^r}{r!} < e^x$$

und endlich, wenn man r unbegrenzt wachsen läßt und sich daran erinnert (§ 147), daß das allgemeine Glied der vorgelegten Reihe nach Null konvergiert,

$$(2)\qquad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots.$$

Ist ferner x negativ, so kann man (§ 155) schreiben

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{r-1} + \theta v_r,$$

wo θ zwischen 0 und 1 liegt, vorausgesetzt daß n größer ist als der absolute Betrag von x. Wenn n unendlich zunimmt, so hat die rechte Seite die Tendenz, zwischen

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{r-1}}{(r-1)!} \quad\text{und}\quad 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^r}{r!}$$

zu liegen, während die linke Seite (§ 158) nach e^x konvergiert. Lassen wir nun r unbegrenzt wachsen, so konvergieren die beiden letzten Summen, die immer e^x zwischen sich enthalten und eine nach Null konvergierende Differenz haben, notwendig (§ 131) nach e^x. Die Formel (2) gilt also für alle Werte von x.

185. Aus dem vorigen Paragraphen geht im besondern hervor, daß die Zahl e die Summe der unendlichen Reihe

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$$

ist. Man kann auch schreiben

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{r!} + \frac{\theta}{r!\,r},$$

wo θ zwischen 0 und 1 liegt und r so groß ist als man will. Z. B. ist $e = 2 + \theta$, d. h. $2 < e < 3$. Wählt man r genügend groß, so erhält man[1])

$$e = 2{,}718281828459045\ldots$$

Diese Zahl ist irrational. Wäre sie nämlich gleich dem Bruch p/q und wählt man $r = q$, so würde man in der letzten Formel nach Multiplikation mit $q!$ eine ganze Zahl gleich der Zahl θ/q finden, welche positiv und kleiner als 1 ist. Das ist absurd.

186. Logarithmische Reihe. Analoge Betrachtungen wie die in § 184 liefern ein anderes interessantes Beispiel für eine konvergente Reihe. Bekanntlich ist (§ 159) für unendliches n

$$\lim n\left(1 - (1 - x)^{\frac{1}{n}}\right) = -\log(1 - x).$$

Wir wollen annehmen, x sei positiv und kleiner als die Einheit. Im folgenden werden wir sehen, daß die Newtonsche Formel, welche die Entwickelung von $(1 - x)^m$ nach Potenzen von x liefert, auch dann gilt, wenn m nicht eine positive ganze Zahl ist. Schreiben wir also

$$(1 - x)^{\frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{n}x + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - 1\right)}{1 \cdot 2}x^2 - \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - 1\right)\left(\frac{1}{n} - 2\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \cdots.$$

Daraus folgt

$$n\left(1 - (1 - x)^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{x}{1} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{2n}\right)\frac{x^3}{3} + \cdots.$$

Der rechten Seite kann man die Form $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$ geben, indem man

$$v_r = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{2n}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{(r-1)n}\right)\frac{x^r}{r}$$

setzt. Man bemerke, daß, wenn r konstant bleibt, während n unendlich zunimmt, v_r nach $\frac{x^r}{r}$ konvergiert. Inzwischen hat man

$$v_{r+\nu} = v_r\left(1 - \frac{1}{rn}\right)\left(1 - \frac{1}{(r+1)n}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{(r+\nu-1)n}\right)\frac{r x^\nu}{r+\nu} < v_r x^\nu,$$

und daraus folgt

$$v_{r+1} + v_{r+2} + v_{r+3} + \cdots < v_r(x + x^2 + x^3 + \cdots) = \frac{x v_r}{1 - x},$$

1) Im Intermédiaire des Mathématiciens (t. VII, p. 53) findet man den von W. Shanks bis auf 205 Dezimalstellen berechneten Wert von e.

mithin

$$n\left(1-(1-x)^{\frac{1}{n}}\right)-\frac{x v_r}{1-x} < v_1+v_2+\cdots+v_r < n\left(1-(1-x)^{\frac{1}{n}}\right).$$

Läßt man jetzt n unendlich zunehmen, während r ungeändert bleibt, so kommt

$$-\log(1-x)-\frac{x^{r+1}}{r(1-x)} < \frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^r}{r} < -\log(1-x).$$

Endlich ergibt sich für unendliches r

(3) $$-\log(1-x)=\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots.$$

Hiermit soll nur gesagt sein, daß

$$-\log(1-x)=\lim_{n=\infty}\left(\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}\right)$$

ist. Wenn man in dieser Gleichung x in x^2 und n in das größte in $\frac{1}{2}n$ enthaltene Ganze verwandelt, und wenn man beachtet, daß

$$\log(1+x)=-\log(1-x)+\log(1-x^2)$$

ist, so erhält man

$$\log(1+x)=\lim_{n=\infty}\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\pm\frac{x^n}{n}\right),$$

d. h.

(4) $$\log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots.$$

Übrigens schließt jede der Formeln (3) und (4) die andere ein (wie man sofort durch Verwandlung von x in $-x$ erkennt), so daß wir nur eine von ihnen zu betrachten brauchen und sagen können, daß sie für alle Werte von x besteht, die zwischen -1 und $+1$ enthalten sind, indem wir vorläufig diese extremen Werte ausschließen. Aber es ist leicht zu sehen, daß die Formel (3) auch für $x=-1$, folglich (4) für $x=1$ besteht. In der Tat läßt sich die Summe der $2n$ ersten Glieder der Reihe $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ auch in folgender Weise schreiben

$$S_{2n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=H_{2n}-H_n.$$

Man hat also unter Anwendung der Formel (1)

$$S_{2n}=\log 2+\varrho_{2n}-\varrho_n,$$

mithin für unendliches n: $\lim S_{2n}=\log 2$, $\lim S_{2n-1}=\lim\left(S_{2n}+\frac{1}{2n}\right)=\log 2$ und endlich

$$\log 2=1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\cdots.$$

Dagegen erkennt man sofort, daß weder die Formel (3) für $x=1$ besteht noch (4) für $x=-1$. Wir können also behaupten, daß das Konvergenzintervall (§ 182) der beiden Reihen $(-1, 1)$ ist mit Ausschluß der oberen Grenze bei der ersten Reihe und der unteren bei der zweiten.

Grundlegende Sätze.

187. Allgemeines Konvergenzkriterium. Für die Konvergenz einer Reihe ist es notwendig und hinreichend, daß die Summe S_n der n ersten Glieder für unendliches n einen endlichen Grenzwert hat. Das ist aber der Fall (§ 139), wenn jeder positiven Zahl ε ein Wert von n entspricht derart, daß für diesen Wert und für alle größeren Werte $S_{n+p} - S_n$ absolut genommen kleiner ist als ε. Mit andern Worten: Für die Konvergenz der Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ ist es notwendig und hinreichend, daß man, wenn eine positive Zahl ε beliebig gegeben ist, immer einen Wert von n finden kann, von welchem ab für beliebiges p

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon$$

ist. Dies ist das allgemeine Konvergenzkriterium. Man bemerke, daß, wenn man n ins Unendliche wachsen läßt, während man p beliebige Werte erteilt, die konstant oder mit n veränderlich sind,

$$\lim_{n=\infty} (u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}) = 0$$

ist. In dieser Gleichung sind unendlich viele Bedingungen enthalten, deren jede notwendig, aber für sich allein nicht hinreichend für die Konvergenz ist.

188. Bemerkungen. a) Setzt man $p = 1$, so sieht man, daß in jeder konvergenten Reihe das allgemeine Glied die Null als Grenzwert hat. Aber eine Reihe kann auch nicht konvergieren, obwohl ihr allgemeines Glied den Grenzwert Null hat. Hierfür hat man ein Beispiel in der harmonischen Reihe (§ 183), da $\lim \frac{1}{n} = 0$ ist. Ebenso ist für jeden konstanten Wert von p

$$\lim \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p}\right) = 0.$$

Ja, noch mehr! Wenn man beachtet, daß die Summe in Klammern aus p Brüchen besteht, die kleiner als $1/n$ sind, und daß sie daher kleiner als p/n ist, so erkennt man, daß der Grenzwert Null auch dann erhalten bleibt, wenn man p ins Unendliche wachsen läßt, vorausgesetzt, daß dies in der Weise geschieht, daß das Verhältnis von p zu n nach Null konvergiert. Z. B. kann man p gleich der Anzahl der Ziffern von n wählen oder gleich dem ganzen Teile der Quadratwurzel von n u. s. f.

b) Man darf keineswegs glauben, daß die Bedingung $\lim u_n = 0$ bei den unbestimmten Reihen nicht erfüllt sein kann. Z. B.[1]) ist un-

1) Genocchi-Peano, Differentialrechnung, deutsch von Bohlmann u. Schepp, p. 16.

bestimmt die Reihe, in welcher die Summe der n ersten Glieder durch $\sin(\pi\sqrt{n})$ ausgedrückt wird. Aber das allgemeine Glied

$$u_n = \sin(\pi\sqrt{n}) - \sin(\pi\sqrt{n-1})$$
$$= 2\sin\frac{\frac{1}{2}\pi}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)\right)$$

hat offenbar Null als Grenzwert. Ebenso ist unbestimmt die Reihe, bei welcher die Summe der n ersten Glieder gleich $\sin(\pi\sqrt{\log n})$ ist. Inzwischen konvergiert nicht bloß u_n, sondern auch die Summe

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{2n}$$
$$= 2\sin\frac{\frac{1}{2}\pi\log 2}{\sqrt{\log n}+\sqrt{\log 2n}}\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\log n}+\sqrt{\log 2n}\right)\right)$$

nach Null u. s. f.

c) Alles in allem sieht man also, daß sich, wenn die Summe $u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}$ für unendliches n nach Null konvergiert, nichts über die Konvergenz der Reihe sagen läßt, da es nötig sein würde, alle möglichen konstanten oder veränderlichen Werte von p zu erschöpfen. Findet man jedoch, daß die genannte Summe, sei es, wenn man p einen bestimmten Wert erteilt, sei es, wenn man p in einer bestimmten Weise gleichzeitig mit n wachsen läßt, nicht nach Null konvergiert, so kann man behaupten, daß die Reihe nicht konvergent ist. Als Beispiel wollen wir noch einmal die harmonische Reihe wählen. Die Summe $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ kann nicht nach Null konvergieren, da sie aus n in abnehmender Größe geordneten Brüchen besteht und daher größer ist als das n-fache des letzten von ihnen, d. h. größer als $\frac{1}{2}$. Also ist die harmonische Reihe nicht konvergent. Sie ist ferner divergent (§ 181), da ihre Glieder positiv sind. Wegen der Unmöglichkeit, mit Hilfe des bewiesenen allgemeinen Kriteriums die Konvergenz einer Reihe sicher zu stellen, ist man gezwungen zu speziellen Kriterien seine Zuflucht zu nehmen, die bei geeigneter Anwendung in einer großen Zahl spezieller Fälle zu erkennen gestatten, ob eine Reihe konvergent ist oder nicht.

189. Theorem I. Jede konvergente Reihe mit positiven Gliedern bleibt konvergent, wenn man ihre Glieder mit Zahlen multipliziert, die absolut genommen eine gegebene Zahl nicht übertreffen.

Die absoluten Beträge der Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ seien sämtlich kleiner als l. Ist die Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ konvergent, so heißt dies, daß man, wenn ε positiv und beliebig klein gegeben ist, immer einen Wert von n finden kann, von welchem ab für beliebiges p

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} < \frac{\varepsilon}{l}$$

ist. Es wird demnach für dieselben Werte von n und von p

$$a_{n+1}u_{n+1} + a_{n+2}u_{n+2} + \cdots + a_{n+p}u_{n+p}$$
$$< (u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p})\,l < \varepsilon$$

sein. Mithin ist nach dem allgemeinen Konvergenzkriterium die Reihe $a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + \cdots$ konvergent.

190. Folgerungen. a) Eine Reihe ist konvergent, wenn es die Reihe der absoluten Beträge ihrer Glieder ist. Man braucht nur in dem obigen Theorem anzunehmen, daß gewisse Zahlen a gleich 1, andere gleich -1 sind. Die Umkehrung des Satzes gilt nicht.

b) Eine Reihe ist konvergent, wenn die absoluten Beträge ihrer Glieder die entsprechenden Glieder einer konvergenten Reihe nicht übertreffen. Um dies zu beweisen, braucht man nur anzunehmen, daß die a dem absoluten Betrage nach die Einheit nicht übertreffen.

c) Jede divergente Reihe mit positiven Gliedern bleibt divergent, wenn man ihre Glieder mit Zahlen multipliziert, die nicht kleiner sind als eine gegebene positive Zahl. Wäre nämlich die so erhaltene Reihe konvergent, so wäre es nach Theorem I auch die vorgelegte Reihe. Übrigens ist der Satz evident; denn wenn keine Zahl a kleiner ist als α, so ist offenbar die Summe der n ersten Glieder der Reihe $a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots$ nicht kleiner als αS_n und muß also wie S_n mit n über alle Grenzen wachsen.

191. Theorem II. Eine Reihe mit positiven Gliedern ist konvergent, wenn das Verhältnis eines Gliedes zu dem vorhergehenden Gliede schließlich kleiner ist als das analoge Verhältnis in einer andern, konvergenten Reihe, und sie ist divergent, wenn das genannte Verhältnis das analoge Verhältnis in einer divergenten Reihe mit positiven Gliedern schließlich übertrifft.

In der Tat folgt aus $u_{n+1}/u_n < v_{n+1}/v_n$, wenn, wie wir annehmen, u_n und v_n positiv sind, $u_{n+1}/v_{n+1} < u_n/v_n$. Es nimmt also u_n/v_n schließlich beständig ab und ist deshalb immer kleiner als eine feste Zahl. Wenn daher (§ 189) $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$ konvergiert, so konvergiert auch $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$. Dagegen folgt aus $u_{n+1}/u_n > v_{n+1}/v_n$, daß u_n/v_n schließlich immer wächst und deshalb immer größer ist als eine feste positive Zahl. Daraus folgt (§ 190, c), daß, wenn $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$ divergiert, auch $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ divergiert.

192. Hilfssatz von Abel[1]**).** Wenn die positiven Zahlen

1) Abel, Oeuvres, 2e éd., p. 222.

$a_1, a_2, a_3, \cdots$ eine zunehmende oder eine abnehmende Folge bilden, und wenn die absoluten Beträge der Summen

$$\sigma_1 = u_{n+1},\ \sigma_2 = u_{n+1} + u_{n+2},\ \cdots,\ \sigma_p = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}$$

kleiner sind als die feste Zahl l, so ist der absolute Betrag von $a_{n+1}u_{n+1} + a_{n+2}u_{n+2} + \cdots + a_{n+p}u_{n+p}$ kleiner als la_{n+1}, wenn die Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine abnehmende Folge bilden und kleiner als $2la_{n+p}$, wenn jene Zahlen eine zunehmende Folge bilden.

Die Summe $a_{n+1}u_{n+1} + a_{n+2}u_{n+2} + \cdots + a_{n+p}u_{n+p}$ läßt sich nämlich so schreiben:

$$\begin{aligned} &a_{n+1}\sigma_1 + a_{n+2}(\sigma_2 - \sigma_1) + a_{n+3}(\sigma_3 - \sigma_2) + \cdots + a_{n+p}(\sigma_p - \sigma_{p-1}) \\ &\quad = (a_{n+1} - a_{n+2})\sigma_1 + (a_{n+2} - a_{n+3})\sigma_2 + \cdots + a_{n+p}\sigma_p. \end{aligned}$$

Wenn a_n mit wachsendem n beständig abnimmt, so sind die Differenzen $a_{n+1} - a_{n+2},\ a_{n+2} - a_{n+3}, \ldots$ sämtlich positiv, und es ist daher der absolute Betrag der betrachteten Summe kleiner als

$$\{(a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+2} - a_{n+3}) + \cdots + (a_{n+p-1} - a_{n+p}) + a_{n+p}\}\, l = la_{n+1}.$$

Wenn dagegen a_n mit n beständig zunimmt, so sind die genannten Differenzen alle negativ, und der absolute Betrag der betrachteten Summe ist kleiner als

$$\{(a_{n+2} - a_{n+1}) + \cdots + (a_{n+p} - a_{n+p-1}) + a_{n+p}\}\, l < 2la_{n+p}.$$

193. Theorem III. Jede konvergente Reihe bleibt konvergent, wenn man ihre Glieder mit Zahlen multipliziert, die in ihrer Aufeinanderfolge immer in demselben Sinne variieren und dabei dem absoluten Betrage nach kleiner bleiben als eine feste Zahl[1]).

Zunächst bemerke man, daß die Zahlen a, welche notwendig nach einem Grenzwert konvergieren, schließlich dessen Vorzeichen annehmen. Wenn ferner der Grenzwert null ist, so sind die Zahlen alle positiv oder alle negativ. Jedenfalls kann man immer einen Wert des Index angeben, von welchem ab die Zahlen ein bestimmtes Vorzeichen bewahren. Man kann überdies annehmen, daß dieses Vorzeichen + ist, da man im entgegengesetzten Falle nur die Vorzeichen der Zahlen a und aller Glieder der gegebenen Reihe umzukehren brauchte, um unser Theorem zu beweisen. Dies vorausgeschickt können wegen der Konvergenz der Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ die ab-

1) In den „Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris" (24. Nov. 1890) hat A. La Maestra bewiesen, daß dieses Theorem bestehen bleibt, wenn die Zahlen a oszillieren und endlich bleiben, vorausgesetzt, daß das arithmetische Mittel der n ersten mit wachsendem n beständig abnimmt oder immer zunimmt.

soluten Beträge von σ_1, σ_2, σ_3, ... kleiner gemacht werden als jede vorgelegte positive und beliebig kleine Zahl (§ 187), und das gilt auch von l, welches man als den größten der genannten absoluten Beträge ansehen kann. Bilden die Zahlen a eine abnehmende Folge, so kann man $l < \varepsilon/a_1$ machen, und dann ist nach dem Hilfssatz von Abel

$$|a_{n+1}u_{n+1} + a_{n+2}u_{n+2} + \cdots + a_{n+p}u_{n+p}| < l a_{n+1} < \frac{a_{n+1}}{a_1}\,\varepsilon < \varepsilon.$$

Wenn dagegen a_n mit zunehmendem n wächst, indem es kleiner bleibt als eine bestimmte Zahl α, so mache man $l < \varepsilon/2\alpha$. In diesem Falle ist

$$|a_{n+1}u_{n+1} + a_{n+2}u_{n+2} + \cdots + a_{n+p}u_{n+p}| < 2l a_{n+p} < \frac{a_{n+p}}{\alpha}\,\varepsilon < \varepsilon.$$

Also ist nach dem allgemeinen Konvergenzkriterium die Reihe $a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + \cdots$ konvergent.

194. Theorem IV. Wenn eine unbestimmte Reihe so beschaffen ist, daß die Summe einer beliebigen Anzahl aufeinanderfolgender Glieder immer endlich bleibt, so wird sie konvergent, wenn man ihre Glieder mit Zahlen multipliziert, die eine abnehmende Folge bilden und nach Null konvergieren.

Auf Grund des Hilfssatzes von Abel ist der absolute Betrag der Summe $a_{n+1}u_{n+1} + a_{n+2}u_{n+2} + \cdots + a_{n+p}u_{n+p}$ kleiner als $l a_{n+1}$. Soll er kleiner werden und auch kleiner bleiben als ε, so braucht man nur $a_{n+1} < \varepsilon/l$ zu machen. Das ist aber immer möglich, da nach der Voraussetzung a_{n+1} nach Null konvergiert.

195. Folgerung. Wenn die Glieder einer Reihe abwechselnd positiv und negativ sind, dem absoluten Betrage nach eine abnehmende Folge bilden und nach Null konvergieren, so ist die Reihe konvergent.

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge des vorigen. Man braucht nur anzunehmen, die unbestimmte Reihe sei $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$. Jedoch wollen wir in Anbetracht der Wichtigkeit des Satzes hier einen direkten Beweis auseinandersetzen. Es sei $u_1 > u_2 > u_3 > \cdots > 0$, und man betrachte die Reihe $u_1 - u_2 + u_3 - \cdots$. Gruppiert man ihre Glieder in folgender Weise

$$(u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + (u_5 - u_6) + \cdots,$$

so sieht man, daß die Summen S_2, S_4, S_6, ... eine zunehmende Folge bilden. Gruppiert man dagegen folgendermaßen

$$u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - (u_6 - u_7) - \cdots,$$

so sieht man, daß die Summen $S_1, S_3, S_5, \ldots$ beständig abnehmen. Inzwischen bemerke man, daß $S_n < S_{n-1} < S_1$ ist für gerades n und $S_n > S_{n-1} > S_2$ für ungerades n. Also wächst S_{2n} beständig, indem es kleiner als S_1 bleibt, und besitzt daher einen endlichen Grenzwert. Dies gilt auch von S_{2n-1}, welches abnimmt, indem es größer bleibt als S_2. Überdies sind die beiden Grenzwerte gleich, da die Differenz $S_{2n} - S_{2n-1}$ der Voraussetzung gemäß nach Null konvergiert.

196. Bemerkungen. a) Wenn nicht $\lim u_n = 0$ wäre, so wäre die Reihe unbestimmt, da S_n für gerades n nach einem Grenzwert konvergieren würde und für ungerades n nach einem andern: die Differenz der beiden Grenzwerte ist der Grenzwert von u_n.

b) Wenn die Glieder zwar nach Null konvergieren, aber nicht beständig abnehmen, so braucht die Reihe nicht konvergent zu sein. Z. B. hat die Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{4}-1} - \cdots$$

abwechselnd positive und negative Glieder, die nach Null konvergieren. Sie ist aber doch divergent, da sich durch paarweise Gruppierung der Glieder ergibt, daß die Summe der $2n$ ersten gleich $2H_n$ ist.

c) Wenn man in einer der Reihen, mit denen wir uns hier beschäftigen, nur die n ersten Glieder beibehält, um einen angenäherten Wert der Summe S zu haben, so ist der Fehler, den man macht, dem absoluten Betrage nach kleiner als das erste vernachlässigte Glied. In der Tat haben wir gesehen, daß S_n kleiner oder größer ist als S, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Daraus folgt, daß für beliebiges n der gemeinsame Grenzwert S immer zwischen S_n und S_{n+1} liegt, so daß man also hat

$$|S - S_n| < |S_{n+1} - S_n| = u_{n+1}.$$

Man kann mit andern Worten schreiben

$$S = u_1 - u_2 + u_3 - \cdots \pm u_n \mp \theta u_{n+1},$$

wo θ zwischen 0 und 1 liegt, welches auch der Wert von n sein mag.

Vergleichung der Reihen mit positiven Gliedern.

197. Es ist natürlich, die mehr oder weniger starke Divergenz einer Reihe mit positiven Gliedern zu beurteilen nach der mehr oder weniger großen Geschwindigkeit, mit welcher die Summe der n ersten Glieder für unendlich zunehmendes n jede Grenze zu überschreiten strebt. Wenn daher U_n und V_n die Summen der n ersten Glieder in den divergenten Reihen

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots, \quad v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$$

sind, so wird man sagen, die erste Reihe sei schwächer divergent als die zweite, wenn das Verhältnis von U_n zu V_n mit unendlich wachsendem n nach Null konvergiert. Wenn umgekehrt dieses Verhältnis über jede Grenze wächst, so heißt die erste Reihe stärker divergent als die zweite. Man bemerke, daß zu den Reihen, die schwächer divergieren als eine gegebene, auf Grund der vorstehenden Definition alle konvergenten Reihen gerechnet werden können.

198. Die Konvergenz einer Reihe ist um so stärker, je schneller der Rest (§ 180) der Reihe nach Null konvergiert. Wenn α_n und β_n die Reste der konvergenten Reihen

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots, \quad v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$$

sind, so sagt man, die erste Reihe sei stärker konvergent oder schwächer konvergent als die zweite, wenn das Verhältnis von α_n zu β_n nach Null konvergiert oder mit n unbegrenzt wächst.

199. Theorem I. Wenn das Verhältnis der allgemeinen Glieder von zwei Reihen mit positiven Gliedern nach Null konvergiert, so ist die erste Reihe schwächer divergent oder stärker konvergent als die zweite.

Der Grenzwert des Verhältnisses von u_n zu v_n für unendliches n sei gleich Null, und es werde vorausgesetzt, die Reihe $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$ sei divergent. Wenn man beachtet, daß V_n beständig wachsend nach Unendlich konvergiert, so hat man auf Grund eines bekannten Theorems (§ 141) sofort

$$\lim \frac{U_n}{V_n} = \lim \frac{U_n - U_{n-1}}{V_n - V_{n-1}} = \lim \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

Die erste Reihe ist daher schwächer divergent als die zweite, wodurch nicht ausgeschlossen ist, daß sie möglicherweise konvergiert. Wenn ferner die Reihe $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$ konvergent ist, so kann man das Gleiche sagen von der Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ (§ 189), da das Verhältnis u_n/v_n, welches nach der Voraussetzung nach Null konvergiert, endlich bleibt. Überdies hat man (§ 140), wenn man bemerkt, daß α_n und β_n abnehmend nach Null konvergieren,

$$\lim \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \lim \frac{\alpha_n - \alpha_{n+1}}{\beta_n - \beta_{n+1}} = \lim \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

Mithin ist die Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ sogar stärker konvergent als $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$.

200. Bemerkungen. a) Wir haben gesehen (§ 188, a), daß das allgemeine Glied einer konvergenten Reihe notwendig den Grenzwert Null haben muß, daß es aber nicht erlaubt ist, den umgekehrten Satz auszusprechen. Jetzt sind wir in der Lage behaupten zu können, daß jede Reihe mit positiven Gliedern, die den Grenzwert

Null haben, konvergiert oder schwächer divergiert als die Reihe $1 + 1 + 1 + \cdots$.

b) Es ist begreiflich, daß eine Reihe sehr stark konvergiert, wenn man dadurch, daß man sie um ein Glied verschiebt, eine stärker konvergierende Reihe erhält. Aus dem soeben bewiesenen Theorem geht hervor, daß dies der Fall ist, wenn das Verhältnis eines Gliedes zu dem vorhergehenden Gliede den Grenzwert Null hat. Aus diesem Grunde sucht man in den Anwendungen der Reihentheorie die konvergenten Reihen immer so umzuformen, daß diese Bedingung erfüllt ist.

201. Theorem II. Ist eine Reihe mit positiven Gliedern gegeben, so kann man immer eine andere konstruieren, welche schwächer konvergent oder schwächer divergent ist.

a) $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ sei die gegebene Reihe, die wir als konvergent voraussetzen, und man nehme

$$v_1 = \sqrt{U} - \sqrt{\alpha_1}, \; v_2 = \sqrt{\alpha_1} - \sqrt{\alpha_2}, \; v_3 = \sqrt{\alpha_2} - \sqrt{\alpha_3}, \; \cdots.$$

Die Reihe der v ist konvergent, da die Summe ihrer n ersten Glieder $V_n = \sqrt{U} - \sqrt{\alpha_n}$ ist, für unendliches n also $V = \sqrt{U}$. Überdies hat man, da der Rest

$$\beta_n = V - V_n = \sqrt{U} - V_n = \sqrt{\alpha_n}$$

ist, $\lim(\alpha_n/\beta_n) = \lim \sqrt{\alpha_n} = 0$. Mithin ist die betrachtete Reihe nach der Definition schwächer konvergent als die Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$.

b) Wenn die Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ divergent ist, so nehme man

$$v_1 = \sqrt{U_1}, \; v_2 = \sqrt{U_2} - \sqrt{U_1}, \; v_3 = \sqrt{U_3} - \sqrt{U_2}, \; \cdots.$$

Die Reihe der v ist divergent, weil V_n, welches offenbar gleich $\sqrt{U_n}$ ist, gleichzeitig mit n unbegrenzt wächst. Da aber $\lim(V_n/U_n) = \lim \frac{1}{\sqrt{U_n}} = 0$ ist, so ist sie schwächer divergent als die Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$.

202. Anmerkung. Es ist unmöglich die Grenze zwischen den konvergenten und den divergenten Reihen anzugeben. Mit andern Worten: Sind zwei Reihen gegeben, die eine konvergent und die andere divergent, so kann man sich unendlich viele konvergente Reihen und unendlich viele divergente Reihen vorstellen, die ersten schwächer konvergent als die gegebene konvergente Reihe und die zweiten schwächer divergent als die gegebene divergente Reihe. Dies ist zum ersten Male von Abel bemerkt worden, dem wir die interessanten Betrachtungen verdanken, welche hier folgen.

203. Theorem III. Wenn die Reihe mit positiven Gliedern

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\cdots$$

divergent ist, so divergiert auch, aber schwächer als die vorstehende, die Reihe

$$\frac{1}{a_1\sigma_1}+\frac{1}{a_2\sigma_2}+\frac{1}{a_3\sigma_3}+\cdots,$$

wo σ_n die Summe der n ersten Glieder der ersten Reihe darstellt.

τ_n sei die Summe der n ersten Glieder der zweiten Reihe. Offenbar ist dann

$$\tau_{n+p}-\tau_n\geq\left(\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_{n+2}}+\cdots+\frac{1}{a_{n+p}}\right)\frac{1}{\sigma_{n+p}}=1-\frac{\sigma_n}{\sigma_{n+p}}.$$

Ist n fixiert, so kann man auf Grund der Divergenz der ersten Reihe immer einen Wert p_n von p finden, so groß, daß σ_{n+p} größer ist als $2\sigma_n$. Alsdann wird $\tau_{n+p}-\tau_n>\frac{1}{2}$ sein. Läßt man daher n unendlich zunehmen, während p die Reihe $p_1, p_2, p_3, \ldots$ durchläuft, so wird $\tau_{n+p}-\tau_n$ nicht den Grenzwert Null haben können, wie es für die Konvergenz nötig wäre (§ 187). Also ist die zweite Reihe divergent. Sie ist ferner schwächer divergent als die erste, weil (§ 198) das Verhältnis der allgemeinen Glieder $1/\sigma_n$ nach Null konvergiert.

204. Konstruktion einer Skala divergenter Reihen. Wenn die Glieder der ersten Reihe endlich bleiben, so kann man für das obige Theorem einen andern Beweis geben, der überdies zeigt, daß die Summe τ_n wie der Logarithmus von σ_n wächst. In der Tat, da a_n nicht beliebig klein werden kann, so ist klar, daß $a_n\sigma_n$ mit n unendlich groß wird, und man hat folglich (§ 157) unter Anwendung eines bekannten Theorems (§ 141)

$$\lim\frac{\log\sigma_n}{\tau_n}=\lim\frac{\log\frac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}}}{\frac{1}{a_n\sigma_n}}=\lim\log\left(1-\frac{1}{a_n\sigma_n}\right)^{-a_n\sigma_n}=1.$$

Dies vorausgeschickt können wir aus der zweiten Reihe eine neue divergente Reihe in derselben Weise ableiten, wie die zweite aus der ersten abgeleitet worden ist. Es ist die Reihe

$$\frac{1}{a_1\sigma_1\tau_1}+\frac{1}{a_2\sigma_2\tau_2}+\frac{1}{a_3\sigma_3\tau_3}+\cdots,$$

welche wir (§ 190, c) durch die folgende ersetzen können:

$$\frac{1}{a_1\sigma_1\log\sigma_1}+\frac{1}{a_2\sigma_2\log\sigma_2}+\frac{1}{a_3\sigma_3\log\sigma_3}+\cdots,$$

da das Verhältnis der allgemeinen Glieder beider Reihen die Einheit als Grenzwert hat. Die Summe der n ersten Glieder der letzten Reihe wird unendlich groß wie der Logarithmus von τ_n, d. h. wie $\log\log\sigma_n$, und man kann daher aus der genannten Reihe die folgende ableiten

$$\frac{1}{a_1\sigma_1\log\sigma_1\log\log\sigma_1}+\frac{1}{a_2\sigma_2\log\sigma_2\log\log\sigma_2}+\frac{1}{a_3\sigma_3\log\sigma_3\log\log\sigma_3}+\cdots,$$

welche schwächer divergent ist als die vorigen, aber immer noch divergent, u. s. f. Nimmt man z. B. $a_n=1$, so erhält man die divergenten Reihen

$$1+1+1+1+\cdots,$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots,$$

$$\frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\frac{1}{4\log 4}+\cdots,$$

$$\frac{1}{2\log 2\log\log 2}+\frac{1}{3\log 3\log\log 3}+\frac{1}{4\log 4\log\log 4}+\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

deren jede schwächer divergent ist als alle vorhergehenden.

Spezielle Konvergenzkriterien.

205. Theorem I. In einer konvergenten Reihe $u_1+u_2+u_3+\cdots$ kann das Produkt $a_n u_n$ für unendliches n nicht einen von Null verschiedenen Grenzwert haben, wenn

$$(5)\qquad \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots$$

eine divergente Reihe mit positiven Gliedern ist.

In der Tat, wenn der Grenzwert von $a_n u_n$ z. B. eine positive Zahl wäre, so könnte man die Reihe $u_1+u_2+u_3+\cdots$, deren Glieder schließlich alle positiv sein würden, als abgeleitet aus der Reihe (5) betrachten, und zwar in der Weise, daß die Glieder dieser Reihe mit den Zahlen a_1u_1, a_2u_2, a_3u_3, ... multipliziert werden. Diese Zahlen wären aber, wenigstens von einer bestimmten Stelle ab, größer als eine feste positive Zahl. Mithin wäre (§ 190, c) die betrachtete Reihe divergent.

206. Folgerung. In jeder konvergenten Reihe kann das Produkt nu_n für unendliches n nicht einen von Null verschiedenen Grenzwert besitzen. Dies leitet man sofort aus dem vorstehenden Theorem ab, indem man annimmt, die Reihe (5) sei die harmonische Reihe. Es ist aber leicht, einen andern Beweis hierfür zu geben, der nicht die Divergenz der harmonischen Reihe als bekannt veraussetzt und deshalb dazu dienen kann, diese Divergenz zu bestätigen. Man braucht sich zu diesem Zweck nur daran zu erinnern, daß wir früher (§ 152) folgendes bewiesen haben: Wenn S_n nach einem endlichen Grenzwert konvergiert, so hat $n(S_n - S_{n-1})$, d. h. nu_n, entweder keinen Grenzwert oder es konvergiert nach Null.

207. Bemerkungen. a) Aus dem obigen Theorem leitet man sofort ab, daß, wenn $a_n u_n$ einen von Null verschiedenen Grenzwert hat, die Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ divergent ist. Man sieht aber außerdem, daß die Bedingung $\lim a_n u_n = 0$ für die Konvergenz nicht notwendig ist, da der Grenzwert von $a_n u_n$ nicht vorhanden zu sein braucht; ebensowenig ist sie hinreichend, da sie von unendlich vielen divergenten Reihen erfüllt wird, die schwächer divergieren als (5).

b) Insbesondere ist die Bedingung $\lim nu_n = 0$ für die Konvergenz weder notwendig noch hinreichend. Sie ist nicht hinreichend: Es gibt in der Tat divergente Reihen, bei welchen sie erfüllt ist, z. B. (§ 204)

$$\frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \frac{1}{4\log 4} + \cdots.$$

Sie ist nicht notwendig: In der Tat kann eine Reihe konvergieren, ohne daß nu_n einen Grenzwert hat. So z. B. ist die Reihe

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots$$

konvergent (§ 186 oder § 195), und doch oszilliert nu_n unaufhörlich von -1 nach $+1$. Ebenso werden wir uns später leicht überzeugen können, daß die folgende Reihe konvergent ist:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10^2} + \cdots.$$

Sie ist in der Weise konstruiert, daß man $u_n = 1/n$ nimmt, wenn n eine Quadratzahl ist und $u_n = 1/n^2$ im entgegengesetzten Falle. Offenbar hat aber auch hier nu_n nicht den Grenzwert Null, da es immer wieder gleich 1 wird, so oft n ein vollständiges Quadrat ist.

c) Man kann jedoch beweisen, daß die Bedingung $\lim nu_n = 0$ notwendig erfüllt ist[1]), wenn die Glieder der konvergenten Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ beständig abnehmend aufeinander folgen, wenigstens von einem bestimmten Werte von n ab. In diesem Falle ist in der Tat auch die Reihe

$$(u_1 - u_2) + 2(u_2 - u_3) + 3(u_3 - u_4) + \cdots,$$

deren Glieder positiv sind, konvergent, weil die Summe ihrer $n-1$ ersten Glieder $S_n - nu_n < S_n < S$ ist. Ist S' ($< S$) ihre Summe, so hat man

1) Borel, Théorie des fonctions entières, p. 17.

$\lim nu_n = S - S'$. Es kann aber nicht $S' < S$ sein, sonst würde wegen $\lim nu_n > 0$ die Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ divergent sein. Also ist $S' = S$ und $\lim nu_n = 0$. Zu demselben Schlusse gelangt man auch mit Hilfe des in § 141 bewiesenen Theorems, indem man $a_n = \frac{S_n}{u_n} - n$, $b_n = \frac{1}{u_n}$ nimmt und bemerkt, daß

$$\frac{a_n}{b_n} = S_n - nu_n, \quad \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = S_{n-1}$$

ist.

d) Es genügt aber wie gesagt das Konvergieren von nu_n nach einem von Null verschiedenen Grenzwert, um die Divergenz von $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ behaupten zu können. Ist z. B. die Reihe

$$1 + (1 - \tfrac{1}{2}\log 2)^2 + (1 - \tfrac{1}{3}\log 3)^3 + (1 - \tfrac{1}{4}\log 4)^4 + \cdots$$

gegeben und wird zur Abkürzung $\nu = n/\log n$ gesetzt, so bemerke man, daß

$$\log nu_n = \left\{1 + \nu \log\left(1 - \frac{1}{\nu}\right)\right\} \log n$$

ist. Mithin hat man, da (vgl. § 183)

$$\frac{1}{\nu} < -\log\left(1 - \frac{1}{\nu}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{\nu - 1}\right) < \frac{1}{\nu - 1}$$

ist,

$$0 < -\log nu_n < \frac{\log n}{\nu - 1}.$$

Nun wissen wir aber (§ 161), daß für unendliches n auch ν unendlich groß wird, und es ist daher

$$\lim \frac{\log n}{\nu - 1} = \lim \frac{\nu}{\nu - 1} \cdot \frac{\log^2 n}{n} = 0,$$

mithin $\lim \log nu_n = 0$ und endlich $\lim nu_n = 1$. Wir können also behaupten, daß die vorgelegte Reihe divergent ist.

e) Nimmt man für a_n Ausdrücke, die immer rascher mit n wachsen, so kann man die Reihe (5) immer schwächer divergent machen, und man beschränkt dabei unaufhörlich das Gebiet der Reihen, bei welchen die Bedingung $\lim a_n u_n = 0$ erfüllt ist, indem jedesmal unendlich viele divergente Reihen ausgeschlossen werden. Aber es ist unmöglich, sie alle auszuschließen, weil man dazu die Reihe (5) schwächer divergent machen müßte als jede beliebige andere divergente Reihe, und weil wir bereits wissen, daß eine Reihe, die schwächer divergiert als alle andern, nicht existiert. Man darf also nicht hoffen es durch passende Wahl von a_n dahin zu bringen, daß man in der Untersuchung des Grenzwertes von $a_n u_n$ für unendliches n ein entscheidendes Kriterium hätte, um die Konvergenz jeder beliebigen Reihe zu beurteilen. Diese Bemerkung verdanken wir Abel[1]), der bewiesen hat, daß es auch bei Beschränkung auf Reihen mit positiven Gliedern nicht möglich ist, eine positive Veränderliche a_n zu finden derart, daß eine beliebige Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ konvergent oder divergent ist, je nachdem $\lim a_n u_n = 0$ oder $\lim a_n u_n > 0$ ist. Man bemerke vor allem, daß die Reihe

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots$$

divergent sein muß, da für sie $u_n = 1/a_n$, $a_n u_n = 1$ ist. Es ist aber bekannt (§ 203), daß in solchem Falle auch die Reihe

$$\frac{1}{a_1 \sigma_1} + \frac{1}{a_2 \sigma_2} + \frac{1}{a_3 \sigma_3} + \cdots$$

divergiert, wobei σ_n die Summe der n ersten Glieder der ersten Reihe ist. Inzwischen hat man

$$u_n = \frac{1}{a_n \sigma_n}, \ \lim a_n u_n = \lim \frac{1}{\sigma_n} = 0.$$

208. Theorem II. (Theorem von Kummer.) $a_1, a_2, a_3, \cdots$ sei eine Folge von positiven Zahlen. Wenn für unendlich zunehmendes n der Ausdruck

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \tag{6}$$

schließlich größer bleibt als eine positive Zahl, so ist die Reihe mit positiven Gliedern $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ konvergent. Wenn dagegen der betrachtete Ausdruck schließlich negativ bleibt, und wenn die Reihe $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots$ divergent ist, so ist auch die Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ divergent[2]).

In der Tat kann man aus $a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} > l$, da u_{n+1} positiv ist, folgern

$$a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1} > l u_{n+1} \tag{7}$$

und sieht sofort, daß die positive Größe $a_n u_n$ abnimmt, wenn n wächst, und daß sie daher nach einem endlichen Grenzwert konvergiert. Daraus folgt, daß die Reihe

$$(a_1 u_1 - a_2 u_2) + (a_2 u_2 - a_3 u_3) + (a_3 u_3 - a_4 u_4) + \cdots$$

konvergent ist, da die Summe der n ersten Glieder $a_1 u_1 - a_{n+1} u_{n+1}$ ist und für unendliches n einen endlichen Grenzwert hat. Die vorstehende Reihe bleibt konvergent, wenn man ihre Glieder mit $1/l$ multipliziert. Also ist die Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ konvergent, da

1) Oeuvres, 2e éd., p. 398.

2) Allgemeinere Sätze findet man in der Arbeit von Dini „Sulle serie convergenti a termini positivi“ (Annali dell' Univ. Tosc., IX).

aus (7) hervorgeht, daß ihre Glieder, die wir als positiv voraussetzen, schließlich kleiner sind als die entsprechenden Glieder einer konvergenten Reihe. Dagegen leitet man aus $a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} < 0$ ab, daß $a_n u_n$ mit n wächst, und daraus (§ 205), daß die Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ divergent ist.

209. Bemerkung. Gewöhnlich besteht die Anwendung des obigen Theorems darin, daß man den Grenzwert des Ausdrucks (6) sucht. Die Reihe ist konvergent oder divergent, je nachdem dieser Grenzwert positiv oder negativ ist. Wenn er null ist, so kann man garnichts über die Konvergenz oder die Divergenz der Reihe sagen, außer wenn der Ausdruck (6) bei der Annäherung an die Null immer negativ bleibt, in welchem Falle man behaupten kann, daß die Reihe divergent ist.

210. Folgerungen. a) Eine Reihe mit positiven Gliedern ist konvergent oder divergent, je nachdem das Verhältnis eines Gliedes zu dem vorhergehenden Gliede für unendliches n einen Grenzwert hat, der kleiner oder größer ist als die Einheit. Diesen Satz, der ein Spezialfall des Theorems von Kummer ist $(a_n = 1)$, kann man auch aus einem früheren Satze (§ 191) ableiten, indem man die gegebene Reihe mit der geometrischen Progression $1 + x + x^2 + \cdots$ vergleicht, welche konvergent ist für $x < 1$, divergent für $x \geqq 1$.

b) Eine Reihe mit positiven Gliedern ist konvergent oder divergent, je nachdem der Ausdruck $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$ für unendliches n einen Grenzwert hat, der größer oder kleiner ist als die Einheit. Dies ist das Kriterium von Raabe. Es ergibt sich sofort aus dem Theorem von Kummer, wenn man $a_n = n$ nimmt.

c) Eine Reihe mit positiven Gliedern ist konvergent oder divergent, je nachdem der Ausdruck

$$\left(n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1\right)\log n$$

für unendliches n einen Grenzwert hat, der größer oder kleiner ist als die Einheit. In der Tat, es sei l dieser Grenzwert. Für $a_n = n \log n$ wird der Ausdruck (6) gleich dem obigen, vermindert um $(n+1)\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, und konvergiert daher nach $l - 1$, d. h. nach einem positiven oder negativen Grenzwert, je nachdem $l > 1$ oder $l < 1$ ist.

211. Bemerkungen. a) Man kann die Reihe der Folgerungen des Kummerschen Theorems unbegrenzt fortsetzen, indem man noch successiv folgende Annahmen macht

$a_n = n \log n, \quad n \log n \cdot \log\log n, \quad n \log n \cdot \log\log n \cdot \log\log\log n, \quad \ldots$

Man erhält auf diese Weise die Ausdrücke

$$\left(\left(n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1\right)\log n - 1\right)\log\log n,$$

$$\left(\left(\left(n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1\right)\log n - 1\right)\log\log n - 1\right)\log\log\log n, \quad \text{u. s. f.}$$

Dieselben können zusammen mit den drei in den vorigen Folgerungen betrachteten Grenzwerte l, l', l'', ... besitzen. Von diesen kann aber nur einer einen endlichen Wert haben, der von der Einheit verschieden ist: denn es ist klar, daß alle ihm vorangehenden gleich 1 sind und alle ihm folgenden unendlich. Es genügt das Vorhandensein eines solchen Grenzwertes, der nicht gleich der Einheit ist, um entscheiden zu können, ob die Reihe konvergent oder divergent ist. Es kommt darauf an, ob dieser Grenzwert größer oder kleiner als 1 ist.

b) Offenbar gibt es Reihen, für welche die unendlich vielen soeben betrachteten Grenzwerte alle gleich 1 sind. Aber es gibt unendlich viele andere mögliche Formen von a_n in dem Kummerschen Theorem, und wenn man findet, daß der Ausdruck (6) für unendliches n nach Null konvergiert, so kann man statt seiner das Produkt des Ausdrucks mit σ_n betrachten. Je nachdem dieses Produkt schließlich kleiner bleibt als 1 oder größer als eine Zahl, die selbst größer als 1 ist, kann man behaupten, daß die Reihe divergent oder konvergent ist. Dieser Satz ist nicht wesentlich verschieden von dem Kummerschen Theorem, aus welchem man ihn erhält, wenn man a_n in $a_n\sigma_n$ verwandelt und bemerkt, daß

$$a_n\sigma_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}\sigma_{n+1} = \left(a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}\right)\sigma_n - 1$$

ist.

c) Übrigens sind diese Kriterien, wie groß auch ihr Nutzen bei den Reihen sein mag, die anzutreffen man am häufigsten Gelegenheit hat, doch weit entfernt wahre und eigentliche Symptome der Konvergenz oder Divergenz zu bieten. Es ist z. B., wenn wir uns auch nur auf den einfachsten Fall ($a_n = 1$) beschränken, nützlich zu bemerken, daß eine Reihe konvergieren kann, trotzdem das Verhältnis eines Gliedes zu dem vorhergehenden nicht aufhört Werte anzunehmen, die größer als 1, ja sogar beliebig groß sind. Dies tritt beispielsweise ein bei der ganz einfachen Reihe $\alpha + \beta^2 + \alpha^3 + \beta^4 + \alpha^5 + \cdots$, die konvergiert und positive Glieder hat, wenn α und β in dem Intervall $(0, 1)$ mit Ausschluß der Grenzen gewählt werden. Wenn außerdem $\alpha < \beta$ ist, so hat das Verhältnis des n-ten Gliedes zu dem vorhergehenden den Grenzwert Null für ungerades n, wächst dagegen über alle Grenzen für gerades n. Nichtsdestoweniger sei bemerkt, daß eine solche Unregelmäßigkeit sich immer dadurch beseitigen läßt[1]), daß man die Glieder geeignet gruppiert, ohne dabei die Reihenfolge, in der sie dastehen, zu ändern. Ist nämlich eine noch so kleine Zahl k gegeben, und beachtet man, daß S_n sich einem Grenzwert $S > 0$ nähert, während der Rest R_n den Grenzwert Null hat, so kann man immer einen Wert von n finden, von welchem ab $kS_n > R_n$ ist. Dies bleibt richtig, wenn man die Reihe von irgend einem ihrer Glieder ab betrachtet. Daraus geht hervor, daß sich die Glieder der Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$, wenn man sie in der Reihenfolge beläßt, die sie haben, so gruppieren lassen, daß sie eine neue Reihe $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$ bilden, deren Glieder der Ungleichung

$$kv_n > v_{n+1} + v_{n+2} + v_{n+3} + \cdots$$

genügen und a fortiori der Ungleichung $v_{n+1}/v_n < k$, welches auch der Wert von n sein mag. Auf diese Weise verschwindet das fälschliche Divergenzsymptom, welches die ursprüngliche Reihe darbot.

212. Beispiele. a) Es sei der Charakter der Reihe

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots$$

zu ermitteln. Man bemerke, daß

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(n+1)^p}{n^p} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p, \quad \lim n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = p$$

ist. Nach der Raabeschen Regel konvergiert oder divergiert also die Reihe, je nachdem $p > 1$ oder $p < 1$ ist. Für $p = 1$ wissen wir bereits, daß die Reihe divergent ist. Mithin konvergiert die vorgelegte Reihe nur, wenn p größer als 1 ist.

b) Man betrachte allgemeiner die Reihe, die für $n > 1$ durch das allgemeine Glied $u_n = 1/n^p(\log n)^q$ definiert ist. Zunächst bemerke man, daß man wegen

$$\frac{1}{n+1} < -\log\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

schreiben kann

$$\frac{\log(n+1)}{\log n} = 1 + \frac{\theta}{n \log n},$$

1) Diese Bemerkungen verdanken wir Lerch und Weyr (Jornal de Sciencias, 1886—87, pp. 79, 97).

wobei θ zwischen 0 und 1 liegt und für unendliches n die Einheit als Grenzwert hat. Es ist hiernach

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p \left(1 + \frac{\theta}{n \log n}\right)^q = \left(1 + \frac{p}{n} + \cdots\right)\left(1 + \frac{q\theta}{n \log n} + \cdots\right),$$

mithin, wenn man das Produkt ausrechnet und die Glieder beiseite läßt, welche nach Multiplikation mit $n \log n$ den Grenzwert Null haben,

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = p + \frac{q\theta}{\log n} + \cdots, \quad \lim n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = p.$$

Also ist die Reihe konvergent für $p > 1$, divergent für $p < 1$. Wenn $p = 1$ ist, so hat man

$$\lim \left(n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1\right) \log n = q \lim \theta = q,$$

und die Reihe divergiert daher für $q < 1$, während sie für $q > 1$ konvergiert (§ 210, c). Endlich wissen wir bereits (§ 204), daß die Reihe divergiert, wenn p und q beide gleich der Einheit sind. Die vorgelegte Reihe ist also, um zusammenzufassen,

$$\text{konvergent für} \left| \begin{array}{l} p > 1, \quad q \text{ beliebig} \\ p = 1, \quad q > 1 \end{array} \right.$$

$$\text{divergent für} \left| \begin{array}{l} p = 1, \quad q \leqq 1 \\ p < 1, \quad q \text{ beliebig.} \end{array} \right.$$

In dem letzten der vier Fälle folgt die Divergenz auch (§ 206) aus dem Umstand, daß (§ 161)

$$\lim n u_n = \lim \frac{n^{1-p}}{(\log n)^q} = \infty$$

ist.

213. Theorem III. Wenn in einer Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ mit positiven Gliedern $\sqrt[n]{u_n}$ schließlich kleiner bleibt als eine gegebene Zahl, die selbst kleiner als 1 ist, so ist die Reihe konvergent. Dagegen ist sie divergent, wenn $\sqrt[n]{u_n}$ schließlich niemals kleiner als die Einheit wird.

In der Tat ergibt sich aus $\sqrt[n]{u_n} < x < 1$, daß $u_n < x^n$ ist, und die Konvergenz der Reihe, welche als allgemeines Glied x^n hat, ist bekannt (§ 182). Es konvergiert also (§ 190, b) a fortiori die gegebene Reihe. Dagegen ist, wenn $\sqrt[n]{u_n} \geqq 1$ ist, $u_n \geqq 1$ u. s. w. Eine Anwendung dieses Satzes besteht darin, daß man den Grenzwert von $\sqrt[n]{u_n}$ für unendliches n sucht. Die Reihe ist konvergent oder divergent, je nachdem der besagte Grenzwert kleiner oder größer ist als die Einheit. Wenn $\lim \sqrt[n]{u_n} = 1$ ist, so kann man nichts aussagen.

Wenn aber $\sqrt[n]{u_n}$ zwar die Einheit als Grenzwert hat, aber schließlich nie kleiner ist als 1, so divergiert die Reihe.

214. Bemerkungen. Das vorstehende Kriterium ist so zu sagen äquivalent mit demjenigen, welches auf der Untersuchung des Verhältnisses u_{n+1}/u_n beruht; denn wir wissen (§ 142, b), daß, wenn der Grenzwert l des Verhältnisses existiert, auch derjenige von $\sqrt[n]{u_n}$ existiert und gleich l ist. Dies hindert nicht, daß eine Reihe konvergieren kann, während doch weder der eine noch der andere der genannten Grenzwerte existiert, wie es z. B. bei der oben betrachteten Reihe $\alpha + \beta^2 + \alpha^3 + \beta^4 + \cdots$ der Fall ist. Das auf dem Grenzwert von $\sqrt[n]{u_n}$ beruhende Kriterium kann man selten anwenden, obgleich es theoretisch für besser erklärt werden muß als das andere, welches auf dem Grenzwert von u_{n+1}/u_n beruht; denn dieser zweite Grenzwert braucht nicht zu existieren, wenn der erste existiert. Betrachten wir z. B. mit Lerch[1]) die durch das allgemeine Glied

$$u_n = q^{n-\nu} x^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)} \quad (0 < q < 1,\ x > 1)$$

definierte Reihe, in welcher ν die Anzahl der Ziffern von n darstellt. Da $\nu - 1$ nicht größer ist als der gemeine Logarithmus von n, so konvergiert mit unendlich zunehmendem n das Verhältnis ν^p/n nach Null (§ 163), welches auch der Wert von p sein mag. Daraus folgt

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim q^{1-\frac{\nu}{n}} x^{\frac{\nu^2}{2n}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)} = q < 1.$$

Also konvergiert die Reihe, wie groß auch x sein mag. Hätten wir dagegen anstatt $\sqrt[n]{u_n}$ das Verhältnis von zwei benachbarten Gliedern betrachtet, so würden wir nichts haben schließen können. In der Tat, wenn ν' die Anzahl der Ziffern von $n-1$ ist, so ist klar, daß die Differenz $\nu - \nu'$, die im allgemeinen null ist, nur dann den Wert 1 annimmt, wenn n eine Potenz von 10 ist. Daraus folgt, daß das Verhältnis

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = q^{1-(\nu-\nu')} \cdot x^{\frac{1}{2}(\nu-\nu')(\nu+\nu'+1)}$$

im allgemeinen gleich q ist, daß es aber den Wert x^ν annimmt, so oft n gleich einer Potenz von 10 wird. Es existiert also eine Folge von Werten 1, 10, 100, 1000, ... derart, daß, wenn n sie bis ins Unendliche durchläuft, das Verhältnis eines Gliedes zu dem vorhergehenden jede Grenze überschreitet, obwohl die Reihe konvergent ist. Dies liefert eine Bestätigung für das, was wir in der dritten Bemerkung zu § 211 gesagt haben.

---

1) Abhandl. der böhm. Akademie d. Wiss. 1885.

215. Theorem IV. (Theorem von Jamet.) Eine Reihe mit positiven Gliedern $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ ist konvergent, wenn mit unendlich zunehmendem n der Ausdruck

$$(1 - \sqrt[n]{u_n})\frac{n}{\log n} \tag{8}$$

schließlich größer bleibt als eine Zahl, die größer als 1 ist, und sie ist divergent, wenn derselbe Ausdruck schließlich niemals mehr die Einheit übertrifft[1]).

Setzen wir in der Tat $u_n = n^{-p_n}$, und beachten wir, daß wegen

$$\sqrt[n]{u_n} = n^{-\frac{p_n}{n}} = e^{-\frac{p_n}{n}\log n} > 1 - \frac{p_n}{n}\log n$$

die folgende Ungleichheit besteht:

$$p_n > (1 - \sqrt[n]{u_n})\frac{n}{\log n}\cdot$$

Wenn also der Ausdruck (8) schließlich größer bleibt als $p > 1$, so muß dasselbe von p_n gelten, und die Reihe ist daher konvergent (§ 190, b), weil ihre Glieder, die als positiv vorausgesetzt werden, schließlich kleiner sind als die entsprechenden Glieder der konvergenten (§ 212, a) Reihe

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots.$$

Wenn dagegen der Ausdruck (8) schließlich kleiner oder gleich 1 bleibt, so bedeutet dies, daß von einem gewissen Werte von n ab

$$(1 - \sqrt[n]{u_n})\frac{n}{\log n} \leqq 1, \text{ d. h. } u_n \geqq \left(1 - \frac{1}{n}\log n\right)^n$$

ist. Mithin ist die Reihe divergent (§ 190, c), da ihre Glieder nicht kleiner sind als die entsprechenden Glieder der divergenten (§ 207, d) Reihe

$$1 + (1 - \tfrac{1}{2}\log 2)^2 + (1 - \tfrac{1}{3}\log 3)^3 + (1 - \tfrac{1}{4}\log 4)^4 + \cdots.$$

216. Bemerkung. Man wendet das Theorem von Jamet an, indem man den Grenzwert des Ausdrucks (8) für unendliches n sucht. Die Reihe ist konvergent oder divergent, je nachdem der genannte Grenzwert größer oder kleiner als 1 ist. Wenn der Grenzwert 1 ist, so kann man ohne weitere Prüfung nichts aussagen, außer wenn der betrachtete Ausdruck schließlich niemals größer ist als sein Grenzwert, in welchem Falle die Reihe divergent ist. Andernfalls muß man sich ein anderes Kriterium verschaffen,

1) Mathesis, 1892, p. 80.

welches das obige ergänzt. Man kann z. B. anstatt (8) den Ausdruck

$$\left(\left(1-\sqrt[n]{u_n}\right)\frac{n}{\log n}-1\right)\frac{\log n}{\log\log n}$$

betrachten. Zum Beweise genügt es $u_n = \frac{1}{n(\log n)^{q_n}}$ zu setzen, daraus zu folgern, daß q_n den vorstehenden Ausdruck übertrifft, und sich zu erinnern (§ 212, b), daß die Reihe

$$\frac{1}{2(\log 2)^q}+\frac{1}{3(\log 3)^q}+\frac{1}{4(\log 4)^q}+\cdots$$

konvergent ist für $q > 1$, divergent dagegen für $q \leqq 1$.

217. Beispiele. Wenn die Reihe

$$\frac{1}{(\log 2)^2}+\frac{1}{(\log 3)^3}+\frac{1}{(\log 4)^4}+\cdots$$

gegeben ist, so kann man, wenn man $u_1 = 0$ als ihr Anfangsglied annimmt, die Konvergenz konstatieren, indem man schreibt

$$\lim\sqrt[n]{u_n} = \lim\frac{1}{\log n} = 0.$$

Bei den Reihen mit folgenden allgemeinen Gliedern

$$u_n = \frac{1}{(\log n)^{\log n}},\quad \frac{1}{(\log\log n)^{\log n}},\quad \frac{1}{(\log n)^{\log\log n}}$$

findet man dagegen $\lim\sqrt[n]{u_n} = 1$ und wird dazu geführt, das Kriterium von Jamet anzuwenden. Für die Praxis ist es allerdings bequemer, sich direkt des Prinzipes zu bedienen, welches dem Beweis des genannten Kriteriums zu Grunde liegt und darin besteht, daß man die vorgelegte Reihe mit derjenigen vergleicht, deren allgemeines Glied n^{-p} ist. Dies kommt darauf hinaus, anstatt des Ausdrucks (8) das Verhältnis p_n von $\log\frac{1}{u_n}$ zu $\log n$ zu betrachten, und zwar kann man behaupten, daß die Reihe konvergent ist, wenn dieses Verhältnis schließlich größer bleibt als eine Zahl, die selbst größer ist als 1, und daß sie divergent ist, wenn dasselbe Verhältnis schließlich niemals mehr größer ist als die Einheit. Z. B. ergibt sich für die drei oben definierten Reihen bezüglich

$$p_n = \log\log n,\quad \log\log\log n,\quad \frac{(\log\log n)^2}{\log n}.$$

Da die beiden ersten Werte von p_n mit n unbegrenzt zunehmen, während der dritte den Grenzwert Null hat, so sieht man, daß die beiden ersten Reihen konvergent sind, die dritte aber divergent. Findet man ferner 1 als Grenzwert von p_n, so kann man dazu übergehen, das Verhältnis von $\log\frac{1}{n u_n}$ zu $\log\log n$ zu betrachten, u. s. f. Immerhin kann es bei andern Reihen vorkommen, daß das Kriterium von Jamet in seiner ursprünglichen

Form vorzuziehen ist. So findet man z. B. für $u_n = \left(1 - \frac{x}{n}\log n\right)^n$ als Grenzwert des Ausdruckes (8) die Größe x und sieht daher sofort, daß die Reihe (vgl. § 207, d)

$$\left(1 - \frac{x}{2}\log 2\right)^2 + \left(1 - \frac{x}{3}\log 3\right)^3 + \left(1 - \frac{x}{4}\log 4\right)^4 + \cdots$$

nur für $x > 1$ konvergiert.

Übungen und Anwendungen.

218. Übungen. a) Die wenigen bisher bewiesenen Konvergenzkriterien setzen uns in den Stand, in sehr rascher Weise den Charakter der in §§ 184, 186 betrachteten Reihen zu erkennen. Bei der Exponentialreihe genügt es z. B. zu bemerken, daß

$$\text{für } u_n = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \qquad \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{x}{n} = 0$$

ist. Die Reihe ist also (§ 210) konvergent für jeden positiven Wert von x. Sie konvergiert auch für jeden negativen Wert von x, weil (§ 190, a) in diesem Falle die aus den absoluten Beträgen der Glieder gebildete Reihe konvergiert oder auch, weil (§ 195) die Glieder, die abwechselnd positiv und negativ sind, schließlich dem absoluten Betrage nach beständig abnehmen, sobald nämlich n größer als $|x|$ ist, und überdies nach Null konvergieren. Ähnlich verfährt man bei der logarithmischen Reihe. Ihr allgemeines Glied $u_n = \pm \frac{x^n}{n}$ wächst mit n unbegrenzt oder konvergiert nach dem Grenzwert Null, je nachdem $|x|$ die Einheit übertrifft oder nicht, und man ersieht daraus, daß $|x| < 1$ eine notwendige Bedingung für die Konvergenz ist (§ 188, a). Das Verhältnis eines Gliedes zu dem vorhergehenden in der Reihe, die aus den absoluten Beträgen der Glieder gebildet ist, hat als Grenzwert

$$\lim \frac{n\,|x|}{n+1} = |x|.$$

Also ist die Reihe konvergent (§§ 210; 190, a), wenn $|x| < 1$ ist. Wenn $|x| = 1$ ist, so ist die Reihe divergent für $x = -1$, da sie in diesem Falle mit der harmonischen Reihe zusammenfällt, und sie ist konvergent für $x = 1$, da alsdann die Glieder abwechselnd positive und negative Werte haben, die dem absoluten Betrage nach abnehmen und nach Null konvergieren. Übrigens gilt dies für alle positiven Werte von x, die nicht größer als 1 sind, da die Ungleichung

$$\frac{x^n}{n} > \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

für $x < 1 + \frac{1}{n}$ gilt, mithin für $x \leqq 1$, welches auch der Wert von n sein mag.

b) Im besondern haben wir gefunden (§ 186)

(9) $$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots = \log 2 = 0{,}6931471\ldots,$$

und zwar mit Hilfe der Formel (1), die sehr nützlich ist, insofern sie die Summen verschiedener Reihen vom Typus (9) zu berechnen erlaubt. In der Tat haben wir gesehen, daß die Summe σ_n der $2n$ ersten Glieder der Reihe (9), eine Summe, die offenbar gleich

$$H_{2n} - H_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

ist, für unendliches n den Grenzwert $\log 2$ hat. Wenn nun die Reihe

(10) $$1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \cdots$$

gegeben ist, so erkennt man sofort, daß

$$S_{3n} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{4n-1} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$
$$= H_{4n} - \frac{1}{2} H_{2n} - \frac{1}{2} H_n = \sigma_{2n} + \frac{1}{2}\sigma_n$$

ist, mithin $S = \frac{3}{2}\log 2 = 1{,}0397207\ldots$, da sich S_{3n-1} und S_{3n-2} von S_{3n} um Größen unterscheiden, die den Grenzwert Null haben. Man bemerke hierbei, daß es nicht immer erlaubt ist, die Anordnung der Glieder in einer konvergenten Reihe zu ändern. In der Tat haben die Reihen (9) und (10), welche sich nur durch die Anordnung ihrer Glieder unterscheiden, verschiedene Summen. Bei der Reihe

$$1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9} + \cdots$$

hat man in analoger Weise

$$S_{3n} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \cdots + \frac{1}{4n-1} = \sigma_{2n} - \frac{1}{2}\sigma_n,$$

mithin $S = \frac{1}{2}\log 2 = 0{,}3465735\ldots$ Endlich ergibt sich bei der Reihe

$$1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{2}{6} + \tfrac{1}{7} + \cdots$$

$S_{3n} = H_{3n} - H_n$, $S = \log 3 = 1{,}0986122\ldots$ Allgemeiner findet man $\log m$ als Summe der Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} - 1 + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{2m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2m+1} + \cdots.$$

c) Es ist, wie man bereits aus den vorstehenden Beispielen ersieht, zwecklos auf die Konvergenzkriterien zurückzugreifen, so oft man die Summe der Reihe berechnen kann. Ist z. B. gegeben die Reihe

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots,$$

so kann man ihre Konvergenz konstatieren, indem man bemerkt, daß

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} = 1 + \frac{2}{n}, \quad n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = 2$$

ist, oder auch (§ 190, b), indem man beachtet, daß $u_n < \frac{1}{n^2}$ ist, und sich erinnert (§ 212, a), daß $\frac{1}{n^2}$ das allgemeine Glied einer konvergenten Reihe ist. Alles dies ist aber überflüssig, da man u_n nur die Form $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ zu geben braucht, um sofort zu finden

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}, \quad S = 1.$$

Ebenso setze man, wenn es sich um die Reihe

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 10 \cdot 11} + \frac{1}{13 \cdot 14 \cdot 15} + \cdots$$

handelt,

$$u_n = \frac{\alpha}{(4n-3)(4n-2)} + \frac{\beta}{(4n-2)(4n-1)}$$

und suche α und β derart zu bestimmen, daß identisch

$$(4n-1)\alpha + (4n-3)\beta = 1$$

wird, d. h. $\alpha + \beta = 0$, $\alpha + 3\beta = -1$, woraus folgt $\alpha = -\beta = \frac{1}{2}$. Da nun

$$u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n-1}\right)$$

ist, so wird $S_n = \frac{1}{2}\sigma_{2n} - \frac{1}{4}\sigma_n$, mithin $S = \frac{1}{4}\log 2 = 0{,}1732867\ldots$ Ebenso zeigt sich, wenn die Reihe

$$\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{4}{5 \cdot 6} + \frac{8}{9 \cdot 10} + \frac{13}{14 \cdot 15} + \frac{19}{20 \cdot 21} + \cdots$$

gegeben ist, leicht, daß der Zähler des n-ten Bruches

$$1 + 3 + 4 + 5 + \cdots + (n+1) = \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2) - 2 = \tfrac{1}{2}n(n+3) - 1$$

ist, folglich der Nenner

$$\tfrac{1}{2}n(n+3)\left(\tfrac{1}{2}n(n+3)+1\right) = \tfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

Nun setze man

$$u_n = \frac{\alpha}{n(n+1)} + \frac{\beta}{(n+1)(n+2)} + \frac{\gamma}{(n+2)(n+3)},$$

so daß identisch sein muß

$$(n+2)(n+3)\alpha + n(n+3)\beta + n(n+1)\gamma = 2(n^2 + 3n - 2).$$

Nimmt man successiv $n = 0$, $n = -3$, so erhält man sofort $\alpha = \gamma = -\frac{2}{3}$. Vergleicht man ferner die Koeffizienten von n^2 miteinander, so erhält man $\alpha + \beta + \gamma = 2$ und folgert daraus $\beta = \frac{10}{3}$. Es ist also

$$S = -\tfrac{2}{3} + \tfrac{10}{3} \cdot \tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{3} = \tfrac{7}{9}.$$

d) Um die Konvergenz der Reihe

$$(11) \qquad 1 - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2+x} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3+x} + \cdots$$

zu beweisen, kann man die Glieder paarweise gruppieren und bemerken, daß

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)}, \quad \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{n(n+x)}{(n+1)(n+x+1)} = 1$$

ist. Wendet man nunmehr die Raabesche Regel (§ 210, b) an, so kommt

$$\lim n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim\left(1 + \frac{n+1}{n+x}\right) = 2.$$

Einfacher ist folgendes Verfahren. Man beachte, daß $u_n < \frac{x}{n^2}$ ist, und daß die Reihe $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots$ konvergiert. In Wirklichkeit ist hiermit nur gezeigt, daß die Summe S_n der n ersten Glieder der Reihe (11) nach einem Grenzwert S konvergiert, wenn n durch gerade Werte ins Unendliche wächst. Aber wenn n ungerade ist, so hat man

$$S_n = S_{n-1} + \frac{2}{n+1}, \quad \lim S_n = \lim S_{n-1} = S.$$

Erteilt man x einen positiven ganzzahligen Wert m, so reduziert sich die Summe der Reihe (11) auf die Summe der m ersten Glieder der harmonischen Reihe. In der Tat ist die Summe der $2n$ ersten Glieder

$$H_n - \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{m+n}\right) = H_m - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+m}\right)$$

und hat offenbar den Grenzwert H_m, wenn bei unverändertem m die Zahl n unbegrenzt zunimmt.

e) Bei der Reihe

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1 \cdot 2}{(x+1)(x+2)} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \cdots$$

hat man

$$u_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}, \quad \lim \frac{u_n}{u_{n+1}} = \lim\left(1 + \frac{x}{n+1}\right) = 1$$

Man muß daher das Raabesche Kriterium anwenden:

$$\lim n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim \frac{nx}{n+1} = x.$$

Also ist die Reihe konvergent für $x > 1$, divergent für $x < 1$. Sie divergiert auch für $x = 1$, wie man direkt erkennt. Es ist übrigens, wenn die Reihe konvergiert, leicht ihre Summe zu erhalten. Man braucht nur zu beachten, daß man der evidenten Identität $(x+n)\,u_n = n\,u_{n-1}$ die Form geben kann

$$(x-1)\,u_n = n\,u_{n-1} - (n+1)\,u_n,$$

so daß sich, wenn man n in $n-1,\ n-2,\ \ldots,\ 3,\ 2,\ 1$ verwandelt und dann summiert, ergibt

$$(x-1)\,S_n = 1 - (n+1)\,u_n.$$

Da nun die Glieder abnehmend aufeinander folgen, so ist bekanntlich (§ 207, c) $\lim n u_n = 0$. Also ist $S = \frac{1}{x-1}$.

f) Für positives x, welches kleiner als die Zahl e ist, konvergiert die Reihe

$$\frac{x}{1} + 2!\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 3!\left(\frac{x}{3}\right)^3 + 4!\left(\frac{x}{4}\right)^4 + \cdots. \tag{12}$$

In der Tat ist

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}, \quad \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{e} < 1\,.$$

Für $x > e$ ist die Reihe divergent. Sie ist auch divergent für $x = e$, da unter dieser Voraussetzung das betrachtete Verhältnis beständig größer bleibt als die Einheit (§ 156). Der Leser wird beweisen können, daß allgemeiner die Reihe, welche als allgemeines Glied $u_n = \frac{n!}{n^p}\left(\frac{e}{n}\right)^n$ hat, nur für $p > \frac{3}{2}$ konvergiert. Die Reihe (12) gehört dem Typus der Reihen

$$\frac{x}{a_1} + \frac{x^2}{a_1 a_2} + \frac{x^3}{a_1 a_2 a_3} + \frac{x^4}{a_1 a_2 a_3 a_4} + \cdots$$

an, bei welchen angenommen wird, daß a_n für unendliches n einen Grenzwert a besitzt. Da

$$\lim \frac{u_n}{u_{n-1}} = \lim \frac{x}{a_n} = \frac{x}{a}$$

ist, so sieht man sofort, daß die Reihe konvergiert für $x < a$, divergiert für $x > a$. Sie ist auch für $x = a$ divergent, wenn die Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ wachsend aufeinander folgen, da man alsdann beständig $\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{a}{a_n} > 1$ hat. In den andern Fällen hängt die Konvergenz von der speziellen Folge ab, die man betrachtet, und in erster Linie von dem Verhalten von $n(a_n - a)$ für unendliches n.

g) Es soll unter der Voraussetzung, daß der Grenzwert a von a_n für unendliches n existiert, die Reihe

$$\frac{1!\,x}{x+a_1} + \frac{2!\,x^2}{(x+a_1)(2x+a_2)} + \frac{3!\,x^3}{(x+a_1)(2x+a_2)(3x+a_3)} + \cdots$$

untersucht werden. Man hat

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{nx}{nx+a_n}, \quad \lim \frac{u_n}{u_{n-1}} = 1\,.$$

Ferner führt die Raabesche Regel zur Berechnung des folgenden Grenzwertes:

$$\lim n\left(\frac{nx+a_n}{nx} - 1\right) = \lim \frac{a_n}{x} = \frac{a}{x}\,.$$

Also ist die Reihe konvergent für $x < a$, divergent für $x > a$, und ihr Charakter für $x = a$ hängt in erster Linie davon ab, wie sich $(a_n - a)\log n$ für unendliches n verhält.

h) Die Divergenz der Reihe

$$\sin\frac{\alpha}{1}+\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{3}+\sin\frac{\alpha}{4}+\cdots$$

für jeden positiven oder negativen Wert von α folgt unmittelbar aus der Bemerkung, daß

$$\lim n\,u_n=\alpha\lim\frac{\sin\frac{\alpha}{n}}{\frac{\alpha}{n}}=\alpha$$

ist. Dagegen konvergiert die Reihe

$$\sin\frac{\alpha}{1}+\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{\alpha}{3}+\frac{1}{4}\sin\frac{\alpha}{4}+\cdots,$$

da der absolute Betrag ihres allgemeinen Gliedes kleiner ist als das Produkt von $\frac{1}{n^2}$ mit der Konstanten $|\alpha|$.

i) Die Reihe

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\sin 4\alpha+\cdots \tag{13}$$

konvergiert nicht, da das allgemeine Glied $\sin n\alpha$ nicht den Grenzwert Null hat (wenn man voraussetzt, daß α kein Vielfaches von π ist). Die Reihe ist unbestimmt. In der Tat, wenn man die Glieder von S_n mit $\sin\frac{\alpha}{2}$ multipliziert und sich an die Relation

$$2\sin\nu\alpha\,\sin\frac{\alpha}{2}=\cos(2\nu-1)\frac{\alpha}{2}-\cos(2\nu+1)\frac{\alpha}{2}$$

erinnert, so erhält man

$$2S_n\sin\frac{\alpha}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}-\cos(2n+1)\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}.$$

Die Summe

$$S_n=\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin(n+1)\frac{\alpha}{2}$$

oszilliert also ohne Ende. Wenn man ferner beachtet, daß bei festgehaltenem α der absolute Betrag von

$$S_{n+p}-S_n=\frac{\sin\frac{p\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin\left(n\alpha+\frac{p+1}{2}\alpha\right)$$

nicht beliebig groß werden kann, so erkennt man, daß die Reihe (13) zu den in einem bekannten Theorem (§ 194) betrachteten gehört. Daraus folgt, daß man die Konvergenz der Reihe

$$a_1\sin\alpha+a_2\sin 2\alpha+a_3\sin 3\alpha+a_4\sin 4\alpha+\cdots$$

behaupten kann, wie beschaffen auch die Folge der Zahlen

$a_1, a_2, a_3, \ldots$ sein mag, wenn sie nur abnehmen und nach dem Grenzwert Null konvergieren. Z. B. ist die Reihe

$$\sin\alpha + \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha + \tfrac{1}{3}\sin 3\alpha + \tfrac{1}{4}\sin 4\alpha + \cdots$$

konvergent für jeden Wert von α.

j) Für ein zwischen 0 und 1 enthaltenes x die Konvergenz der Reihe

$$\frac{x\sin^2\alpha}{1+x\cos^2\alpha} + \frac{x^2\sin^2\alpha\sin^2 2\alpha}{(1+x\cos^2\alpha)(1+x\cos^2 2\alpha)} + \cdots$$

nachzuweisen. Man hat

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{x\sin^2 n\alpha}{1+x\cos^2 n\alpha}.$$

Wenn n unbegrenzt wächst, so hören $\sin^2 n\alpha$ und $\cos^2 n\alpha$ niemals auf zwischen 0 und 1 zu oszillieren, mithin hat das vorstehende Verhältnis keinen bestimmten Grenzwert. Nichtsdestoweniger beachte man, daß beständig

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} < x < 1$$

ist, und daß dies genügt, um die Konvergenz der Reihe zu behaupten.

k) Zu beweisen, daß man[1]) die Konvergenz der Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ behaupten kann, sobald es gelingt eine positive Veränderliche a_n zu finden von der Beschaffenheit, daß von einem gewissen Wert von n ab

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \geqq a_n\left(1 + \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

ist. Man gewinnt in der Tat aus dieser Relation

$$\frac{u_n}{a_n} - \frac{u_{n+1}}{a_{n+1}} \geqq u_{n+1}.$$

$\frac{u_n}{a_n}$ nimmt also ab und hat daher einen endlichen Grenzwert. Damit ist die Konvergenz der Reihe

$$\left(\frac{u_1}{a_1} - \frac{u_2}{a_2}\right) + \left(\frac{u_2}{a_2} - \frac{u_3}{a_3}\right) + \left(\frac{u_3}{a_3} - \frac{u_4}{a_4}\right) + \cdots$$

bewiesen und a fortiori die der vorgelegten Reihe.

l) Gegeben ist eine beliebige Folge von positiven Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Man soll die Konvergenz der folgenden Reihe beweisen:

$$\frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)} + \frac{a_3}{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)} + \cdots.$$

Es genügt zu bemerken, daß

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = a_n\left(1 + \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

1) Diese spezielle Konvergenzregel ist von F. Giudice in den Rendiconti del Circolo matematico di Palermo (1890) angegeben worden.

ist, um zu erkennen, daß die Konvergenz eine unmittelbare Folge des im vorigen Übungsbeispiel bewiesenen Satzes ist. Übrigens hat man

$$u_n = \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_{n-1})} - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)},$$

mithin

$$S_n = 1 - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)}.$$

Die Zahl S_n wächst gleichzeitig mit n, bleibt aber kleiner als die Einheit. Sie konvergiert also nach einem Grenzwert $S \leqq 1$.

m) Wenn die Reihe

$$\frac{1}{a_1\sigma_1^p} + \frac{1}{a_2\sigma_2^p} + \frac{1}{a_3\sigma_3^p} + \frac{1}{a_4\sigma_4^p} + \cdots$$

gegeben ist, in welcher σ_n die Summe der n ersten Glieder der aus positiven Gliedern bestehenden divergenten Reihe

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \cdots$$

bedeutet, so hat man

$$u_n = \frac{1}{a_n\sigma_n^p}, \quad a_n\frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} = \frac{1}{\sigma_n^p} \cdot \frac{\sigma_{n+1}^p - \sigma_n^p}{\sigma_{n+1} - \sigma_n},$$

ferner

$$\left(a_n\frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}\right)\sigma_n = 1 + \frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n} + \left(\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n}\right)^{p-1} > p.$$

Also ist (§ 211, b), wenn p die Einheit übertrifft, die betrachtete Reihe konvergent. Wir wissen bereits (§ 203), daß für $p = 1$ und a fortiori für $p < 1$ die Reihe divergent ist. Hiernach wird der Leser leicht das Theorem von Jamet (§ 215) ausdehnen können, indem er zeigt, daß die Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ konvergiert, wenn der Ausdruck

$$\left(1 - \sqrt[\sigma_n]{a_n u_n}\right)\frac{\sigma_n}{\log\sigma_n}$$

schließlich größer bleibt als eine Zahl, die größer ist als 1, und divergiert, wenn dieser Ausdruck schließlich kleiner oder gleich 1 bleibt. Übrigens kann man statt des vorstehenden Ausdrucks auch das Verhältnis von $\log\frac{1}{a_n u_n}$ zu $\log\sigma_n$ betrachten.

219. Berechnung der natürlichen Logarithmen. Von der logarithmischen Reihe lassen sich sehr nützliche Anwendungen machen. Unter Bezugnahme auf das am Ende von § 186 Gesagte bemerken wir, daß sich durch Summierung von (3) und (4) die Formel ergibt

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \cdots\right),$$

welche nur in dem Intervall $(-1, 1)$ mit Ausschluß der Grenzen gilt. Im besondern hat man für $x = \frac{1}{2n+1}$

$$(14)\quad \log(n+1) = \log n + 2\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \cdots\right)$$

und kann folglich den natürlichen Logarithmus einer beliebigen ganzen Zahl berechnen, wenn man den natürlichen Logarithmus der ihr vorangehenden ganzen Zahl kennt. So findet man z. B. für $n = 1$

$$(15)\qquad \log 2 = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3\cdot 9} + \frac{1}{5\cdot 9^2} + \frac{1}{7\cdot 9^3} + \cdots\right),$$

ferner unter Beschränkung auf die acht ersten Glieder,

$$\log 2 = 0{,}69314718\ldots,$$

und man kann sicher sein, daß alle hingeschriebenen Dezimalstellen richtig sind, da der begangene Fehler

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{17\cdot 9^8} + \frac{1}{19\cdot 9^9} + \frac{1}{21\cdot 9^{10}} + \cdots\right) < \frac{2}{3\cdot 17}\left(\frac{1}{9^8} + \frac{1}{9^9} + \frac{1}{9^{10}} + \cdots\right)$$
$$= \frac{1}{4\cdot 3\cdot 17\cdot 9^7} = \frac{1}{975725676} < \frac{1}{10^8}$$

ist. Um dieselbe Annäherung mit Hilfe der Formel (9) zu erreichen, hätten wir (§ 196, c) mehr als hundert Millionen Glieder anwenden müssen. Übrigens kennt man verschiedene andere Formeln[1]), die noch viel vorteilhafter sind als die Formel (14). Nimmt man in der Fundamentalformel $x = \frac{2}{n^3 - 3n}$ und beachtet, daß

$$n^3 - 3n \pm 2 = (n \pm 2)(n \mp 1)^2$$

ist, so erhält man

$$\log\frac{(n+2)(n-1)^2}{(n-2)(n+1)^2} = \frac{4}{n^3-3n} + \frac{4^3}{3(n^3-3n)^3} + \frac{4^5}{5(n^3-3n)^5} + \cdots,$$

woraus man unter Beschränkung auf das erste Glied der Reihenentwickelung folgende Formel ableitet:

$$\log(n+2) = 2\log(n+1) - 2\log(n-1) + \log(n-2) + \frac{4}{n^3-3n}\cdot$$

Sie liefert den Logarithmus von $n+2$ mit vierundzwanzig Dezimalstellen, wenn die Logarithmen von $n+1$, $n-1$, $n-2$ bekannt sind, vorausgesetzt, daß n mehr als drei Ziffern hat. In der Tat ist der Fehler, den man durch Vernachlässigung der Glieder der Reihe vom zweiten an begeht, kleiner als

1) Man verdankt sie Lavernède (Nouvelles Annales de Mathématiques, t. X, p. 72) und Secretan (Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. XLIV, p. 1276). Siehe die hierüber von Brocard gemachten Angaben im Intermédiaire des Mathématiciens (t. VII, p. 252).

$$\frac{4^2}{3(n^3-3n)^3}\left(1+\frac{4}{(n^3-3n)^2}+\frac{4^2}{(n^3-3n)^4}+\cdots\right)=\frac{16}{3n(n^2-4)(n^2-3)(n^2-1)^2},$$

folglich (wenn n größer als 1000 ist) kleiner als $\frac{1}{10^{26}}$.

220. Berechnung der gemeinen Logarithmen. Bekanntlich lassen sich die auf eine gegebene Basis a bezüglichen Logarithmen aus den natürlichen Logarithmen ableiten, indem man diese mit einer gewissen Zahl M multipliziert, welche der Modul des betrachteten Logarithmensystems heißt. Auf Grund der Definition der Logarithmen ist jede Zahl n gleich $a^{\operatorname{Log} n}$ und im besondern gleich $e^{\log n}$. Daraus folgt, wenn man die Logarithmen der beiden Zahlen einander gleich setzt (Logarithmen, die dem einen oder dem andern System angehören), $\operatorname{Log} n = M \log n$, wo $M = \operatorname{Log} e$ oder $M = \frac{1}{\log a}$ ist. Um die gemeinen Logarithmen ($a = 10$) zu berechnen, muß man also vor allem den Wert ihres Moduls ermitteln: $M = \frac{1}{\log 10}$. Nun hat man aber nach der Formel (14)

$$\log 5 = \log 4 + 2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3\cdot 9^3}+\frac{1}{5\cdot 9^5}+\frac{1}{7\cdot 9^7}+\cdots\right),$$

mithin unter Erinnerung an (15)

$$\log 10 = 2\left(1+\frac{1}{3\cdot 9}+\frac{1}{5\cdot 9^2}+\cdots\right)+\frac{2}{9}\left(1+\frac{1}{3\cdot 81}+\frac{1}{5\cdot 81^2}+\cdots\right).$$

Beschränkt man sich in den beiden Reihen auf wenige Anfangsglieder, so findet man

$$\log 10 = 2{,}302585092\ldots,\qquad M = 0{,}434294481\ldots$$

Dies vorausgeschickt multipliziere man mit diesem M die beiden Seiten von (14). Dann erhält man die Formel

$$\operatorname{Log}(n+1) = \operatorname{Log} n + 2M\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\right),$$

welche zur Konstruktion der Tafeln für gemeine Logarithmen bequem genug ist. Will man z. B. die Logarithmen der Zahlen unterhalb 100000 haben, so genügt es die Logarithmen der zwischen 10^4 und 10^5 enthaltenen Zahlen zu berechnen, und man kann daher in der obigen Formel $n > 10^4$ voraussetzen. Selbst wenn man die Reihe auf das erste Glied allein beschränkt, so ist der Fehler, den man macht,

$$2M\left(\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\right)<\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(2n+1)^3}+\frac{1}{(2n+1)^5}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{12n(n+1)(2n+1)}<\frac{1}{24n^3}<\frac{1}{10^{13}},$$

und man kann daher, wenn man die Formel

$$\operatorname{Log}(n+1) = \operatorname{Log} n + \frac{2M}{2n+1}$$

zur Berechnung der gemeinen Logarithmen anwendet, sicher sein, daß die Resultate, die man erhält, bis auf weniger als eine Einheit der dreizehnten Dezimale angenähert sind. Eine größere Annäherung kann man erreichen, wenn man von den andern Formeln Gebrauch macht, deren wir im vorigen Paragraphen Erwähnung taten.

221. Formel von Stirling. Um eine der interessantesten Anwendungen von der Reihe (14) zu machen, wollen wir damit beginnen, dieselbe auf folgende Form zu bringen:

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \cdots.$$

Die Reihe auf der rechten Seite hat offenbar eine Summe, die kleiner als

$$1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots\right) = 1 + \frac{1}{12n(n+1)}$$

ist. Daraus folgt

$$1 < \left(n + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{12n(n+1)}$$

oder, wenn man von den Logarithmen zu den Numeri zurückgeht,

$$(16) \qquad e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1 + \frac{1}{12n(n+1)}}.$$

Dies vorausgeschickt setzen wir

$$(17) \qquad a_n = \frac{n!\,e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$$

und bemerken, daß

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e}$$

ist. Die Ungleichungen (16) werden

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < e^{\frac{1}{12n(n+1)}},$$

d. h.

$$a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a_{n+1} e^{-\frac{1}{12(n+1)}} < \cdots < a_{n+1} < a_n.$$

Wir sehen auf diese Weise, daß die Zahlen $a_n e^{-\frac{1}{12n}}$ gleichzeitig mit n wachsen, indem sie kleiner bleiben als die Zahlen a_n, welche ihrerseits eine abnehmende Folge bilden. Die einen wie die andern Zahlen haben also endliche Grenzwerte, die notwendig einander gleich sind, und wenn man setzt

$$\lim_{n=\infty} a_n = \lim_{n=\infty} a_n e^{-\frac{1}{12n}} = a,$$

so hat man für jeden Wert von n

$$a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a < a_n, \quad \text{d. h. } a = a_n e^{-\frac{\theta}{12n}}$$

für einen passenden Wert von θ zwischen 0 und 1. Ersetzt man a_n durch den Ausdruck (17), so erhält man $n! = a n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+\frac{\theta}{12n}}$. Im folgenden werden wir sehen, daß $a = \sqrt{2\pi}$ ist. Schreiben wir also schon jetzt

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n = \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n+\frac{\theta}{12n}}.$$

Dies ist die Formel von Stirling, welche den Wert von $n!$ mit großer Annäherung zu berechnen gestattet, wenn n sehr groß ist.

222. Binomialreihe. So nennt man die Reihe

$$1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \cdots.$$

Es wird nämlich im folgenden bewiesen werden, daß, so oft sie konvergiert (außer für $m = 0$ und $x = -1$), ihre Summe $(1+x)^m$ ist, so daß man im besondern, wenn m eine positive ganze Zahl ist, die bekannte[1]) Entwickelung von $(1+x)^m$ in ein Polynom von $m+1$ Gliedern wiederfindet. Für welche Werte von x und von m konvergiert die Binomialreihe? Um auf diese Frage zu antworten, ist es vorteilhaft, der Reihe die Form zu geben

$$a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \cdots,$$

indem man setzt

$$a_n = \left(1 - \frac{\mu}{1}\right)\left(1 - \frac{\mu}{2}\right)\left(1 - \frac{\mu}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{\mu}{n}\right),$$

wo $\mu = m + 1$ ist. Es sind also, wenn n wächst, die Koeffizienten schließlich alle von demselben Vorzeichen, da

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{n}{n-\mu}, \quad \lim_{n=\infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1$$

ist. Daraus folgt, daß der absolute Betrag des Verhältnisses eines Gliedes zu dem vorhergehenden Gliede als Grenzwert den absoluten Betrag von x hat. Es gilt also (wenn wir für $x < 0$ den § 210, ferner für $x > 0$ den § 190 heranziehen) folgendes: Die Reihe konvergiert für $|x| < 1$ und konvergiert nicht für $|x| > 1$, welches auch der Wert von m sein mag. Mit andern Worten, die Binomialreihe läßt $(-1, 1)$ als Konvergenzintervall zu. Es bleibt uns aber noch übrig, ihren Charakter an den Grenzen dieses Intervalls zu untersuchen. Nun lautet aber für $x = -1$ unsere Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$, und da

$$\lim_{n=\infty} n\left(\frac{n}{n-\mu} - 1\right) = \lim_{n=\infty} \frac{n\mu}{n-\mu} = \mu$$

---

1) Baltzer, Elemente der Mathematik, 2. Teil, § 23.

ist, so konvergiert sie für $m > 0$ (und auch für $m = 0$), divergiert dagegen für $m < 0$. Für $x = 1$ lautet unsere Reihe $a_0 - a_1 + a_2 - \cdots$, und ihre Glieder haben daher schließlich abwechselnde Vorzeichen. Daraus folgt, daß die Reihe nicht konvergiert, wenn man schließlich $a_n \geqq a_{n-1}$ hat. Dies ist der Fall für $m \leqq -1$. Sie konvergiert dagegen für $m > -1$, da unter dieser Voraussetzung nicht nur $a_n < a_{n-1}$ ist für genügend großes n, sondern auch $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$. In der Tat hat man, wenn $\nu > m$ fixiert ist,

$$\frac{a_\nu}{a_n} > \left(1 + \frac{\mu}{\nu+1}\right)\left(1 + \frac{\mu}{\nu+2}\right) \cdots \left(1 + \frac{\mu}{n}\right) > 1 + (H_n - H_\nu)\mu,$$

ferner, wenn man sich an die Divergenz der harmonischen Reihe erinnert, $\lim\limits_{n=\infty}(a_\nu / a_n) = \infty$ und endlich $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$. Es ist also, um zusammenzufassen, das Konvergenzintervall der Binomialreihe $(-1, 1)$; man muß jedoch beide Grenzen ausschließen, wenn m nicht größer als -1 ist, und nur die untere Grenze, wenn m zwar -1 übertrifft, aber negativ ist.

223. Berechnung der numerischen Wurzeln. Man kann die Binomialreihe anwenden zur Aufsuchung von mehr oder weniger einfachen arithmetischen Regeln zur Ausziehung der Wurzeln aus Zahlen. Wir wollen uns z. B. auf die Quadratwurzeln beschränken. Wenn die ganze Zahl N gegeben ist und mit a^2 die größte Quadratzahl bezeichnet wird, welche sie nicht übertrifft, so hat man, nachdem $N = a^2 + x$ gesetzt worden ist,

$$\sqrt{N} = a\left(1 + \frac{x}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} = a + \frac{x}{2a} - \frac{x^2}{8a^3} + \frac{x^3}{16a^5} - \cdots.$$

Die Reihe auf der rechten Seite konvergiert sehr rasch, wenn das Verhältnis $\frac{x}{a^2}$ genügend klein ist. Übrigens ist klar, daß man, weil

$$a^2 \leqq N < (a+1)^2$$

ist, $0 \leqq x < 2a + 1$ hat oder

$$0 < \frac{x}{a^2} < \frac{2a+1}{a^2} < 1,$$

vorausgesetzt, daß N größer ist als 9. Diese letzte Annahme ist immer erlaubt, da es, wenn die Zahl N zu klein wäre, genügen würde sie mit einem vollkommenen Quadrat k^2 zu multiplizieren, die Wurzel aus $k^2 N$ auszuziehen und das Resultat durch k zu dividieren. Da nun die Glieder der Reihe abgesehen vom ersten abwechselnd positiv und negativ sind, so können wir mit einem beliebigen Gliede schließen und sicher sein, daß der begangene Fehler den absoluten Betrag des folgenden Gliedes nicht übertrifft. Man kann auch durch successive Annäherungen vorgehen, indem man als erste Annäherung von $\sqrt{N}$ den Wert a_1 wählt, den man erhält, wenn man sich in der Reihe auf wenige Glieder beschränkt, z. B. auf die drei ersten:

$$a_1 = a + \frac{x}{2a} - \frac{x^2}{8a^3}.$$

Beschränkte man sich auf die beiden ersten Glieder, so würde man das bekannte Verfahren[1]) zur Ausziehung der Quadratwurzeln wiederfinden. Es sei ferner $N = a_1^2 + x_1$, und man berechne

$$a_2 = a_1 + \frac{x_1}{2a_1} - \frac{x_1^2}{8a_1^3}.$$

Ebenso setze man $N = a_2^2 + x_2$, und es sei $a_3 = a_2 + \frac{x_2}{2a_2} - \frac{x_2^2}{8a_2^3}$ u. s. w. Die Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ konvergieren rasch nach dem Werte $\sqrt{N}$. In der Tat ist der relative Fehler, den man macht, wenn man a_1 als Wert von $\sqrt{N}$ annimmt, kleiner als $\frac{x^3}{16a^6} < \frac{\theta^3}{16}$, wenn $\frac{x}{a^2} < \theta$ ist. Andererseits ist

$$x_1 = x - (a_1^2 - a^2) = \frac{x^3}{8a^4} - \frac{x^4}{64a^6}, \quad \frac{x_1}{a_1^2} < \frac{x^3}{8a^6} < \frac{\theta^3}{8},$$

mithin der bei der zweiten Annäherung begangene Fehler kleiner als $\frac{x_1^3}{16a_1^6} < \frac{\theta^9}{2^{13}}$, und ebenso findet man die bei den weiteren Annäherungen begangenen Fehler kleiner als $\frac{\theta^{27}}{2^{40}}, \frac{\theta^{81}}{2^{121}}, \frac{\theta^{243}}{2^{364}}, \ldots$

Einfluß der Anordnung der Glieder auf den Charakter der Reihen.

224. Definitionen. Wir werden von zwei Reihen sagen, daß sie sich nur durch die Anordnung der Glieder unterscheiden, wenn jedes Glied, welches eine gewisse Anzahl von Malen in der einen vorkommt, ebenso viele Male in der andern vorkommt und umgekehrt. Dabei sehen wir von den verschwindenden Gliedern ab. Die Anordnung der Glieder einer Reihe abändern heißt eine andre Reihe konstruieren, die sich von der ersten nur durch die Anordnung der Glieder unterscheidet. In diesen Definitionen ist die Voraussetzung enthalten, daß ein und dasselbe Glied in jeder Reihe nur eine endliche Anzahl von Malen auftritt. Damit ferner eine Umordnung der Glieder wohl definiert sei, ist es nötig in eindeutiger Weise die Stelle n' angeben zu können, an welche das Glied von der Stelle n hinkommen soll. Auf diese Weise entspricht jedem endlichen Werte von n ein endlicher Wert von n'; denn sagt man, daß u_n ins Unendliche rücken soll, so ist das keine Bestimmung der Stelle, welche u_n nach der Umordnung einnehmen soll.

225. Es entsteht nun von selbst die Frage: Ist es erlaubt die Anordnung der Glieder einer Reihe zu ändern? Wir werden sehen, daß dies nicht immer erlaubt ist, weil eine Umordnung

---

1) Baltzer, Elemente der Mathematik, 2. Teil, § 15.

der Glieder nicht nur den Wert der Summe der Reihe beeinflussen kann, falls diese konvergent ist, sondern auch den Charakter der Reihe selbst. Inzwischen werden wir sagen, daß eine Reihe absolut konvergent oder absolut divergent ist, wenn sie ihren Charakter bewahrt, welches auch die Anordnung der Glieder sein mag. Wir werden beweisen, daß bei solchen Reihen nicht blos der Charakter unveränderlich ist, sondern auch der Wert der Summe. Einfach konvergent oder einfach divergent werden wir jede konvergente oder divergente Reihe nennen, welche es nicht absolut ist.

226. Wir wollen uns auf das Studium derjenigen Reihen beschränken, bei welchen man $\lim\limits_{n=\infty} u_n = 0$ hat, da auf solche Reihen immer die Abänderung der Anordnung der Glieder anwendbar ist, wie wir sie in § 224 definiert haben. Vor allen Dingen kann bei einer jeden von diesen Reihen ein Glied $a \gtrless 0$ nicht unendlich oft vorkommen; denn wenn ε zwischen 0 und $|a|$ gewählt wird, so gibt es eine Zahl ν derart, daß für $n > \nu$ immer $|u_n| < \varepsilon$ ist, so daß die Glieder, welche gleich a sind, notwendig unter den ν ersten enthalten sind und daher ihre Anzahl ν nicht übertrifft. Überdies bleibt der Umstand, daß das allgemeine Glied den Grenzwert Null hat, bei jeder Umordnung erhalten. In der Tat sei ν' die Stelle, die nach der Umordnung dasjenige von den Gliedern u_1, $u_2, \ldots, u_\nu$ einnimmt, welches in der neuen Reihe rechts von allen andern zu stehen kommt. Unter den ersten ν' Gliedern dieser Reihe sind also alle Glieder zu suchen, deren absoluter Betrag nicht kleiner ist als ε. Wenn ε gegeben ist, so gibt es also eine Zahl ν' derart, daß für $n > \nu'$ immer $|u_n| < \varepsilon$ ist. Also ist auch nach der Umordnung $\lim u_n = 0$.

227. Theorem I. Eine Reihe mit positiven Gliedern kann nur absolut konvergent oder absolut divergent sein.

Wenn die Reihe divergent ist, so werde in ihr eine Umordnung der Glieder vorgenommen, und es sei $u_1' + u_2' + u_3' + \cdots$ die Reihe, welche man erhält. Wenn man in dieser n' Glieder nimmt, unter denen sich alle Glieder von S_n befinden, so hat man $S'_{n'} \geqq S_n$, und da nach der Voraussetzung S_n jede Grenze überschreitet, wenn n ins Unendliche wächst, so gilt dasselbe von $S'_{n'}$, da n' $(\geqq n)$ mit n unbegrenzt zunimmt. Die Reihe bleibt also divergent trotz der eingetretenen Umordnung. Wenn ferner die Reihe konvergent ist, so nehme man in ihr die n ersten Glieder, und es sei n groß genug, damit unter ihnen die n' Glieder von $S'_{n'}$ enthalten sind. Dann ist $S'_{n'} \leqq S_n$, und da nach der Voraussetzung S_n nach einem Grenzwert S konvergiert, wenn n' und daher n ins Unendliche wächst, so kann man das Gleiche von $S'_{n'}$ sagen, welches mit n' zunimmt. Die Reihe bleibt also konvergent.

228. In dem letztbehandelten Falle hat man überdies $S' < S$. Wenn dagegen in der zweiten Reihe n' Glieder genommen werden, die unter sich die n Glieder von S_n enthalten, so ist $S'_{n'} \geq S_n$. Mithin ist, da wir bereits die Existenz von S' bewiesen haben, gleichzeitig $S' \geqq S$. Also ist $S' = S$. Wir sehen auf diese Weise, daß eine Umordnung der Glieder in einer konvergenten Reihe mit positiven Gliedern nicht nur die Konvergenz der Reihe nicht aufhebt, sondern auch die Summe ungeändert läßt.

229. Theorem II. Es sei eine Reihe gegeben, deren Glieder nach dem Grenzwert Null konvergieren, und

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots, \quad b_1 + b_2 + b_3 + \cdots$$

seien bezüglich die Reihen, welche aus den positiven Gliedern und aus den absoluten Beträgen der negativen Glieder bestehen, und zwar in der Anordnung, in der man sie vorfindet. Wenn die Reihen (a) und (b) konvergent sind, so ist die gegebene Reihe absolut konvergent. Wenn nur eine von diesen Reihen konvergent ist, so ist die gegebene Reihe absolut divergent. Wenn die beiden Reihen divergent sind, so hängt der Charakter der gegebenen Reihe von der Anordnung ihrer Glieder ab, weil man durch geeignete Umordnungen bewirken kann, daß die Reihe konvergent, divergent oder unbestimmt wird; und wenn sie konvergent ist, so kann man erreichen, daß ihre Summe jeden beliebigen Wert annimmt[1]).

a) Wenn man die n ersten Glieder der Reihe betrachtet und annimmt, daß α von ihnen positiv und β negativ seien, so wird, wenn man mit A_n und B_n die Summen der n ersten Glieder der Reihen (a) und (b) bezeichnet,

$$S_n = A_\alpha - B_\beta \tag{18}$$

sein. Man bemerke, daß die Zahlen α und β gleichzeitig mit n unbegrenzt wachsen. Sonst würden nämlich in der Reihe schließlich alle Glieder dasselbe Vorzeichen haben. Wenn nun die beiden Reihen konvergent sind, so konvergiert S_n nach dem Grenzwert $S = A - B$, mithin ist die betrachtete Reihe konvergent. Sie konvergiert ferner absolut, da wir in § 227 gesehen haben, daß man sowohl in (a) als auch in (b) die Glieder beliebig umordnen kann, ohne daß diese Reihen aufhören zu konvergieren, ohne daß mithin die gegebene Reihe zu konvergieren aufhört.

b) Wenn die eine Reihe konvergent und die andere Reihe

---

1) Das Theorem wurde von Riemann im Jahre 1834 angegeben. Siehe „B. Riemanns ges. math. Werke" (p. 221).

divergent ist, so wächst S_n dem absoluten Betrage nach über alle Grenzen. Die betrachtete Reihe ist also divergent, und zwar absolut, nach dem in § 227 Gesagten.

c) Es seien nunmehr die Reihen (a) und (b) divergent. Die Gleichung (18) sagt uns nichts mehr, da A_α und B_β über alle Grenzen wachsen, ohne daß es erlaubt ist, irgend etwas über die Art und Weise, wie ihre Differenz variiert, zu behaupten. Man muß also andere Betrachtungen zu Hilfe nehmen. Zunächst wollen wir zeigen, daß man die Glieder der gegebenen Reihe in der Weise anordnen kann, daß dieselbe konvergent ist und eine a priori angegebene Summe σ hat. Man nehme so viele Glieder der Reihe (a), als gerade nötig sind um eine Summe zu bilden, die größer als σ ist, so daß $a_1 + a_2 + \cdots + a_\mu > \sigma$, dagegen $a_1 + a_2 + \cdots + a_{\mu-1} \leqq \sigma$ oder

$$S_\mu > \sigma, \quad S_{\mu-1} \leqq \sigma$$

ist. Dies ist immer möglich, da die Reihe (a) als divergent vorausgesetzt wird. Ebenso gestattet es die Divergenz der Reihe (b), von S_μ so viele Glieder der genannten Reihe abzuziehen, als gerade nötig sind, um eine Summe zu erhalten, die nicht größer ist als σ, so daß

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_\mu - b_1 - b_2 - \cdots - b_\nu \leqq \sigma,$$
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_\mu - b_1 - b_2 - \cdots - b_{\nu-1} > \sigma$$

oder

$$S_{\mu+\nu} \leqq \sigma, \quad S_{\mu+\nu-1} > \sigma$$

ist. In analoger Weise addiere man μ' neue Glieder von (a) und subtrahiere darauf ν' Glieder von (b) und setze diese Konstruktion von Summen fort, welche die kleinstmöglichen Oszillationen um σ ausführen. Die bisherigen Ungleichungen und die weiteren

$$\begin{array}{ll}
S_{\mu+\nu+\mu'} > \sigma, & S_{\mu+\nu+\mu'-1} \leqq \sigma, \\
S_{\mu+\nu+\mu'+\nu'} \leqq \sigma, & S_{\mu+\nu+\mu'+\nu'-1} > \sigma, \\
S_{\mu+\nu+\mu'+\nu'+\mu''} > \sigma, & S_{\mu+\nu+\mu'+\nu'+\mu''-1} \leqq \sigma, \\
\cdots & \cdots
\end{array}$$

kann man folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned}
&0 < S_\mu - \sigma \leqq a_\mu, \\
&0 \leqq \sigma - S_{\mu+\nu} < b_\nu, \\
&0 < S_{\mu+\nu+\mu'} - \sigma \leqq a_{\mu+\mu'}, \\
&0 \leqq \sigma - S_{\mu+\nu+\mu'+\nu'} < b_{\nu+\nu'}, \\
&\cdots
\end{aligned}$$

Sie zeigen, daß, wenn man n die Werte

(19) $\mu,\ \mu+\nu,\ \mu+\nu+\mu',\ \mu+\nu+\mu'+\nu',\ \mu+\nu+\mu'+\nu'+\mu'', \ldots$

erteilt, die Differenzen zwischen S_n und σ dem absoluten Betrage nach die Glieder der Reihe

$$a_\mu, \quad b_\nu, \quad a_{\mu+\mu'}, \quad b_{\nu+\nu'}, \quad a_{\mu+\mu'+\mu''}, \quad b_{\nu+\nu'+\nu''}, \quad \ldots$$

nicht übertreffen, welche nach der Voraussetzung den Grenzwert Null haben. Man hat also

$$\lim S_n = \sigma, \tag{20}$$

wenn n die Folge (19) durchläuft. Wenn nun n nicht dieser Folge angehört, so ist es zwischen zwei aufeinanderfolgenden Gliedern derselben, i und j, enthalten, und man hat

$$S_i < S_n < S_j \quad \text{oder} \quad S_i > S_n > S_j,$$

je nachdem i eine gerade Stelle oder eine ungerade Stelle in der Folge (19) einnimmt. S_n ist also immer zwischen zwei Zahlen enthalten, die den Grenzwert σ haben, und die Gleichung (20) besteht also ohne Einschränkungen. Um ferner zu beweisen, daß die Reihe divergent oder unbestimmt werden kann, genügt es die obigen Überlegungen zu wiederholen, indem man σ durch eine mit n veränderliche Größe ersetzt, die mit wachsendem n unendlich zunimmt oder keinen bestimmten Grenzwert hat.

230. Theorem III. Für die absolute Konvergenz einer Reihe ist es notwendig und hinreichend, daß die aus den absoluten Beträgen der Glieder gebildete Reihe konvergiert[1]).

Die Summe der n ersten Glieder der Reihe der absoluten Beträge ist $A_\alpha + B_\beta$. Diese Reihe ist also divergent, wenn wenigstens eine der Reihen (a) und (b) divergent ist, und sie ist konvergent nur im Falle der gleichzeitigen Konvergenz dieser Reihen. Auf Grund des vorigen Theorems wird diese gleichzeitige Konvergenz immer und nur im Falle der absoluten Konvergenz der vorgelegten Reihe stattfinden.

231. Theorem IV. Die Summe einer absolut konvergenten Reihe bleibt bei jeder beliebigen Umordnung der Glieder ungeändert.

Wir haben gesehen, daß im Falle der absoluten Konvergenz die Reihen (a) und (b) konvergent sind. Die Summe der n ersten Glieder $A_\alpha - B_\beta$ wird nach einer Umordnung der Glieder $A'_{\alpha'} - B'_{\beta'}$. Aber die konvergente Reihe (a) hat positive Glieder, und wir haben bereits bewiesen (§ 228), daß die Summe einer solchen Reihe unabhängig von der Anordnung der Glieder ist, so daß mit dem Zunehmen von α oder von α' sich A_α und $A'_{\alpha'}$ einem und demselben Grenzwerte

1) Dieses wichtige Theorem verdankt man Lejeune-Dirichlet (Crelles Journal, 1829).

nähern. Ähnliches gilt von B_β und $B'_{\beta'}$, welche sich dem Grenzwert B nähern. Also ist die Summe der vorgelegten Reihe immer $S = A - B$.

232. Theorem V. Wenn die Glieder einer einfach konvergenten Reihe dem absoluten Betrage nach abnehmend aufeinander folgen, so kann das Verhältnis zwischen der Anzahl der positiven Glieder und derjenigen der negativen Glieder, die unter den n ersten enthalten sind, für unendliches n nicht einen von der Einheit verschiedenen Grenzwert haben[1]).

Nimmt man $a_n = 1$ oder $a_n = -1$, je nachdem das allgemeine Glied, dessen absoluten Betrag wir mit u_n bezeichnen, positiv oder negativ ist, so kann man der vorgelegten Reihe die Form

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + \cdots$$

geben. Auf Grund des Theorems von Dirichlet ist die Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ divergent. Überdies konvergieren ihre Glieder abnehmend nach Null, mithin hat man (§ 145)

$$\lim \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \lim \frac{a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n}{u_1 + u_2 + \cdots + u_n} = 0,$$

vorausgesetzt, daß der erste Grenzwert existiert. Beachtet man nun, daß $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ gleich dem Überschuß der Anzahl der positiven Glieder über diejenige der negativen Glieder ist, so sieht man, daß der Grenzwert des Verhältnisses dieser beiden Zahlen

$$\lim \frac{n + (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)}{n - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)} = \lim \frac{1 + \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)}{1 - \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)} = 1$$

ist, d. h. die positiven Glieder sind ebenso häufig wie die negativen.

233. Übungen. a) Die Reihe $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots$ kann höchstens einfach konvergieren, da die aus den absoluten Beträgen der Glieder gebildete Reihe divergiert. Bemerkt man indessen, daß diese absoluten Beträge abnehmend aufeinander folgen, und daß die positiven Glieder häufiger sind als die negativen, so genügt dies auf Grund des letzten Theorems um zu behaupten, daß die vorgelegte Reihe nicht konvergent ist. Und in der Tat erkennt man mit Hilfe der Formel (1), daß die Summe der n ersten Glieder ins Unendliche wächst wie $\frac{1}{3}\log n$.

b) Die Reihe $1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \cdots$ ist offenbar unbestimmt für

---

1) Siehe im „Bulletin des Sciences math. et astr." (1888) einen geistreichen Beweis dieses Theorems, den wir G. Bagnera verdanken.

$p \leqq 0$, da ihre Glieder abwechselnde Vorzeichen haben und nicht nach Null konvergieren. Sie ist dagegen konvergent für $p > 0$, da in diesem Falle die absoluten Beträge der Glieder beständig abnehmend nach Null konvergieren. Andrerseits wissen wir (§ 212, a), daß, wenn man alle Glieder positiv nimmt, die so erhaltene Reihe nur für $p > 1$ konvergiert. Also ist die betrachtete Reihe

absolut konvergent für $p > 1$,
einfach konvergent „ $0 < p \leqq 1$,
unbestimmt „ $p \leqq 0$.

c) Im besondern konvergiert einfach die Reihe

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots,$$

mithin muß man nach dem Theorem von Riemann die Anordnung der Glieder derart ändern können, daß die Summe der Reihe einen beliebig gegebenen Wert σ annimmt. Wir wollen zeigen, daß man hierzu gelangt, indem man die Glieder derart umordnet, daß die Wahrscheinlichkeit, in der neuen Reihe ein positives Glied zu finden

$$\varpi = \frac{e^{2\sigma}}{e^{2\sigma} + 4} \tag{21}$$

ist, vorausgesetzt, daß man die Reihenfolge der Glieder gleichen Zeichens ungeändert läßt. In der Tat, wenn unter den n ersten Gliedern der neuen Reihe α positive und β negative sind, und wenn man für unendliches n

$$\lim \frac{\alpha}{n} = \varpi \text{ und folglich } \lim \frac{\beta}{n} = 1 - \varpi$$

hat, so kann man schreiben

$$S_n = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2\alpha - 1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2\beta}\right),$$

ferner unter Zuhilfenahme unserer Formel (1)

$$S_n = H_{2\alpha} - \tfrac{1}{2} H_\alpha - \tfrac{1}{2} H_\beta = \log 2\alpha - \tfrac{1}{2}\log \alpha\beta + \varrho_{2\alpha} - \tfrac{1}{2}(\varrho_\alpha + \varrho_\beta)$$

und endlich für unendliches n

$$S = \frac{1}{2} \lim \log \frac{4\alpha}{\beta} = \log\left(2\sqrt{\frac{\varpi}{1 - \varpi}}\right).$$

Setzt man den letzten Ausdruck gleich σ und berechnet daraus ϖ, so findet man gerade die Formel (21). Wenn man z. B. haben will, daß die Summe der Reihe ungeändert bleibt, so muß $\sigma = \log 2$ sein, folglich $\varpi = \frac{1}{2}$. Es ist also notwendig, daß die positiven Glieder ebenso häufig bleiben wie die negativen. Z. B. ist

$$1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} + \cdots = \log 2.$$

Ebenso ist es, wenn die Summe null sein soll, erforderlich in (21) $\sigma = 0$ zu setzen, woraus sich ergibt $\varpi = \frac{1}{5}$. Z. B. ist

$$1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{14} - \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{5} - \cdots = 0.$$

d) Es werde wieder die Binomialreihe betrachtet, um zu ermitteln, in welchen Fällen ihre Konvergenz absolut ist. Wir haben gesehen (§ 222), daß, wenn x negativ ist, die Glieder schließlich alle dasselbe Vorzeichen haben und daher (§ 227) die Reihe in dem Intervalle $(-1, 0)$, die obere Grenze nicht ausgeschlossen, absolut konvergiert, was auch m sein mag. Daraus folgt auf Grund des Theorems von Dirichlet, daß die Konvergenz auch in dem Intervalle $(0, 1)$ mit Ausschluß der oberen Grenze absolut ist. Die einfache Konvergenz kann man also nur für $x = 1$ haben, und man hat sie für diejenigen Werte von m, für welche die Reihe nicht konvergiert, wenn $x = -1$ ist. Wenn wir uns also erinnern, daß die Reihe, wenn $x = -1$ ist, nur für $m \geqq 0$ konvergiert, während sie im Falle $x = 1$ für $m > -1$ konvergiert, so gelangen wir zu dem Schluß, daß die Binomialreihe einfach konvergiert nur für $x = 1$ und für Werte von m zwischen -1 und 0, diese selbst ausgeschlossen.

e) Setzt man z. B. in der Binomialreihe $x = 1$, so erhält man die Formel

$$2^m = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots,$$

welche nur für $m > -1$ gilt. Es ist aber wichtig zu wissen, daß es, wenn m negativ ist, nicht erlaubt ist, die Anordnung der Glieder zu ändern. Wenn man dagegen $m = \frac{1}{2}$ setzt, während man x beliebig läßt, so erhält man die Formel

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \cdots,$$

die unabhängig von der Anordnung der Glieder gültig ist für jeden Wert von x, dessen absoluter Betrag nicht größer ist als 1. Für $m = -\frac{1}{2}$ findet man eine andre wichtige Formel

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 - \cdots,$$

die für jeden Wert von x gültig ist, dessen absoluter Betrag kleiner ist als 1. Sie besteht auch für $x = 1$, aber in diesem Falle ist es nicht erlaubt die Anordnung der Glieder auf der rechten Seite zu ändern.

Operationen mit Reihen.

234. Definitionen. Sind zwei Reihen durch die allgemeinen Glieder u_n und v_n gegeben, so heißt sie addieren die Reihe bilden, welche als allgemeines Glied

$$w_n = u_n + v_n$$

hat, sie multiplizieren heißt die Reihe bilden, die als allgemeines Glied

$$w_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + u_3 v_{n-2} + \cdots + u_n v_1$$

hat. Die erste Reihe heißt die Summe und die zweite das Produkt der betrachteten Reihen.

235. Theorem I. Die Addition von zwei konvergenten Reihen gibt Anlaß zu einer konvergenten Reihe, deren Summe man durch Addition der Summen der gegebenen Reihen findet.

Wenn U_n und V_n die Summen der n ersten Glieder der gegebenen Reihen sind, so ist die analoge Summe für die Summenreihe

$$\begin{aligned} W_n &= w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_n \\ &= (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) + (v_1 + v_2 + \cdots + v_n) = U_n + V_n. \end{aligned}$$

Also konvergiert W_n für unendliches n nach dem Grenzwert $W = U + V$. Man bemerke, daß das Theorem für jede beliebige endliche Anzahl von Reihen gilt. Dagegen werden wir weiter unten sehen, daß es durchaus nicht immer besteht, wenn man es mit unendlich vielen Reihen zu tun hat.

236. Theorem II. (Theorem von Abel.) Wenn die Multiplikation von zwei konvergenten Reihen eine konvergente Reihe hervorbringt, so hat diese als Summe das Produkt der Summen der gegebenen Reihen.

Durch Addition der n ersten Glieder der Produktreihe

$$w_1 = u_1 v_1, \quad w_2 = u_1 v_2 + u_2 v_1, \quad w_3 = u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1, \quad \ldots$$

erhält man

$$W_n = u_1 V_n + u_2 V_{n-1} + u_3 V_{n-2} + \cdots + u_n V_1, \tag{22}$$

ferner durch erneute Summation und Division durch n

$$\frac{1}{n}(W_1 + W_2 + \cdots + W_n) = \frac{1}{n}(U_1 V_n + U_2 V_{n-1} + \cdots + U_n V_1). \tag{23}$$

Da die drei Reihen als konvergent vorausgesetzt werden, so existieren die Grenzwerte U, V, W von U_n, V_n, W_n für unendliches n. Folglich existieren (§§ 142, a; 144) die Grenzwerte der beiden Seiten von (23) und sind W und UV. Also ist $W = UV$.

237. Bemerkungen. a) Die Multiplikation von zwei konvergenten Reihen kann eine unbestimmte Reihe hervorbringen. Sie bringt niemals eine divergente Reihe hervor, da sonst die linke Seite von (23) wie W_n über alle Grenzen wachsen würde anstatt sich dem Grenzwert UV zu nähern. Um ferner zu zeigen, daß die Produktreihe tatsächlich unbestimmt sein kann, multipliziere man miteinander die Reihen

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots, \quad \frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log 3} + \frac{1}{\log 4} - \frac{1}{\log 5} + \cdots, \tag{24}$$

welche beide konvergent sind (§ 195). Das allgemeine Glied des Produktes konvergiert nicht nach Null, da sein absoluter Betrag

$$\frac{1}{\log(n+1)} + \frac{1}{2\log n} + \frac{1}{3\log(n-1)} + \cdots + \frac{1}{n\log 2} > \frac{H_n}{\log(n+1)}$$

schließlich größer ist als jede Zahl, die kleiner ist als 1. Also konvergiert die Produktreihe nicht. Man bemerke jedoch, daß die Reihen (24) beide einfach konvergent sind. Das Theorem des folgenden Paragraphen wird zeigen, daß es nur in diesem Falle vorkommen kann, daß die Produktreihe nicht konvergent ist.

b) Im besondern kann der Fall eintreten, daß, wenn man eine einfach konvergente Reihe ins Quadrat erhebt, die dadurch erhaltene Reihe nicht konvergent ist. Bildet man z. B. das Quadrat von

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \cdots,$$

so findet man eine Reihe, deren allgemeines Glied absolut genommen gleich

$$\frac{1}{\sqrt{1\cdot n}} + \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}} + \frac{1}{\sqrt{3(n-2)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n\cdot 1}}$$

ist und nicht den Grenzwert Null haben kann. In der Tat ist

$$\sqrt{\nu(n-\nu+1)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(n+1)^2-(n+1-2\nu)^2} \leqq \tfrac{1}{2}(n+1),$$

und die obige Summe besteht also aus n Brüchen, die nicht kleiner sind als $\frac{2}{n+1}$; mithin ist sie schließlich größer als jede Zahl, die kleiner als 2 ist.

c) Es kann aber auch vorkommen, daß das Quadrat einer einfach konvergenten Reihe konvergent ist. Quadriert man z. B. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$, so erhält man eine Reihe, deren Glieder abwechselnd positiv und negativ sind. Der absolute Betrag des allgemeinen Gliedes ist

$$\frac{1}{1\cdot n} + \frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{3(n-2)} + \cdots + \frac{1}{n\cdot 1} = \frac{2H_n}{n+1}$$

und konvergiert beständig abnehmend nach Null, da

$$\frac{2}{n}H_{n-1} - \frac{2}{n+1}H_n = \frac{2}{n}\left(\frac{H_n}{n+1} - \frac{1}{n}\right) > 0.$$

Erinnert man sich also, daß die Summe der betrachteten Reihe $\log 2$ ist, so kann man auf Grund des Abelschen Theorems schreiben

$$\tfrac{1}{2}H_1 - \tfrac{1}{3}H_2 + \tfrac{1}{4}H_3 - \tfrac{1}{5}H_4 + \cdots = \tfrac{1}{2}(\log 2)^2.$$

238. **Theorem III.** Die Multiplikation von zwei konver-

genten Reihen, von denen wenigstens eine absolut konvergent ist, bringt eine konvergente Reihe hervor[1]).

Der Relation (22) kann man die Form geben

$$W_n = u_1(V-\varrho_n) + u_2(V-\varrho_{n-1}) + \cdots + u_n(V-\varrho_1) = U_n V - \sigma_n,$$

wenn man mit ϱ_n den Rest in der Reihe der v bezeichnet und

$$\sigma_n = u_1\varrho_n + u_2\varrho_{n-1} + u_3\varrho_{n-2} + \cdots + u_n\varrho_1$$

setzt. Wenn bewiesen wäre, daß σ_n mit unendlich zunehmendem n nach Null konvergiert, so könnte man sofort schreiben

$$W = \lim W_n = V \lim U_n = UV.$$

Alles reduziert sich also darauf, zu beweisen, daß σ_n den Grenzwert Null hat. Man zerlege n in zwei Teile ν und $n-\nu$, deren jeder mit n unbegrenzt zunimmt. Es seien ϱ und ϱ' bezüglich die größten unter den absoluten Beträgen von

$$\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots, \varrho_{n-\nu} \text{ und } \varrho_{n-\nu+1}, \varrho_{n-\nu+2}, \ldots, \varrho_n.$$

Da die Reihe der v konvergiert, so bleibt die Zahl ϱ endlich, wenn n ins Unendliche wächst. Überdies hat ϱ' den Grenzwert Null, da $n-\nu$ gleichzeitig mit n unbegrenzt zunimmt und dabei jeder der Reste $\varrho_{n-\nu+1}, \varrho_{n-\nu+2}, \ldots$ nach Null konvergiert. Dies vorausgeschickt kann man schreiben

$$\sigma_n = (u_1\varrho_n + u_2\varrho_{n-1} + \cdots + u_\nu\varrho_{n-\nu+1}) + (u_{\nu+1}\varrho_{n-\nu} + \cdots + u_n\varrho_1),$$

und erkennt sofort, daß der absolute Betrag von σ_n nicht größer ist als

$$\begin{aligned} &\varrho'(u_1' + u_2' + \cdots + u_\nu') + \varrho(u'_{\nu+1} + u'_{\nu+2} + \cdots + u_n') \\ &\qquad = \varrho' U_\nu' + \varrho(U_n' - U_\nu'), \end{aligned}$$

wenn $u_1', u_2', \ldots$ die absoluten Beträge von $u_1, u_2, \ldots$ sind. Da die Reihe der u absolut konvergent ist, so ist auch die Reihe der u' konvergent. Daraus folgt, daß mit unendlich zunehmendem n die Größe U_ν' nach einem endlichen Grenzwert konvergiert, mithin $\varrho' U_\nu'$ nach Null. Ebenso konvergiert $U_n' - U_\nu'$ nach Null, mithin auch das Produkt dieser Größe mit ϱ. Folglich ist $\lim \sigma_n = 0$.

239. Theorem IV. Die Reihen, welche man durch Addition oder durch Multiplikation von zwei absolut konvergenten Reihen erhält, sind absolut konvergent.

---

1) Dieses Theorem wurde zuerst von Cauchy in seinem „Cours d'Analyse" (p. 147) ausgesprochen und bewiesen, und zwar für zwei absolut konvergente Reihen. Dann hat Mertens in Crelles Journal (Bd. 79, p. 182) gezeigt, daß der Satz bestehen bleibt, wenn eine der Reihen einfach konvergiert. Den hier entwickelten Beweis verdankt man Jensen (Nouv. Corr. math., 1879, p. 430).

Wenn die Reihen

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots, \quad v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$$

absolut konvergent sind, so konvergieren auch auf Grund des Dirichletschen Theorems die Reihen

$$u_1' + u_2' + u_3' + \cdots, \quad v_1' + v_2' + v_3' + \cdots,$$

welche aus den absoluten Beträgen der Glieder gebildet sind. Mithin sind auf Grund der Theoreme I und III die Reihen konvergent, welche durch die allgemeinen Glieder

$$u_n' + v_n' \quad \text{und} \quad u_1'v_n' + u_2'v_{n-1}' + \cdots + u_n'v_1'$$

definiert sind. Bezeichnet man nun mit w_n' den absoluten Betrag von w_n, dem allgemeinen Gliede der Summen- oder Produktreihe, so ist klar, daß man im Falle der Addition $w_n' \leq u_n' + v_n'$ und im Falle der Multiplikation $w_n' \leq u_1'v_n' + u_2'v_{n-1}' + \cdots + u_n'v_1'$ hat. Also ist in beiden Fällen die Reihe der w' konvergent, da ihre Glieder positiv und nicht größer sind als die entsprechenden Glieder einer konvergenten Reihe. Also konvergiert die Reihe der w absolut.

Doppelreihen.

240. Definitionen. Die Addition von unendlich vielen Reihen führt zur Betrachtung der Doppelreihen:

$$\begin{array}{r} a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + \cdots \\ + a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} + \cdots \\ + a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{34} + \cdots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \end{array} \tag{25}$$

S_{mn} sei die Summe aller Glieder, die in dem Rechteck enthalten sind, welches aus den m ersten Horizontal- und den n ersten Vertikalreihen gebildet ist, d. h. es sei

$$\begin{aligned} S_{mn} = \quad & a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{1n} \\ + & a_{21} + a_{22} + a_{23} + \cdots + a_{2n} \\ + & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ + & a_{m1} + a_{m2} + a_{m3} + \cdots + a_{mn}. \end{aligned}$$

Die Reihe heißt konvergent, wenn S_{mn} bei unendlich zunehmendem m und n nach einem Grenzwert S konvergiert, der von der Art und Weise, wie m und n variieren, unabhängig ist. Wenn dagegen S_{mn} über alle Grenzen wächst, so ist die Reihe divergent. Sie ist unbestimmt in jedem andern Falle.

241. Eine Doppelreihe kann man horizontal summieren, d. h. man kann die Summen $u_1, u_2, u_3, \ldots$ der Horizontalreihen in (25) nehmen, um damit die Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ zu bilden. Die Doppelreihe vertikal summieren bedeutet dagegen die Summen v_1, $v_2, v_3, \ldots$ der Vertikalreihen nehmen, welche in dem Schema (25) dastehen, um dann die Reihe $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$ zu bilden. Wenn die Doppelreihe konvergent oder divergent ist, so sind die beiden so erhaltenen Reihen konvergent bezw. divergent, und im ersten Falle koinzidieren die Summen U und V der beiden einfachen Reihen mit dem einen Werte S, der Summe der Doppelreihe. Man bemerke, daß die horizontale Summierung einer Doppelreihe darin besteht, in S_{mn} zuerst n ins Unendliche wachsen zu lassen, während man m festhält, um darauf in dem erhaltenen Grenzwerte m unbegrenzt wachsen zu lassen. Die vertikale Summierung dagegen besteht darin, zuerst m und dann n unendlich wachsen zu lassen. Es stellt sich mit andern Worten bei den beiden Additionsweisen die Summe S folgendermaßen dar:

$$S = \lim_{m=\infty} \left(\lim_{n=\infty} S_{mn} \right), \quad S = \lim_{n=\infty} \left(\lim_{m=\infty} S_{mn} \right).$$

Damit man die Reihe als konvergent bezeichnen könne, ist es nötig, daß jede andere Additionsweise dieselbe Summe liefert. Man wird z. B. haben müssen $S = \lim\limits_{n=\infty} S_{nn}$.

242. Die Regel für die Addition der Reihen würde dazu führen, die Summen U und V, wenn sie existieren, einander gleich zu setzen. Es ist aber leicht zu sehen, daß die Addition nach Vertikalreihen zu einem andern Resultat führen kann, als man es bei der horizontalen Summation findet. Es ist außerdem klar, daß die Gleichheit zwischen den beiden Resultaten nicht genügen würde, um die Konvergenz der Doppelreihe zu behaupten, da es vorkommen kann, daß andere Arten m und n unendlich werden zu lassen andere Werte der Summe liefern oder sogar zu divergenten oder unbestimmten Reihen führen. Um Beispiele von Doppelreihen zu haben, welche die verschiedenen angegebenen Besonderheiten darbieten, genügt es, passende Formen von S_{mn} zu wählen, da einer jeden in der Tat die durch das allgemeine Glied

$$a_{mn} = S_{mn} - (S_{m,n-1} + S_{m-1,n}) + S_{m-1,n-1}$$

definierte Doppelreihe entspricht, wobei diejenigen S, bei welchen ein Index gleich Null ist, als verschwindend zu betrachten sind.

243. So genügt es, um Beispiele von unbestimmten Reihen zu haben, S_{mn} die Werte

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^n, \quad \frac{m}{m+n}, \quad \frac{mn}{(m+n)^2}, \quad \frac{mn(m-n)}{(m+n)^3}, \quad \ldots$$

zu erteilen. Die erste Reihe, horizontal summiert, ist ersichtlich divergent, während sie sich bei der Addition nach Vertikalreihen als konvergent darbietet mit einer Summe gleich der Einheit. Dagegen ist für $m = n$ $S = e$ und durch andere geeignete Arten, m und n gleichzeitig ins Unendliche wachsen zu lassen, kann man für S alle Werte erhalten, die größer als 1 sind. Unter denselben Umständen stellt sich die zweite Reihe als konvergent heraus, und ihre Summe nimmt die Werte 0, 1, $\frac{1}{2}$ an oder jeden beliebigen andern Wert, der zwischen 0 und 1 enthalten ist. Die dritte Reihe gibt, horizontal oder vertikal summiert, $S = 0$, während man für $m = n$ findet $S = \frac{1}{4}$. Endlich ist die vierte Reihe, welche bei allen drei Additionsweisen Null gibt, dennoch unbestimmt, da man durch andere passende Weisen erreichen kann, daß S_{mn} nach jedem beliebigen Grenzwert konvergiert, dessen Quadrat nicht größer als $\frac{1}{108}$ ist. Folgendes ist übrigens ein ganz einfaches Beispiel einer unbestimmten Doppelreihe:

$$\begin{array}{l} 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + \cdots \\ -1 + 0 + 1 + 0 + 0 + \cdots \\ +0 - 1 + 0 + 1 + 0 + \cdots \\ +0 + 0 - 1 + 0 + 1 + \cdots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

Bei horizontaler Summation erhält man 1, bei vertikaler -1. Allgemein ist S_{mn} gleich 1, 0, -1, je nachdem m kleiner als n, gleich n oder größer als n ist. Um dagegen unendlich viele Beispiele von konvergenten Doppelreihen zu haben oder vielmehr eine Doppelreihe zu konstruieren, die mit einer gegebenen konvergenten einfachen Reihe $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ äquivalent ist, betrachte man

$$\begin{array}{l} (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \cdots \\ +(a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + (a_4 - a_5) + \cdots \\ +(a_3 - a_4) + (a_4 - a_5) + (a_5 - a_6) + \cdots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

Wenn A_n die Summe der n ersten Glieder der einfachen Reihe ist, so hat man

$$S_{mn} = A_m + A_n - A_{m+n}, \quad \lim S_{mn} = A.$$

244. Transformation von Clausen[1]). Es sei eine konvergente Doppelreihe gegeben. Man setze

$$w_n = a_{nn} + (a_{n,n+1} + a_{n+1,n}) + (a_{n,n+2} + a_{n+2,n}) + \cdots$$

und bemerke, daß

$$u_n + v_n = (a_{1n} + a_{n1}) + (a_{2n} + a_{n2}) + \cdots + (a_{n-1,n} + a_{n,n-1}) + a_{nn} + w_n$$

ist, mithin $U_n + V_n = S_{nn} + W_n$. Da nun für unendliches n

$$\lim U_n = \lim V_n = \lim S_{nn} = S$$

---

1) Crelles Journal, III, p. 94.

ist, so hat man auch $\lim W_n = S$. Die Transformation der Doppelreihe in die einfache Reihe $w_1 + w_2 + w_3 + \cdots$ ist oft vorteilhafter als die Transformation in eine der Reihen $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ oder $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$. Dies ist aber nicht immer der Fall. Z. B. hat es gar keinen Vorteil, diese Transformation bei der letzten Reihe des vorigen Paragraphen auszuführen.

245. Theorem. Eine Doppelreihe ist konvergent, wenn bei Ersetzung aller Glieder durch ihre absoluten Beträge die Addition nach Horizontalreihen (oder nach Vertikalreihen) eine konvergente Reihe liefert.

Nach der Voraussetzung sind die Horizontalreihen des Schemas (25) alle absolut konvergent. Es seien

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= |a_{11}| + |a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}| + \cdots \\ \sigma_2 &= |a_{21}| + |a_{22}| + |a_{23}| + |a_{24}| + \cdots \\ \sigma_3 &= |a_{31}| + |a_{32}| + |a_{33}| + |a_{34}| + \cdots \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{aligned}$$

die Summen der Reihen, welche von den absoluten Beträgen der Glieder gebildet werden. u_{mn} bezeichne die Summe der n ersten Glieder der m-ten Horizontalreihe des Schemas (25), so daß

$$S_{mn} = u_{1n} + u_{2n} + u_{3n} + \cdots + u_{mn}$$

ist. Offenbar hat man

$$|u_{mn}| \leqq |a_{m1}| + |a_{m2}| + |a_{m3}| + \cdots + |a_{mn}| < \sigma_m.$$

Wird nun eine positive Zahl ε beliebig vorgelegt, so gestattet die Konvergenz von $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \cdots$ eine Zahl μ zu bestimmen derart, daß

$$|\sigma_{\mu+1} + \sigma_{\mu+2} + \sigma_{\mu+3} + \cdots + \sigma_m| < \tfrac{1}{3}\varepsilon$$

und a fortiori

$$(26) \qquad |u_{\mu+1,n} + u_{\mu+2,n} + u_{\mu+3,n} + \cdots + u_{mn}| < \tfrac{1}{3}\varepsilon$$

ist für $m > \mu$ und für jeden Wert von n. Dasselbe μ kann man ferner so groß wählen, daß

$$(27) \qquad |u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_\mu - U| < \tfrac{1}{3}\varepsilon$$

wird. In der Tat konvergiert die Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$, da ihre Glieder absolut genommen nicht größer sind als die entsprechenden Glieder der Reihe $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \cdots$, welche nach der Voraussetzung konvergiert. Nach Fixierung von μ bemerken wir, daß man wegen

$$\lim_{n=\infty}(u_{1n} + u_{2n} + \cdots + u_{\mu n}) = u_1 + u_2 + \cdots + u_\mu$$

eine Zahl ν finden kann von der Beschaffenheit, daß für $n > \nu$ beständig

$$|u_{1n} + u_{2n} + \cdots + u_{\mu n} - (u_1 + u_2 + \cdots + u_\mu)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon$$

ist. Summiert man nun diese Ungleichung mit (26) und (27), so erhält man

$$|S_{mn} - U| < \varepsilon$$

für jedes Paar von Werten m und n, die bezüglich größer sind als μ und ν. Es konvergiert also S_{mn} immer nach dem Grenzwert U, in welcher Weise man auch m und n ins Unendliche wachsen läßt.

246. Bemerkungen. a) Wenn irgend eine der Bedingungen fehlt, welche das obige Theorem erfordert, so kann es vorkommen, daß dasselbe nicht mehr gilt. Es seien $a_1, a_2, a_3, \ldots$ positive Zahlen, die kleiner als 1 sind und nach Null konvergieren. Die Reihen

$$(28)\quad \begin{cases} a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + a_3 - a_4 + \cdots \\ a_1(1-a_1) - a_2(1-a_2) + a_2(1-a_2) - a_3(1-a_3) + \cdots \\ a_1(1-a_1)^2 - a_2(1-a_2)^2 + a_2(1-a_2)^2 - a_3(1-a_3)^2 + \cdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

sind konvergent. In der Tat, während die Summe einer ungeraden Zahl von aufeinander folgenden Anfangsgliedern in der m-ten Reihe

$$a_1(1-a_1)^{m-1} - a_2(1-a_2)^{m-1} + a_2(1-a_2)^{m-1} - a_3(1-a_3)^{m-1} + \cdots$$

gleich $a_1(1-a_1)^{m-1}$ ist, ist die der $2n$ ersten Glieder

$$a_1(1-a_1)^{m-1} - a_{n+1}(1-a_{n+1})^{m-1}$$

und hat als Grenzwert $a_1(1-a_1)^{m-1}$, wenn n ins Unendliche wächst. Also ist

$$u_m = a_1(1-a_1)^{m-1},$$

mithin konvergiert $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ und hat als Summe

$$a_1 + a_1(1-a_1) + a_1(1-a_1)^2 + \cdots = \frac{a_1}{1-(1-a_1)} = 1\,.$$

Summieren wir nun aber die Glieder des Schemas (28) nach Vertikalreihen, so finden wir

$$v_1 = a_1 + a_1(1-a_1) + a_1(1-a_1)^2 + \cdots = 1\,,$$
$$-v_2 = v_3 = a_2 + a_2(1-a_2) + a_2(1-a_2)^2 + \cdots = 1\,,$$
$$-v_4 = v_5 = a_3 + a_3(1-a_3) + a_3(1-a_3)^2 + \cdots = 1\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die Reihe $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$, von der man hätte erwarten können, daß sie konvergiert und als Summe die Einheit hat, ist hier gerade unbestimmt, da sie sich auf $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ reduziert.

b) Wenn $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ divergent wäre, so könnte man das Nichtbestehen des Theorems der nicht absoluten Konvergenz der

Reihen (28) zuschreiben. Es ist aber gut zu bemerken, daß dieses Theorem auch im Falle der absoluten Konvergenz der Reihen (25) und der Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ unzutreffend sein kann. Es genügt für $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ eine konvergente Reihe zu nehmen, z. B. $x + x^2 + x^3 + \cdots$ $(0 < x < 1)$. Man erhält dann das Schema

$$\begin{array}{l} x - x^2 + x^2 - x^3 + x^3 - x^4 + \cdots \\ x(1-x) - x^2(1-x^2) + x^2(1-x^2) - x^3(1-x^3) + \cdots \\ x(1-x)^2 - x^2(1-x^2)^2 + x^2(1-x^2)^2 - x^3(1-x^3)^2 + \cdots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{array}$$

welches aus absolut konvergenten Reihen besteht, deren Summen die Reihe

$$x + x(1-x) + x(1-x)^2 + \cdots = 1$$

bilden, die absolut konvergent ist. Gruppiert man dagegen die Glieder vertikal, so erhält man die unbestimmte Reihe

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots.$$

Das kommt nur von der Nichtkonvergenz der Reihe $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \cdots$.

c) Man beachte noch, daß die in der Formulierung des Theorems enthaltenen Bedingungen nur hinreichend für die Konvergenz sind, aber durchaus nicht notwendig. Wenn z. B. $\lim a_n = 0$ ist, so ist die Reihe

$$\begin{array}{l} a_1 - a_2 + 0 + 0 + 0 + \cdots \\ + 0 + a_2 - a_3 + 0 + 0 + \cdots \\ + 0 + 0 + a_3 - a_4 + 0 + \cdots \\ + 0 + 0 + 0 + a_4 - a_5 + \cdots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

konvergent, da die Summe S_{mn} gleich a_1 ist, wenn n größer als m, und gleich $a_1 - a_{m+1}$ im entgegengesetzten Falle, also immer nach dem Grenzwert a_1 konvergiert, obwohl die Reihe $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \cdots$ divergieren kann, wie es der Fall ist, wenn man für $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ eine divergente Reihe mit positiven Gliedern nimmt.

d) Endlich bemerke man, daß der in Rede stehende Satz als Spezialfall den Satz von Cauchy über die Multiplikation von zwei absolut konvergenten Reihen (§ 238) enthält. In der Tat, wenn die Reihen $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ und $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$ absolut konvergieren, so ist klar, daß in der Doppelreihe

$$\begin{array}{l} u_1v_1 + u_1v_2 + u_1v_3 + u_1v_4 + \cdots \\ + u_2v_1 + u_2v_2 + u_2v_3 + \cdots \\ + u_3v_1 + u_3v_2 + \cdots \\ \dots\dots\dots \end{array}$$

die Addition nach Horizontalreihen, wenn man alle Glieder positiv nimmt, die einfache Reihe

$$u_1' V' + u_2' V' + u_3' V' + \cdots = U'V'$$

liefert, welche konvergent ist. Mithin konvergiert die betrachtete Doppelreihe, und es ist daher die in horizontaler Weise erhaltene Summe, d. h.

$$u_1 V + u_2 V + u_3 V + \cdots = UV,$$

auch die Summe der einfachen Reihe, die sich bei Addition nach Vertikalreihen ergibt:

$$u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_1) + (u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1) + \cdots.$$

247. Übungen. a) Um die Summe der Reihe $x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots$, welche für $|x| < 1$ konvergiert, zu finden, kann man diese Reihe folgendermaßen in die Form einer Doppelreihe bringen:

$$\begin{array}{ccccccccc}
x & + & x^2 & + & x^3 & + & x^4 & + & \cdots \\
 & + & x^2 & + & x^3 & + & x^4 & + & \cdots \\
 & & & + & x^3 & + & x^4 & + & \cdots \\
 & & & & & + & x^4 & + & \cdots \\
 & & & & & . & . & . & .
\end{array}$$

Summiert man einmal in vertikaler, das andere Mal in horizontaler Weise, so findet man

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots = \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x} + \frac{x^3}{1-x} + \cdots = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

b) Man betrachte die Doppelreihe

$$\begin{array}{ccccccccc}
ax & + & a^2x^2 & + & a^3x^3 & + & a^4x^4 & + & \cdots \\
+\, ax^2 & + & a^2x^4 & + & a^3x^6 & + & a^4x^8 & + & \cdots \\
+\, ax^3 & + & a^2x^6 & + & a^3x^9 & + & a^4x^{12} & + & \cdots \\
. & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array} \tag{29}$$

Wenn die absoluten Beträge von x und von ax kleiner als 1 sind, so findet man absolut konvergente Reihen gleichviel, ob man die Glieder nach Horizontalreihen oder ob man sie nach Vertikalreihen summiert. Im ersten Falle ergeben sich die Summen

$$u_1 = \frac{ax}{1-ax}, \quad u_2 = \frac{ax^2}{1-ax^2}, \quad u_3 = \frac{ax^3}{1-ax^3}, \quad \cdots$$

und im zweiten

$$v_1 = \frac{ax}{1-x}, \quad v_2 = \frac{a^2x^2}{1-x^2}, \quad v_3 = \frac{a^3x^3}{1-x^3}, \quad \cdots$$

Man gelangt also zu dem folgenden Resultat:

$$(30)\quad \frac{ax}{1-ax}+\frac{ax^2}{1-ax^2}+\frac{ax^3}{1-ax^3}+\cdots=\frac{ax}{1-x}+\frac{a^2x^2}{1-x^2}+\frac{a^3x^3}{1-x^3}+\cdots.$$

c) Als Lambertsche Reihe bezeichnet man die Reihe

$$\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{x^3}{1-x^3}+\frac{x^4}{1-x^4}+\cdots,$$

wobei man natürlich annimmt, daß x von 1 und von -1 verschieden ist. Da ferner

$$u_n=\frac{x^n}{1-x^n}$$

ist, so sieht man sofort, daß die Reihe nicht außerhalb des Intervalles $(-1, 1)$ konvergieren kann, da $\lim u_n=-1$ sein würde. Dagegen ist für $|x|<1$ die Bedingung $\lim u_n=0$ erfüllt, und man erkennt ferner, daß die Reihe der absoluten Beträge konvergiert, da

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x-x^{n+1}}{1-x^{n+1}},\quad \lim\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=|x|$$

ist. Die gegebene Reihe konvergiert also absolut in dem Intervalle $(-1, 1)$ mit Ausschluß der Grenzen. Dies vorausgeschickt entwickle man jedes Glied in eine (absolut konvergente) Reihe, wie folgt:

$$u_p=\frac{x^p}{1-x^p}=x^p+x^{2p}+x^{3p}+x^{4p}+\cdots.$$

Man schreibe dann

$$\begin{array}{lllllllll}
S = x & + x^2 & + x^3 & + x^4 & + x^5 & + x^6 & + x^7 & + x^8 & + \cdots \\
 & + x^2 & & + x^4 & & + x^6 & & + x^8 & + \cdots \\
 & & + x^3 & & & + x^6 & & & + \cdots \\
 & & & + x^4 & & & & + x^8 & + \cdots \\
 & & & & + x^5 & & & & + \cdots \\
 & & & & & + x^6 & & & + \cdots \\
 & & & & & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot
\end{array}$$

x^n erscheint in u_p, wenn n durch p teilbar ist, und man erhält daher bei vertikaler Summation

$$(31)\qquad S=x\theta(1)+x^2\theta(2)+x^3\theta(3)+x^4\theta(4)+\cdots,$$

wo $\theta(n)$ die Anzahl der Divisoren von n ist. Diese Gleichung macht es begreiflich, weshalb die Lambertsche Reihe in der Arithmetik[1]) von Wichtigkeit ist.

---

1) Der erste, der solche arithmetischen Anwendungen machte, war Scherk (Crelles Journal, IX, p. 162; X, p. 207). Viele Mathematiker haben dann, jedoch vergeblich, versucht das Gesetz der Primzahlen aus der Lambertschen Reihe zu gewinnen.

d) Wir wollen jetzt die Clausensche Transformation auf die Lambertsche Reihe anwenden. Diese Reihe ist gleichwertig mit der Reihe (29), wenn man dort $a = 1$ setzt. Um die Clausensche Transformation (§ 244) anzuwenden, bemerke man vor allem, daß

$$w_n = x^{n^2} + 2x^{n(n+1)} + 2x^{n(n+2)} + 2x^{n(n+3)} + \cdots,$$

ist, d. h.

$$w_n = x^{n^2}\Big(1 + 2\left(x^n + x^{2n} + x^{3n} + \cdots\right)\Big) = \frac{1+x^n}{1-x^n}x^{n^2}.$$

Also kann man der Summe der Lambertschen Reihe die Form geben

$$S = \frac{1+x}{1-x}x + \frac{1+x^2}{1-x^2}x^4 + \frac{1+x^3}{1-x^3}x^9 + \frac{1+x^4}{1-x^4}x^{16} + \cdots.$$

Die neue Reihe konvergiert sehr rasch (§ 200, b), da

$$\lim \frac{w_{n+1}}{w_n} = \lim \frac{\left(1-x^n\right)\left(1+x^{n+1}\right)}{\left(1+x^n\right)\left(1-x^{n+1}\right)}x^{2n+1} = 0$$

ist. Gerade hierauf beruht der Nutzen der Clausenschen Transformation. So erhält man z. B. für $x = \frac{1}{10}$

$$\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{99} + \tfrac{1}{999} + \cdots = \tfrac{11}{90} + \tfrac{101}{990\,000} + \tfrac{1001}{999\,000\,000\,000} + \cdots.$$

In der Reihe rechts braucht man nur das erste Glied zu nehmen, um den Wert der Summe bis auf die dritte Dezimale genau zu erhalten, während drei Glieder der Reihe links erforderlich sind, um dieselbe Genauigkeit zu erreichen. Man kann sogar beweisen, daß in dem betrachteten speziellen Falle ν Glieder der Lambertschen Reihe nur ν Dezimalen richtig liefern, während die Clausensche transformierte Reihe etwa $(\nu + 1)^2$ gibt. Es ist ferner in dem allgemeinen Falle leicht den Rest der Reihe auszudrücken. Man braucht nur in der Gleichung (30) zu setzen $a = x^n$. Dann ergibt sich

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{1-x} + \frac{x^{2n+2}}{1-x^2} + \frac{x^{3n+3}}{1-x^3} + \cdots < x^n S,$$

und man sieht, daß der relative Fehler, den man macht, wenn man n Glieder nimmt, kleiner ist als x^n. Die Transformation ist also um so günstiger, je kleiner x ist. Aber ihre Vorteile verschwinden mehr und mehr in dem Maße, als sich x der Einheit nähert[1]).

e) Die Transformation der Lambertschen Reihe in diejenige von Clausen kann man auch aus dem Studium der Reihe

$$S' = \frac{x}{1-x} + \frac{x^4}{1-x^2} + \frac{x^9}{1-x^3} + \frac{x^{16}}{1-x^4} + \cdots$$

ableiten. Dieselbe konvergiert stärker (§ 199) als die Lambertsche Reihe, da das Verhältnis der allgemeinen Glieder $x^{n(n-1)}$ ist und für unendliches n wegen $|x| < 1$ nach Null konvergiert. Hier hat man

1) Für diesen Fall hat Schlömilch eine andere transformierte Reihe in Liouvilles Journal (1863, p. 101) angegeben.

$$u_p = \frac{x^{p^2}}{1-x^p} = x^{p^2} + x^{p(p+1)} + x^{p(p+2)} + x^{p(p+3)} + \cdots.$$

Bei vertikaler Summation der Glieder von $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ sieht man, daß x^n in u_p eingeht, wenn sich n auf die Form $n = pq$ bringen läßt mit $q \geqq p$. Also muß p ein Divisor von n sein, der der Bedingung

$$p \leqq q = \frac{n}{p}, \quad \text{mithin } p \leqq \sqrt{n}$$

genügt. Daraus folgt, daß der Koeffizient von x^n die Anzahl der Divisoren von n ist, die nicht größer sind als $\sqrt{n}$. Er ist also im allgemeinen $\frac{1}{2}\theta(n)$ und nur dann $\frac{1}{2}\theta(n) + \frac{1}{2}$, wenn n ein vollständiges Quadrat ist. Folglich ist, wenn wir uns an (31) erinnern,

$$S' = \tfrac{1}{2}S + \tfrac{1}{2}(x + x^4 + x^9 + \cdots),$$

woraus sich ergibt

$$S = 2\sum_1^\infty \frac{x^{n^2}}{1-x^n} - \sum_1^\infty x^{n^2} = \sum_1^\infty \frac{1+x^n}{1-x^n}x^{n^2}.$$

f) Ist $\varphi(n)$ die Anzahl der Zahlen, die zu n relativ prim und nicht größer als n sind, so ist bekannt (vgl. § 33, a), daß man hat

$$\varphi(a) + \varphi(b) + \varphi(c) + \cdots = n,$$

wenn $a, b, c, \ldots$ alle Divisoren von n sind. Dies vorausgeschickt ist es leicht die Summe der Reihe

$$S = \frac{x\varphi(1)}{1-x} + \frac{x^2\varphi(2)}{1-x^2} + \frac{x^3\varphi(3)}{1-x^3} + \frac{x^4\varphi(4)}{1-x^4} + \cdots$$

zu finden, indem man ebenso verfährt wie bei der Lambertschen Reihe. Man braucht nur jedes Glied nach steigenden Potenzen von x zu entwickeln und sieht dann, daß der Koeffizient von x^n gerade die vorhin angegebene Summe n ist. Setzt man also, wie es geschehen muß, $|x| < 1$ voraus und erinnert sich an das Resultat der ersten Übung, so findet man

$$S = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Z. B. ist

$$\frac{\varphi(1)}{9} + \frac{\varphi(2)}{99} + \frac{\varphi(3)}{999} + \frac{\varphi(4)}{9999} + \cdots = \frac{10}{81}.$$

Unendliche Produkte.

248. Mit der Theorie der unendlichen Reihen steht in engem Zusammenhange die Theorie der unendlichen Produkte, über die wir hier einiges sagen wollen, um nachher eine interessante Anwendung davon zu machen. Wenn für unendlich zunehmendes n das

Produkt P_n der n ersten Glieder einer Folge $u_1, u_2, u_3, \ldots$ nach einem endlichen Grenzwert P konvergiert, so pflegt man zu schreiben $P = u_1 u_2 u_3 \ldots$ und zu sagen, daß $u_1 u_2 u_3 \ldots$ ein konvergentes unendliches Produkt ist, welches den Wert P hat. Wenn dagegen P_n ins Unendliche wächst oder keinen Grenzwert hat, so heißt das Produkt divergent oder unbestimmt. Da man hat

$$\log P_n = \log u_1 + \log u_2 + \log u_3 + \cdots + \log u_n,$$

so sieht man, daß die Konvergenz der Reihe

$$(32) \qquad \log u_1 + \log u_2 + \log u_3 + \log u_4 + \cdots$$

notwendig und hinreichend dafür ist, daß das unendliche Produkt $u_1 u_2 u_3 \ldots$ konvergiert und nicht verschwindet. Das Produkt ist auch konvergent, wenn die Reihe (32) gegen $-\infty$ divergiert; aber in diesem Falle ist sein Wert $P = 0$. Jede für die Konvergenz von (32) notwendige Bedingung ist also notwendig dafür, daß das betrachtete Produkt konvergent und von Null verschieden ist. Wir wollen unter anderen auf die Bedingung $\lim \log u_n = 0$ oder $\lim u_n = 1$ hinweisen.

249. Theorem I. Damit ein unendliches Produkt $u_1 u_2 u_3 \ldots$, dessen Faktoren positiv und alle kleiner oder alle größer sind als die Einheit, konvergent und nicht null sei, ist es **notwendig und hinreichend, daß die Reihe**

$$(33) \qquad (u_1 - 1) + (u_2 - 1) + (u_3 - 1) + \cdots$$

konvergiert.

In der Tat, wenn das Produkt konvergent und von Null verschieden ist, so konvergiert die Reihe (32), und es hat folglich das allgemeine Glied von (33) den Grenzwert Null. Dasselbe kann also auf die Form $\frac{1}{\alpha_n}$ gebracht werden, wo α_n nach $-\infty$ konvergiert im Falle $u_n < 1$ und nach $+\infty$ im Falle $u_n > 1$. Inzwischen hat man (§ 157)

$$(34) \quad \lim \frac{\log u_n}{u_n - 1} = \lim \alpha_n \log\left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right) = \log \lim \left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n} = 1.$$

Also konvergiert auch (§ 189) die Reihe (33). Umgekehrt hat man, wenn diese Reihe konvergiert, $\lim u_n = 1$. Man sieht also (§ 189), da die Formel (34) immer noch gilt, daß auch die Reihe (32) konvergiert, folglich das Produkt $u_1 u_2 u_3 \ldots$ konvergent und von Null verschieden ist.

250. Theorem II. Das unendliche Produkt $u_1 u_2 u_3 \ldots$ ist **konvergent und nicht null, wenn die Reihen**

$$(u_1 - 1) + (u_2 - 1) + (u_3 - 1) + \cdots,$$
$$(35) \qquad (u_1 - 1)^2 + (u_2 - 1)^2 + (u_3 - 1)^2 + \cdots$$

konvergieren.

Da auf Grund der Konvergenz der ersten Reihe $\lim u_n = 1$ ist, so werden die Faktoren des Produktes mit zunehmendem n schließlich alle positiv sein, und es wird daher die Reihe, welche als allgemeines Glied $v_n = u_n - 1 - \log u_n$ hat, schließlich immer reelle Glieder haben. Da überdies

$$\lim \frac{v_n}{(u_n - 1)^2} = \lim \alpha_n \left\{ 1 - \alpha_n \log\left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right) \right\} = \frac{1}{2}$$

ist, so leitet man daraus ab, daß die Reihe $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$ konvergent ist wie die Reihe (35). Es konvergiert also die Reihe (32), als Differenz von zwei konvergenten Reihen, mithin ist auch das betrachtete Produkt konvergent und von Null verschieden. Wir wollen bemerken, daß, wenn nur die erste Reihe konvergent wäre, die Reihe $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$ divergent sein und positive Glieder haben würde. Mithin würde die Reihe (32) nach $-\infty$ divergieren, und das Produkt wäre konvergent, aber null.

251. Folgerung. **Das unendliche Produkt $u_1 u_2 u_3 \ldots$ ist konvergent und nicht null, wenn die Reihe**

$$(u_1 - 1) + (u_2 - 1) + (u_3 - 1) + \cdots$$

absolut konvergiert.

In der Tat, da der absolute Betrag von $u_n - 1$ schließlich kleiner als 1 wird und bleibt, so hat man schließlich auch $(u_n - 1)^2 < |u_n - 1|$. Da nun aber nach dem Theorem von Dirichlet die Reihe mit dem allgemeinen Gliede $|u_n - 1|$ konvergiert, so konvergiert a fortiori die Reihe (35), mithin ist auf Grund des vorigen Theorems das betrachtete Produkt konvergent und nicht null.

252. Anwendung auf die Gammafunktion. a) Große Wichtigkeit für verschiedene Zweige der mathematischen Analysis hat das unendliche Produkt

$$\frac{\left(\frac{2}{1}\right)^x}{1 + \frac{x}{1}} \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{1 + \frac{x}{2}} \cdot \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^x}{1 + \frac{x}{3}} \cdot \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^x}{1 + \frac{x}{4}} \cdots,$$

welches man mit $\Gamma(x + 1)$ zu bezeichnen pflegt und Γ-funktion nennt. Natürlich muß man es vermeiden, x die Werte $-1, -2, -3, \ldots$ zu erteilen; aber für jeden andern Wert von x ist es leicht zu beweisen, daß das Produkt konvergiert. Man bemerke in der Tat, daß man wegen (§ 222)

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x = 1 + \frac{x}{n} + \frac{x(x-1)}{2n^2} + \cdots$$

dem allgemeinen Faktor des betrachteten Produktes die Form $1 + \frac{\alpha_n}{n^2}$ geben kann, indem man mit α_n eine Größe bezeichnet, die mit unendlich zunehmendem n den Grenzwert $\frac{1}{2}x(x-1)$ hat. Also konvergiert das Produkt auf Grund des Theorems I, da die Reihe konvergiert, welche man erhält, wenn man mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ die Glieder der bekannten konvergenten Reihe $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots$ multipliziert. Hiernach ist man berechtigt zu schreiben

$$\Gamma(x+1) = \prod_1^\infty \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}. \tag{36}$$

b) Das unendliche Produkt, welches als allgemeines Glied $\frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}$ hat, ist konvergent. Sein Wert ist (§ 183)

$$\prod_1^\infty \frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}} = \lim_{n=\infty} \frac{e^{\mathbf{C}+\varrho_n}}{1+\frac{1}{n}} = e^{\mathbf{C}},$$

wo $\mathbf{C}$ die Eulersche Konstante darstellt. Da nun aber das Produkt (36) nicht null ist, so kann man immer schreiben

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)} = \prod_1^\infty \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x} \cdot \frac{1+\frac{x}{n}}{e^{\frac{x}{n}}} = \prod_1^\infty \left(\frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}\right)^x \cdot \prod_1^\infty \frac{1+\frac{x}{n}}{e^{\frac{x}{n}}}$$

und gelangt so zu der wichtigen Formel von Weierstraß:

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)} = e^{\mathbf{C}x} \prod_1^\infty \left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\right\}.$$

c) Es ist zweckmäßig der Definition (36) der Funktion Γ eine andre Form zu geben, die man Gauß verdankt. Man braucht nur zu bemerken, daß die rechte Seite mit

$$\lim_{n=\infty} \frac{(n+1)^x}{\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)}$$

gleichwertig ist, um schreiben zu können

$$\Gamma(x+1) = \lim_{n=\infty} n^x \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}. \tag{37}$$

Wenn man beachtet, daß

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} = \lim_{n=\infty} \frac{nx}{n+x} = x$$

ist, so erhält man sofort die fundamentale Eigenschaft $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Da ferner für $x = 0$ die Formel (37) $\Gamma(1) = 1$ gibt, so hat man

$$\Gamma(2) = 1!, \quad \Gamma(3) = 2!, \quad \Gamma(4) = 3!, \quad \Gamma(5) = 4!, \quad \ldots$$

d) Aus (37) leitet man ab

$$\Gamma(x+1)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \lim_{n=\infty} \frac{4^n \cdot n^{2x-\frac{1}{2}}(1\cdot 2\cdot 3\cdots n)^2}{(2x+1)(2x+2)(2x+3)\cdots(2x+2n)}.$$

Andrerseits erhält man, wenn man in derselben Formel (37) x und n in $2x$ und $2n$ verwandelt,

$$\Gamma(2x+1) = 4^x \lim_{n=\infty} \frac{n^{2x}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots 2n}{(2x+1)(2x+2)(2x+3)\cdots(2x+2n)}.$$

Es ergibt sich also, wenn man sich an die Stirlingsche Formel (§ 221) erinnert,

$$(38) \qquad \frac{\Gamma(x+1)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2x+1)} = \frac{1}{4^x} \lim_{n=\infty} \frac{4^n (1\cdot 2\cdot 3\cdots n)^2}{\sqrt{n}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots 2n} = \frac{\sqrt{\pi}}{4^x}.$$

Man gelangt auf diese Weise zu der Formel von Legendre:

$$\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\cdot\frac{\Gamma(2x)}{\Gamma(x)}.$$

Insbesondere erhält man für $x = 0$ aus (38) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, ferner gibt uns die letzte Formel

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = 3\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2^2}, \quad \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = 3\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2^3}, \quad \ldots.$$

Drittes Buch.

Theorie der Funktionen.

Funktionen einer Veränderlichen.

Erste Begriffe.

253. Man sagt, daß die Veränderliche x unabhängig ist, wenn es erlaubt ist ihr einen beliebigen Wert zuzuschreiben. Man kann dabei ihre Variabilität durch die Forderung einschränken, daß sie in einem gegebenen Intervall (§ 169) oder sogar in einer gegebenen Wertmenge bleiben muß, vorausgesetzt, daß man keine Rücksicht zu nehmen braucht auf die Werte, die andere Veränderliche annehmen können. Dagegen nennt man eine Funktion jede Größe y, die an die unabhängige Veränderliche x derart gebunden ist, daß jedem Werte der letzteren ein Wert von y und nur einer entspricht. Diese Abhängigkeit pflegt man auszudrücken, indem man schreibt $y = f(x)$, wo das Symbol f einen Komplex von bekannten Operationen darstellen kann, die man mit x ausführen muß, um y zu erhalten. Im allgemeinen aber deutet dieses Symbol nur die zwischen den beiden Größen aufgestellte Beziehung an, ohne überhaupt die Möglichkeit von Operationen vorauszusetzen, die es gestatten den Wert von y aus demjenigen von x abzuleiten. Wenn das Entsprechen zwischen x und y ein-eindeutig ist, wenn also jedem Werte von y nur ein einziger Wert von x entspricht, so kann man y als unabhängige Veränderliche annehmen, und dann ist $x = g(y)$, d. h. x eine Funktion von y, und die Funktionen (oder Abhängigkeiten), welche durch die Symbole f und g dargestellt werden, heißen zueinander invers. Denken wir sie uns, um die Sache klarer zu machen, als bezüglich auf dieselbe Veränderliche t, so sind auf Grund der Definition die Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ so beschaffen, daß $f(g(t))$ und $g(f(t))$ sich identisch auf t reduzieren.

254. Beispiele. a) Die einfachste Funktion von x ist diejenige, welche durch Aufstellung der Forderung definiert ist, einen gegebenen Wert zu bewahren, welches auch der Wert von x sein mag, z. B. $y = 1$. Schreibt man $y = x$, $y = x^2$, ... oder allgemeiner y gleich einem Polynom in x, so werden dadurch ebensoviele Funktionen von x definiert, mit denen wir uns eingehender im fünften Buche beschäftigen werden. Noch allgemeiner kann das Symbol f einen Komplex von algebraischen Grundoperationen in endlicher Anzahl bedeuten, d. h. Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen und Divisionen, Potenzierungen und Radizierungen (mit einem ganzzahligen Exponenten oder Index); alsdann heißt die Funktion $f(x)$ algebraisch. Wenn von den genannten Operationen die letzte fehlt, so sagt man noch, daß die Funktion rational sei, und es ist dann leicht sich zu überzeugen[1]), daß eine solche Funktion, wenn sie nicht ein Polynom ist, immer durch den Quotienten von zwei Polynomen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ausdrückbar ist.

b) So oft eine Funktion sich darbietet als Quotient von zwei andern: $y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, kann man wünschen, daß sie in einem ganzen Intervall definiert sein soll, in welches eine Wurzel von $\psi(x)$ fällt, d. h. irgend ein Wert von x, für den man hat $\psi(x) = 0$. Man muß zu diesem Zweck erklären, welches der Wert ist, den man der Funktion jeder Wurzel entsprechend beilegen will. So kann man z. B. die Funktionen

$$y = \frac{1}{x}, \quad y = \frac{x^2}{x}$$

nicht als definiert betrachten in einem Intervall, welches die Null enthält, außer wenn man hinzufügt, daß jede von ihnen für $x = 0$ einen gegebenen Wert annimmt, den man übrigens nach Belieben festsetzen kann. Man bemerke in der Tat, daß die Resultate $\frac{1}{0}$ und $\frac{0}{0}$, welche man erhält, wenn man auf den rechten Seiten der obigen Gleichungen $x = 0$ setzt, jeder Bedeutung entbehren, da man niemals in der Arithmetik oder in der Algebra den Quotienten von zwei Zahlen definiert hat (vgl. §§ 107, 120), ohne den Divisor als von Null verschieden vorauszusetzen. Man könnte jenen Symbolen eine Bedeutung geben; das ist aber nicht notwendig und würde sogar von Nachteil sein, insofern die Allgemeinheit der gewöhnlichen Regeln des algebraischen Kalküls nicht gewahrt bliebe. Jedenfalls muß man sich wohl hüten zu sagen, wie es gewöhnlich geschieht, daß $\frac{1}{0}$ unendlich und $\frac{0}{0}$ unbestimmt ist. Dies würde keinen Sinn haben. In der Tat haben die Worte unendliche Zahl keinen Sinn, da die Zahl an und für sich wesentlich endlich ist. Der Begriff des Unendlichen besteht einfach darin[2]), daß es uns nach Fixierung einer Zahl immer möglich ist eine Zahl zu denken, die größer ist als sie. Mit

---

1) In Betreff genauerer Details siehe den „Corso di analisi algebrica" von Capelli und Garbieri, p. 418.

2) Man lese in Betreff dieses Punktes die dritte der „Sept leçons de physique générale" von Cauchy. So faßte übrigens Leibniz, einer der Begründer der Infinitesimalrechnung, das Unendliche auf. Vgl. das „Résumé du Cours d'Analyse infinitésimale" von P. Mansion, p. 220.

andern Worten, das Unendliche mißt nicht einen Größenzustand, in dem sich irgend eine Größe augenblicklich befindet, sondern es bezieht sich einzig und allein auf einen gewissen Prozeß, den eine veränderliche Größe durchmacht, die in ihrem Wachstum keine Grenze findet. Will man aber eine Zahl definieren oder fixieren und zu gleicher Zeit behaupten, daß sie variiert, um beliebig große Werte anzunehmen, oder ihr direkt alle möglichen Werte beilegen, so ist das ein törichtes Unternehmen. Und doch sind diese Absurditäten die Hauptgrundlage der kritischen Einwände, welche unfruchtbare Philosophen unaufhörlich gegen die Infinitesimalrechnung vorbringen.

c) Die Funktion x unterscheidet sich nicht von ihrer eigenen inversen, und das Gleiche kann man von der Funktion sagen, deren Werte 0 für $x = 0$ und $\frac{1}{x}$ für $x \gtrless 0$ sind, so daß beide Funktionen die Eigenschaft $f(f(x)) = x$ genießen. Wenn man die Umkehrung der Funktion $y = x^2$ versucht, so sieht man sofort, daß y allerdings als unabhängige Veränderliche gewählt werden kann, aber unter der Voraussetzung, daß wir uns darauf beschränken, sie in dem Intervall $(0, \infty)$ zu betrachten. Es finden sich jedoch zu jeder Zahl dieses Intervalles mit Ausschluß der unteren Grenze zwei Werte von x, nämlich $\sqrt{y}$ und $-\sqrt{y}$. Die Aufsuchung der inversen Funktion von t^2 liefert also zwei Funktionen $\sqrt{t}$ und $-\sqrt{t}$ und sogar unendlich viele andere, wenn man vereinbart für jeden Wert von t bald den einen, bald den andern Wert seiner Quadratwurzel zu nehmen. Um größere Klarheit und Präzision bei der Aufstellung der fundamentalen Eigenschaften der Funktionen zu erreichen, ist es zweckmäfsig sich niemals von der in § 253 gegebenen Definition zu entfernen und folglich die Funktionen $\sqrt{t}$ und $-\sqrt{t}$ als verschieden zu betrachten, wie sehr es sich auch im weiteren Verlauf der mathematischen Studien wiederum empfehlen mag und sogar äußerst nützlich sein mag, sie als eine einzige Funktion bildend anzusehen. Man dehnt alsdann den Funktionsbegriff derart aus, daß jede Funktion von x auch imstande ist für jeden Wert von x zwei oder mehr Werte, ja sogar unendlich viele Werte anzunehmen, die einem wohldefinierten Gesetz unterworfen sind.

d) Schon aus der Algebra ist uns die Funktion a^x bekannt, wenigstens für rationales x, und wir werden weiter unten (§ 270, b) sehen, wie man ihre Bedeutung auf den Fall eines irrationalen x ausdehnen kann. Die inverse Funktion von a^x ist per definitionem $\operatorname{Log} x$ oder der Logarithmus von x zur Basis a. Dabei bleibt diese Funktion offenbar nur für $x > 0$ definiert. Im besondern ist $\log x$ die inverse Funktion von e^x. Ferner sind bereits in der Trigonometrie studiert worden die Funktionen $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, die sogenannten Kreisfunktionen. Die letzte von ihnen muß man als bedeutungslos betrachten, so oft $\cos x = 0$ ist, obgleich man häufig schreibt $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = \infty$. Natürlich hat aber diese Gleichung nur einen konventionellen Sinn, über den wir weiter unten sprechen werden. Von großer Wichtigkeit sind die Funktionen, welche durch Umkehrung der Kreisfunktionen entstehen. Für $y = \cos x$ existiert keine inverse Funktion, so lange man nicht übereinkommt unter den unendlich vielen Bogen x, welche den Kosinus y haben, den kleinsten nicht negativen Bogen zu wählen, welchen man mit $\arccos y$ bezeichnet. Ähnlich pflegt man $\arcsin y$ und $\operatorname{arc\,tg} y$ zu definieren, die inversen Funktionen von $y = \sin x$ und von $y = \operatorname{tg} x$, indem man übereinkommt jedem Werte des Sinus oder der Tangente y denjenigen Bogen x entsprechen zu lassen, welcher dem absoluten Betrage nach $\frac{\pi}{2}$ nicht übertrifft. Infolge dieser Definitionen hat man immer

$$-\frac{\pi}{2} \leqq \arcsin y \leqq \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \arccos y \leqq \pi,$$

mithin ist man wegen

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin y\right) = \sin(\arcsin y) = y, \quad 0 \leqq \frac{\pi}{2} - \arcsin y \leqq \pi$$

berechtigt $\frac{\pi}{2} - \arcsin y$ mit $\arccos y$ zu bezeichnen, d. h. es ist

$$\arcsin y + \arccos y = \frac{\pi}{2} \cdot$$

Der Leser wird von selbst die anderen Relationen finden, welche zwischen den Symbolen arc sin, arc cos, arc tg bestehen, wenn er immer auf die Einschränkungen achtet, welche die Definition dieser Symbole enthält. Sonst ist es sehr leicht in einen Irrtum zu verfallen. Um sich hiervon zu überzeugen braucht man nur zu bemerken, daß die Formel

$$\operatorname{arc\,tg} u + \operatorname{arc\,tg} v = \operatorname{arc\,tg} \frac{u+v}{1-uv},$$

die mit einer bekannten Formel der Trigonometrie äquivalent ist, nur gilt für $uv < 1$. Wenn uv größer ist als 1, so muß man auf der rechten Seite π addieren oder subtrahieren, je nachdem das gemeinsame Zeichen von u und v $+$ oder $-$ ist.

e) Wenn man übereinkommt y den Wert 0 oder den Wert 1 beizulegen, je nachdem x rational oder irrational ist, so wird dadurch eine Funktion von x definiert, welche in keiner Weise zur Umkehrung geeignet ist. Dasselbe läßt sich von der Funktion sagen, welche durch die Forderung definiert ist, gleich 1 zu bleiben für alle positiven Werte von x, gleich -1 für alle negativen Werte und gleich 0 zu sein für $x = 0$. Diese bemerkenswerte Funktion kommt häufig in den arithmetischen Untersuchungen von Kronecker vor, der sie mit $\operatorname{sgn} x$ bezeichnet, was man liest signum x. Auf den ersten Anblick scheint es nicht möglich sie mit Hilfe der bereits bekannten Funktionszeichen auszudrücken. Dagegen ist es leicht verschiedene Ausdrücke für sie zu finden, vor allem wenn man von der Operation lim Gebrauch macht, welche wir im zweiten Buche studiert haben, d. h. dem Übergange zur Grenze unter der Voraussetzung, daß eine ganze Zahl n unbegrenzt zunimmt. In der Tat ist

$$\operatorname{sgn} x = \lim_{n=\infty} \frac{nx}{\sqrt{1+n^2x^2}}, \quad \operatorname{sgn} x = \lim_{n=\infty} \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{e^{nx} + e^{-nx}}, \quad \operatorname{sgn} x = \frac{2}{\pi} \lim_{n=\infty} \operatorname{arc\,tg} nx.$$

Man braucht übrigens garnicht auf die Operation lim zurückzugreifen.

Wenn man übereinkommt, daß die Funktion $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$, welche für $x = 0$ ohne Bedeutung ist, für diesen Wert von x gleich 0 gelten soll, so ist es leicht zu sehen, daß man hat

$$\operatorname{sgn} x = \frac{2}{\pi}\left(\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right)\cdot$$

Eine andere Funktion, die in enger Beziehung zu der vorigen steht, ist durch die Bedingung definiert, gleich dem absoluten Betrage der Veränderlichen zu bleiben. Man pflegt sie mit $|x|$ zu bezeichnen. Offenbar ist $|x| = x \operatorname{sgn} x$. Endlich ist die Funktion $y = \lim\limits_{n=\infty} \operatorname{sgn}(\sin^2 n!\,\pi x)$ gerade diejenige, welche wir am Anfang definiert haben, da, wenn x rational ist, $n!x$ mit zunehmendem n schließlich eine ganze Zahl wird und bleibt, so daß $y = \operatorname{sgn} 0 = 0$ ist. Dies findet niemals statt, wenn x irrational ist, $\sin^2 n!\,\pi x$ bleibt positiv, mithin wird $y = 1$.

f) Die Häufigkeit y der Ziffer 0 unter den Dezimalziffern von x ist eine interessante Funktion von x, welche wir immer durch $\varpi(x)$ darstellen werden, um sie im folgenden zu kennzeichnen, wenn wir Gelegenheit haben werden sie als Beispiel heranzuziehen. Mit andern Worten, wenn sich unter den n ersten Dezimalen des dem x erteilten Wertes m Nullen befinden und wenn das Verhältnis von m zu n bei unbegrenzt wachsendem n nach einem Grenzwert konvergiert, so wollen wir übereinkommen diesen Grenzwert als y-Wert anzunehmen, der dem gegebenen Wert von x entspricht. Diese Funktion $y = \varpi(x)$ läßt keine inverse Funktion zu, und zwar nicht deshalb, weil man (wie bei den zuletzt definierten Funktionen) y nicht als unabhängige Veränderliche annehmen kann, sondern weil jedem Werte von y (der aber zwischen 0 und 1 enthalten sein muß) unendlich viele Werte von x entsprechen und es nicht gelingt unter ihnen einen Wert zu isolieren, wie wir es bei den inversen Kreisfunktionen machen konnten. In der Tat, wenn die Zahl a beliebig gegeben ist und die positive Zahl h, so klein als man will, fixiert wird, so wollen wir ν genügend groß nehmen, damit $10^\nu > \frac{1}{h}$ ist, und $x' - a$ die Zahl nennen, welche man erhält, wenn man in $x - a$ alle Ziffern unterdrückt, welche rechts von der ν-ten Dezimale stehen. Offenbar ist $|x - x'| < h$, und andrerseits ist offenbar, da die Addition von $x' - a$ zu a nur eine begrenzte Anzahl von Ziffern modifiziert, $\varpi(x') = \varpi(a)$. Also kehrt der Wert, den die Funktion für einen beliebigen Wert a, den man x erteilt, annimmt, in der Umgebung jedes andern Wertes von x unendlich oft wieder. Man bemerke überdies folgendes: Man kann m gleichzeitig mit n derart variieren lassen, daß $\frac{m}{n}$ sich überhaupt keinem Grenzwert nähert, und auf diese Weise eine Zahl a konstruieren, für welche $\varpi(a)$ nicht existiert. Aus den vorstehenden Betrachtungen geht hervor, daß dies in der Umgebung jedes anderen Wertes von x vorkommt, d. h. daß in jedem Intervall, wie klein es auch sein mag, die Funktion $\varpi(x)$ für unendlich viele Werte von x nicht definiert ist.

g) Die unendlichen Reihen und Produkte (vgl. § 252) liefern uns andere Beispiele von Funktionen. So wird, wenn man

$$y = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \cdots$$

setzt, die Funktion y in dem Intervall $(-1, 1)$ definiert, mit Ausschluß der unteren Grenze. In diesem Intervall nimmt bekanntlich (§ 186) y dieselben Werte an wie die andre Funktion $\log(1+x)$, die in dem ganzen Intervall $(-1, \infty)$ definiert ist, immer mit Ausschluß der unteren Grenze. Die Gleichung

$$F(x) = \sin 2\pi x + \tfrac{1}{2}\sin 4\pi x + \tfrac{1}{3}\sin 6\pi x + \cdots$$

definiert $F(x)$ für alle Werte von x (§ 218, i), und es ist nützlich zu wissen, daß diese Funktion sich mit Hilfe von zwei andern ganz einfachen, nämlich $[x]$, dem größten in x enthaltenen Ganzen, und $\operatorname{sgn} x$. Es gelingt in der Tat mit elementaren Hilfsmitteln[1]) zu beweisen, daß

$$\frac{2}{\pi}F(x) = \operatorname{sgn}(x - [x]) - 2(x - [x])$$

ist oder, wenn man will,

$$\frac{2}{\pi}F(x) = \varrho(-x) - \varrho(x),$$

wobei $\varrho(x)$ den Exzeß von x über das größte in x enthaltene Ganze, d. h. $x - [x]$, darstellt. Im besondern leitet man daraus ab, daß in dem Intervall $(0, 2\pi)$ mit Ausschluß der Grenzen die folgende Formel gilt, welche uns von Nutzen sein wird:

$$\sin x + \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x + \cdots = \tfrac{1}{2}(\pi - x).$$

h) Es ist aber, wie wir gesagt haben, nicht nötig, daß man y durch analytische Symbole, welche bekannte mit x vorzunehmende Operationen darstellen, auszudrücken weiß, oder daß dies überhaupt möglich ist. Es genügt, daß in irgend einer Weise die Kenntnis jedes Wertes von x einen Wert von y bestimmt, um behaupten zu können, daß y eine Funktion von x ist. Z. B. sind die Löslichkeit eines Salzes, die Spannung und die latente Wärme des Wasserdampfes Funktionen der Temperatur. Die wichtigste Funktion einer unabhängigen Veränderlichen, sagt Thomson, ist vielleicht in Liverpool der Preis der Baumwolle, obgleich es nicht gelingt irgend eine analytische Beziehung ausfindig zu machen zwischen diesem Preise und der Zeit, die von einem beliebigen Augenblick an gerechnet wird. Andere Funktionen der Zeit sind: die Zeit selbst, wie sie aus den Angaben einer ganz schlechten Uhr hervorgeht; die Temperatur in einem gegebenen Punkte des Raumes oder die, welche durch ein gegebenes Thermometer angezeigt wird und welche sich im Mittel und näherungsweise mit Hilfe der Kreisfunktionen darstellen läßt[2]), u. s. w. Für alle diese Funktionen gibt es keine inverse Funktion. Wie könnte man in der Tat behaupten, daß die Zeit eine Funktion der

1) Pringsheim, Mathematische Annalen, Bd. 26, p. 193. Siehe auch § 363

2) Liagre, Calcul des probabilités, p. 288.

Temperatur ist? Aber die merkwürdigste Funktion der Zeit ist ohne Zweifel der Druck der Luft auf das Trommelfell. Denkt man sich dieselbe z. B. konstruiert durch Anhören eines Musikstückes, das von einem Orchester ausgeführt wird, so würde, wie kompliziert oder rauh oder disharmonisch auch die Töne desselben sein mögen und wie sie sich auch superponieren mögen, die Kenntnis der Funktion genügen, um den Inbegriff der gehörten Töne getreu reproduzieren zu können und um sogar eine Fülle von Angaben zu haben, die der wirklichen Perzeption des Tones fremd sind[1]).

255. Eine Funktion heißt endlich in einem gegebenen Intervalle, wenn die Menge der Werte, die sie in diesem Intervalle annimmt, endlich ist, und die Grenzen (§ 170) dieser Wertmenge heißen die Grenzen (die untere und die obere) der Funktion. Mit andern Worten: die untere Grenze einer Funktion in einem gegebenen Intervalle ist eine Zahl, die durch die doppelte Eigenschaft charakterisiert ist, nicht größer zu sein als irgend ein Funktionswert und so beschaffen zu sein, daß jede Zahl, die größer ist als sie, auch größer ist als ein Funktionswert. Analog ist die obere Grenze, welche von keinem Funktionswert übertroffen wird, so beschaffen, daß jede Zahl, die kleiner ist als sie, von einem Funktionswert übertroffen wird. Diese Grenzen darf man nur dann als das Minimum und das Maximum bezeichnen, wenn es Werte sind, welche die Funktion in dem betrachteten Intervall wirklich annimmt. So ist z. B. die Funktion $\sin x$ endlich in jedem Intervalle und hat daselbst immer ein Minimum und ein Maximum, nämlich -1 und $+1$, wenn das Intervall nicht kleiner ist als 2π. Endlich ist auch die Funktion $x-[x]$, die in jedem Intervall, welches nicht kleiner ist als 1, den kleinsten Wert 0 annimmt, aber kein Maximum besitzt, da 1, die obere Grenze, kein Wert ist, den die Funktion annimmt. Dagegen ist die Funktion, welche für $x \gtrless 0$ durch $\frac{1}{x}$ ausgedrückt wird und für $x=0$ gleich 0 ist, nicht endlich in den Intervallen, welche 0 enthalten, da es, wenn l beliebig groß gegeben ist, immer möglich ist Funktionswerte zu finden, die größer als l oder kleiner als $-l$ sind. Man braucht nur x dem absoluten Betrage nach kleiner zu wählen als $\frac{1}{l}\cdot$ Eine Funktion kann auch in dem einen Sinne endlich sein und im entgegengesetzten Sinne nicht endlich sein, wie z. B. die durch das Quadrat der vorigen ausgedrückte Funktion nicht endlich ist in jedem Intervalle, welches die Null einschließt. In derselben Weise ist $e^{\frac{1}{x}}$ nicht endlich, wenn in dem betrachteten Intervall mit Ausschluß der oberen Grenze die Null enthalten ist, u. s. w. Diese Funktionen sind nicht endlich

1) Thomson, Conferences scientifiques et allocutions, pp. 178, 180.

insofern sie keine obere Grenze haben, besitzen jedoch in jedem Intervalle einen kleinsten Wert.

256. Theorem I. Wenn eine Funktion in einem Intervall endlich ist, so hat sie darin immer eine untere Grenze und eine obere Grenze.

Dies ergibt sich unmittelbar aus der Definition der endlichen Funktion und aus einem bekannten Theorem (§ 172), welches die Existenz der unteren Grenze und der oberen Grenze einer endlichen Wertmenge sicher stellt.

257. Theorem II. Wenn eine Funktion in der Umgebung aller Zahlen eines endlichen Intervalls endlich ist, so ist sie in dem Intervall endlich.

Indem wir das indirekte Beweisverfahren benutzen, werden wir zeigen, daß, wenn die Funktion in dem gegebenen Intervall nicht endlich ist, in demselben wenigstens eine Zahl existiert, in deren Umgebung sie nicht endlich ist. Verneint man, daß die Funktion endlich ist, so behauptet man die Möglichkeit, unter den Werten, welche die Funktion in dem betrachteten Intervalle annimmt, wenigstens einen Wert y_1 zu finden, der größer ist als eine beliebig vorgegebene Zahl l_1, und daher auch einen Wert y_2, der größer ist als eine beliebige Zahl l_2, die größer ist als y_1. So geht nun es unbegrenzt fort und man kann sich bei Konstruktion der Zahlen $l_1, l_2, l_3, \ldots$ so einrichten, daß sie beständig und über alle Grenzen wachsen. Die Werte $y_1, y_2, y_3, \ldots$ der Funktion entsprechen solchen Werten $x_1, x_2, x_3, \ldots$ der unabhängigen Veränderlichen, die alle verschieden voneinander sind und folglich eine unendliche Anzahl bilden. Sie gehören einem endlichen Intervall an, und es gibt daher auf Grund eines bekannten Theorems (§ 174) deren unendlich viele in der Umgebung eines oder mehrerer Zahlen des Intervalles. Es sei ξ eine solche Zahl. Wir fixieren h positiv und beliebig klein und wollen beweisen, daß in dem Intervall $(\xi - h, \xi + h)$ die Funktion jede Zahl l übertreffen kann, die so groß sein mag als man will. In der Tat, wählt man ν genügend groß, damit $l_n > l$ ist für jedes $n > \nu$, und bemerkt man, daß man in der Folge $x_{\nu+1}, x_{\nu+2}, x_{\nu+3}, \ldots$ schließlich immer eine Zahl x_n antreffen muß, die dem Intervall $(\xi - h, \xi + h)$ angehört, so sieht man sofort, daß in diesem Intervall die Funktion den Wert $y_n > l_n > l$ annimmt.

258. Für das obige Theorem läßt sich auch ein direkter Beweis liefern, wenn man es vermeidet, das Theorem des § 174 heranzuziehen. Die Funktion werde als endlich vorausgesetzt in der Umgebung aller Zahlen des Intervalles (a, b). Im besondern bedeutet die Voraussetzung, sie sei rechts von a endlich, daß man sie als endlich voraussetzt in einem Intervall (a, x), dessen obere Grenze x genügend nahe an a zu wählen ist, und dies bleibt richtig für jede andre Zahl $x' < x$, die größer als a ist. Die Menge dieser Zahlen $x (\leqq b)$ hat eine obere Grenze $\xi \leqq b$. Diese Zahl ist die größte in der Menge. In der Tat, wählt man $\xi' < \xi$ in genügender Nähe von ξ, so ist die Funktion, welche nach der Voraussetzung links von ξ endlich ist, endlich in (ξ', ξ). Andrerseits ist sie endlich in (a, ξ'), also ist sie endlich in (a, ξ). Es genügt nunmehr zu zeigen, daß $\xi = b$ ist. Wäre $\xi < b$, so könnte man eine Zahl $\xi'' > \xi$ genügend nahe an ξ wählen, damit die Funktion in (ξ, ξ'') und folglich in (a, ξ'') endlich ist. Dies ist absurd, sobald ξ die größte unter denjenigen Zahlen $x \leqq b$ ist, welche so beschaffen sind, daß in (a, x) die Funktion endlich ist.

259. Theorem III (erstes Theorem von Weierstraß). Wenn eine Funktion in einem endlichen Intervalle endlich ist, so enthält dieses wenigstens eine Zahl, in deren Umgebung die Funktion dieselbe untere Grenze hat, welche sie in dem ganzen Intervall zuläßt. Dasselbe gilt von der oberen Grenze.

Wir können uns darauf beschränken, das Theorem nur für eine der Grenzen zu beweisen. Es sei z. B. die untere Grenze λ. Wenn diese ein Minimum ist, so gibt es in dem Intervall (a, b), welches man betrachtet, wenigstens eine Zahl ξ, für welche man hat $f(\xi) = \lambda$, und es ist klar, daß in der Umgebung von ξ die Zahl λ immer der kleinste Wert der Funktion ist. Wenn λ nicht ein Minimum ist, so bedeutet dies, daß $f(x) - \lambda$ in (a, b) immer positiv bleibt, aber beliebig kleine Werte annehmen kann, woraus folgt, daß die Funktion

$$\varphi(x) = \frac{1}{f(x) - \lambda}$$

in dem ganzen Intervalle definiert ist, aber nicht endlich ist. Es gibt also in (a, b) eine Zahl ξ, in deren Umgebung $\varphi(x)$ nicht endlich ist, d. h. wenn eine Zahl l so groß als man will gegeben ist, so wird es immer möglich sein in dem beliebig kleinen Intervalle $(\xi - h, \ \xi + h)$ eine Zahl x_0 zu finden derart, daß

$$\varphi(x_0) > l \quad \text{und folglich} \quad f(x_0) < \lambda + \frac{1}{l}$$

ist. $f(x_0)$ ist also kleiner als eine Zahl, die zwar größer ist als λ, aber so nahe an λ liegt als man es wünscht. Also ist in $(\xi - h, \xi + h)$ wie in (a, b) die Zahl λ die größte unter denjenigen, welche keinen Wert der Funktion übertreffen.

Das Konvergieren nach einem Grenzwert.

260. Für die unabhängige Veränderliche x bedeutet das Konvergieren nach einem Grenzwert a, daß sie alle Werte in der Umgebung (§ 169) von a annimmt. Häufig ist es nützlich das Konvergieren nach a von links oder von rechts zu unterscheiden, und man kann sich denken, daß dies geschieht, indem x wachsend ein ganzes Intervall $(a-h,\ a)$ mit Ausschluß der oberen Grenze durchläuft, bezw. abnehmend ein ganzes Intervall $(a,\ a+h)$ mit Ausschluß der unteren Grenze. Man sagt ferner, daß x nach Unendlich konvergiert, wenn es beim Variieren schließlich jeden Wert annimmt, der größer ist als eine gegebene Zahl. Dies kann man immer erreichen, indem man x wachsend ein ganzes Intervall $(\xi,\ \infty)$ durchlaufen läßt. Eine analoge Definition gilt für ein x, welches nach $-\infty$ konvergiert.

261. Man sagt, daß die Werte von $f(x)$ rechts von a nach dem Grenzwerte l konvergieren, wenn für ein von rechts nach a konvergierendes x die Differenz $f(x)-l$ schließlich absolut genommen kleiner wird und bleibt als jede positive Zahl. Ausführlicher können wir es so ausdrücken: Man sagt, daß $f(x)$ rechts von a den Grenzwert l hat, und schreibt

$$\lim_{x=a+0} f(x) = l,$$

wenn jeder noch so kleinen positiven Zahl ε eine positive Zahl h entspricht derart, daß für jeden Wert von x, der dem Intervall $(a,\ a+h)$ mit Ausschluß der unteren Grenze angehört,

$$|f(x)-l| < \varepsilon \tag{1}$$

ist. Ebenso sagt man, daß $f(x)$ links von a den Grenzwert l hat und schreibt

$$\lim_{x=a-0} f(x) = l,$$

wenn jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $h > 0$ entspricht derart, daß die Formel (1) gilt für alle Werte von x, die nicht kleiner als $a-h$, aber kleiner als a sind. Wenn man ferner, wie es gewöhnlich vorkommt, schreibt

$$\lim_{x=a} f(x) = l,$$

so will man behaupten, daß die Grenzwerte von $f(x)$ rechts und links von a beide existieren und gleich l sind. Nur der Kürze wegen pflegt man zu schreiben und zu sagen, $f(x)$ konvergiere für $x=a$ nach dem Grenzwert l. Es ist aber darunter zu verstehen, daß x alle zu a unendlich benachbarten Werte annehmen soll gerade unter

Ausschluß des Wertes a. Überhaupt darf man die Werte rechts und links, $f(a+0)$ und $f(a-0)$, welche die Funktion in a als Grenzwerte hat, nicht verwechseln mit dem Werte $f(a)$, den sie für $x=a$ tatsächlich annimmt.

262. Man sagt ferner, daß $f(x)$ für unendliches x nach einem Grenzwerte l konvergiert, wenn jeder positiven Zahl ε eine Zahl ξ entspricht derart, daß für $x>\xi$ immer die Formel (1) richtig ist. Man sagt, daß für ein nach dem Werte a von rechts oder von links konvergierendes x die Funktion $f(x)$ nach Unendlich konvergiert, und vereinbart zu schreiben

$$\lim_{x=a+0} f(x)=\infty, \quad \lim_{x=a-0} f(x)=\infty,$$

wenn jeder beliebig großen Zahl l eine positive Zahl h entspricht derart, daß in dem Intervall $(a, a+h)$ oder in $(a-h, a)$ mit Ausschluß der Grenze a immer $f(x)>l$ ist. In analoger Weise definiert man die Annäherung an den Grenzwert $-\infty$. Man sagt endlich, daß für unendliches x die Funktion $f(x)$ nach Unendlich konvergiert und vereinbart zu schreiben

$$\lim_{x=\infty} f(x)=\infty,$$

wenn jeder beliebig großen Zahl l eine Zahl ξ entspricht derart, daß für $x>\xi$ immer $f(x)>l$ ist. Bei einiger Überlegung ist es leicht sich zu überzeugen, daß alle diese Definitionen nach einem einzigen Prinzip gebildet sind. Es ist hier gut zu bemerken, daß man oft, anstatt zu behaupten, daß eine Funktion nach Unendlich konvergiert, wenn x nach a konvergiert, oder nach dem Grenzwert l konvergiert, wenn x unendlich zunimmt, auch sagt, daß die Funktion für $x=a$ unendlich ist, oder daß sie für unendliches x den Wert l hat. Dies sind rein konventionelle Ausdrucksweisen, die ihre Nützlichkeit haben und zu keinen Schwierigkeiten Veranlassung geben können, wenn man sich ein für alle Mal ihre genaue Bedeutung klar gemacht hat. Entsprechend dieser Redeweise pflegt man zu schreiben

$$f(a)=\infty \quad \text{oder} \quad f(\infty)=l.$$

Auf diese Weise wird es statthaft (vgl. § 254, d) $\operatorname{arc\,tg} x$ in derselben Weise wie $\arcsin x$ zu definieren ohne die Werte $\pm\frac{\pi}{2}$ auszuschließen. Sonst würden die Gleichungen $\operatorname{arc\,tg}(\pm\infty)=\pm\frac{\pi}{2}$, wie auch die andere $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}=\infty$, ohne Bedeutung sein. In der letzteren ist in Wirklichkeit noch etwas mehr stillschweigend vorausgesetzt. Auf der linken Seite ist nämlich $\frac{\pi}{2}-0$ statt $\frac{\pi}{2}$ zu setzen; denn man hat

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\pm 0\right)=\mp\infty.$$

263. Durch dieselben Betrachtungen wie diejenigen, welche früher im Falle einer ganzzahligen Veränderlichen angewandt worden sind, lassen sich die folgenden Eigenschaften feststellen. Eine Funktion, die beim Wachsen von x solche Werte annimmt, daß keiner kleiner ist als ein vorhergehender Wert, muß für unendliches x nach einem endlichen oder unendlichen Grenzwert konvergieren, da es bei einer solchen Funktion genügt, daß sie größer wird als eine feste Zahl, um es auch zu bleiben, wenn x wächst. Wenn eine Funktion zwischen zwei andern enthalten ist, die für ein nach dem Werte a konvergierendes x einen gemeinsamen Grenzwert l haben, wird auch nach dem Grenzwert l konvergieren. Wenn für ein nach dem Werte a konvergierendes x eine Funktion einen von Null verschiedenen Grenzwert zuläßt, so nimmt sie schließlich das Vorzeichen dieses Grenzwertes an und behält es. Es kann daher eine Funktion, die in der Umgebung eines gegebenen Wertes a der unabhängigen Veränderlichen niemals aufhört positive und negative Werte anzunehmen, nicht nach einem von Null verschiedenen Grenzwerte konvergieren, wenn x nach a konvergiert. Sind u, v, w, ... Funktionen von x, und ist, wenn x nach a konvergiert,

$$\lim u = \alpha, \quad \lim v = \beta, \quad \lim w = \gamma, \quad \ldots,$$

so ist

$$\lim (u + v + w + \cdots) = \alpha + \beta + \gamma + \cdots, \quad \lim uvw \ldots = \alpha\beta\gamma \ldots,$$

vorausgesetzt, daß die betrachteten Funktionen in endlicher Anzahl sind. Der Grenzwert des Quotienten von u und v ist der Quotient von α und β, vorausgesetzt, daß β nicht null ist; aber einiges läßt sich auch in den Fällen sagen, wo der Nenner nach keinem endlichen, von Null verschiedenen Grenzwert konvergiert. In der Tat, wenn v unbegrenzt wächst, während u endlich bleibt, so konvergiert der Quotient $\frac{u}{v}$ nach Null, und wenn v nach Null konvergiert, indem es das Zeichen von u bewahrt, während $\frac{1}{u}$ endlich bleibt, so wächst $\frac{u}{v}$ dem absoluten Betrage nach über alle Grenzen. Noch haben wir nicht die Mittel, um den Grenzwert des Quotienten zu berechnen, wenn der Zähler und Nenner gleichzeitig nach Null oder nach Unendlich konvergieren; aber die Frage wird weiter unten behandelt werden.

264. Theorem IV. Für die Existenz eines endlichen Grenzwertes von $f(x)$ rechts von a ist es notwendig und hinreichend, daß man, wenn ε positiv und beliebig klein gegeben ist, immer eine positive Zahl h finden kann derart, daß für jedes Paar von Werten x' und x'', die in dem Intervall $(a, a + h)$ mit Ausschluß der unteren Grenze gewählt sind, $f(x') - f(x'')$ dem absoluten Betrage nach kleiner als ε wird.

Die Bedingung ist notwendig. Konvergiert nämlich $f(x)$ nach dem Grenzwert l, wenn x von rechts nach a konvergiert, so bedeutet dies, daß bei beliebig klein gegebenem $\varepsilon > 0$ eine positive Zahl h existiert derart, daß für jeden Wert von x, der nicht größer als $a + h$, aber größer als a ist, immer

$$|f(x) - l| < \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

ist. Wenn also x' und x'' dem genannten Intervalle angehören, so hat man gleichzeitig

$$|f(x') - l| < \tfrac{1}{2}\varepsilon, \quad |f(x'') - l| < \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

mithin

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - l| + |l - f(x'')| < \varepsilon.$$

Denken wir uns umgekehrt bei beliebig gegebenem positivem ε ein Intervall $(a, a + h)$ bestimmt, in welchem man mit Ausschluß der unteren Grenze hat

$$(2) \qquad |f(x') - f(x'')| < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

In dem genannten Intervalle wähle man nach Belieben eine Folge von abnehmenden Zahlen, die nach dem Grenzwert a konvergieren, und betrachte die Folge der entsprechenden Funktionswerte. Es ist bekannt (§ 137), daß sich aus dieser zweiten Folge immer unendlich viele Glieder $f(a_1)$, $f(a_2)$, $f(a_3)$, ... aussondern lassen, welche nach einem Grenzwerte konvergieren. Dieser Grenzwert kann nicht unendlich sein, da sich aus (2) ableiten läßt

$$f(a_1) - \tfrac{1}{2}\varepsilon < f(a_n) < f(a_1) + \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Es sei also

$$\lim_{n=\infty} f(a_n) = l,$$

und man wähle n genügend groß, damit man hat

$$|f(a_n) - l| < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Für jeden Wert von x, der in $(a, a + h)$ gewählt wird immer mit Ausschluß der unteren Grenze, hat man nach der Voraussetzung (2)

$$|f(x) - f(a_n)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

mithin, wenn man die beiden letzten Ungleichungen summiert,

$$|f(x) - l| \leq |f(x) - f(a_n)| + |f(a_n) - l| < \varepsilon.$$

Es ist also l der Grenzwert von $f(x)$ rechts von a. Mit leichter Modifikation gilt das Theorem auch für die Existenz des Grenzwertes links. Es ist ferner leicht den obigen Beweis dem Falle eines unendlich zunehmenden x anzupassen. Man braucht nur die Zahl h durch eine Zahl ξ zu ersetzen, die untere Grenze eines unendlichen Intervalls, in welchem x' und x'' gewählt werden.

265. Auch bei den Funktionen erweist es sich als sehr nützlich analoge Zahlen einzuführen wie die, welche in § 175 betrachtet worden sind, und es empfiehlt sich sie wie in § 178 aufzufassen. Die Menge der Werte, welche eine endliche Funktion $f(x)$ in $(x, x+h)$ mit Ausschluß von x annimmt, besitzt eine untere Grenze λ. Sie ist eine Funktion von h, welche notwendig nach einem Grenzwert λ_0 konvergiert, wenn h nach Null konvergiert; denn sie kann bei abnehmendem h nicht variieren ohne zu wachsen, bleibt aber dabei kleiner als die obere Grenze μ. In analoger Weise definiert man den größten Grenzwert μ_0. Offenbar hängen die Werte dieser Limites (die sogenannten Unbestimmtheitsgrenzen) einzig und allein von x ab, können aber auf der linken Seite andere sein als auf der rechten. Die Funktionen $\lambda_0(x)$ und $\mu_0(x)$, z. B. die auf die rechte Seite der Werte von x bezüglichen, sind durch die folgenden Eigenschaften charakterisiert: Jeder positiven Zahl ε entspricht eine Zahl h derart, daß für jeden Wert von x, der zwischen a und $a+h$ gewählt wird,

$$\lambda_0(a) - \varepsilon < f(x) < \mu_0(a) + \varepsilon$$

ist und in jedem noch so kleinen Intervall $(a, a+h)$ gibt es Zahlen x' und x'', für welche

$$\lambda_0(a) + \varepsilon > f(x'), \quad f(x'') < \mu_0(a) - \varepsilon$$

ist. Hiernach ist es leicht das Theorem IV zu beweisen, ohne sich des in § 137 bewiesenen Hilfssatzes zu bedienen. Es genügt folgendes zu bemerken: Wenn nicht ein (einziger) Grenzwert für die Werte $f(x)$ rechts von a existiert, so ist $\lambda_0 < \mu_0$, und man kann immer, wenn die positive Zahl $\varepsilon < \mu_0 - \lambda_0$ gegeben ist, x' und x'' beliebig nahe an a wählen und so beschaffen, daß

$$f(x') < \tfrac{1}{2}(\lambda_0 + \mu_0 - \varepsilon), \quad f(x'') > \tfrac{1}{2}(\lambda_0 + \mu_0 + \varepsilon)$$

ist, woraus sich also ergibt $|f(x') - f(x'')| > \varepsilon$. Wenn daher für jedes ε die Bedingung $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ in einem hinreichend kleinen Intervall $(a, a+h)$ erfüllt ist, so ist es unmöglich, daß $\lambda_0 < \mu_0$ ist, und es existiert daher notwendig die Zahl $f(a+0)$, die gleich dem gemeinsamen Werte von $\lambda_0(a)$ und $\mu_0(a)$ ist.

Stetigkeit.

266. Stetige Funktionen. Eine Funktion heißt stetig für $x = a$, wenn rechts und links von a die Grenzwerte ihrer Werte mit dem speziellen Werte zusammenfallen, welchen die Funktion für $x = a$

annimmt. Die Stetigkeit von $f(x)$ für $x = a$ wird also ausgedrückt durch die Gleichungen

$$f(a+0) = f(a), \quad f(a-0) = f(a).$$

Die Funktion heißt stetig in einem Intervall, wenn sie für alle Werte von x stetig ist, die in dem Intervall enthalten sind. Es kann vorkommen, daß die Funktion nur rechts oder nur links von a stetig ist. Dies ist der Fall, wenn nur eine der obenstehenden Gleichungen besteht. Man bemerke, daß, wenn man z. B. sagt, eine Funktion sei rechts von a stetig, man gezwungen ist in Gegensatz zu einer allgemeinen Definition zu treten, die wir oben aufgestellt haben (§ 169). Wenn man daher behaupten will, daß in einem Intervalle, welches die untere Grenze in a hat, die Funktion stetig ist, so muß man wohl darauf achten, es explicite zu sagen. Es ist von Wichtigkeit zu bemerken, daß die Definition der Stetigkeit ganz in der Gleichung enthalten ist

$$\lim f(x) = f(\lim x),$$

so daß man sagen kann, daß die Möglichkeit das Symbol lim mit dem Symbol f zu vertauschen, für die stetigen Funktionen charakteristisch ist.

267. Es ist klar, daß analoge Eigenschaften wie die in der Theorie der Grenzwerte bewiesenen bei den stetigen Funktionen stattfinden. Insbesondere sind die Summe und das Produkt von mehreren stetigen Funktionen in endlicher Anzahl stetige Funktionen. Wenn z. B. für einen bestimmten Wert von x die Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ stetig sind, so sind für denselben Wert von x stetig

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x), \quad g(x) = \varphi(x)\psi(x),$$

da (§ 263)

$$\lim f(x) = \lim \varphi(x) + \lim \psi(x) = \varphi(\lim x) + \psi(\lim x) = f(\lim x)$$
$$\lim g(x) = \lim \varphi(x) \cdot \lim \psi(x) = \varphi(\lim x) \cdot \psi(\lim x) = g(\lim x)$$

ist. Eine stetige Funktion ist auch der Quotient von zwei stetigen Funktionen, vorausgesetzt, daß diejenigen Werte der unabhängigen Veränderlichen ausgeschlossen werden, welche den Nenner zum Verschwinden bringen. Endlich bemerke man, daß jede stetige Funktion einer stetigen Funktion von x eine stetige Funktion von x ist. In der Tat, bildet man mit den stetigen Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ die Funktion $f(x) = \varphi(\psi(x))$, so hat man

$$\lim f(x) = \lim \varphi(\psi(x)) = \varphi(\lim \psi(x)) = \varphi(\psi(\lim x)) = f(\lim x),$$

vorausgesetzt, daß in die Intervalle, in welchen $\varphi(x)$ sich stetig verhält, Werte fallen, die die Funktion $\psi(x)$ in den Intervallen annimmt, in welchen sie stetig ist. Diese Werte bilden, wie wir später (§ 276) sehen werden, ein oder mehrere Intervalle, in denen die Funktion f stetig ist.

268. Theorem V. Zur Stetigkeit von $f(x)$ rechts von a ist notwendig und hinreichend, daß man, wenn ε positiv und beliebig klein gegeben wird, immer eine positive Zahl h finden kann derart, daß für jedes Paar von Werten x', x'', die in dem Intervall $(a, a+h)$ gewählt werden, $f(x')-f(x'')$ dem absoluten Betrage nach kleiner als ε ausfällt.

Daß die Bedingung mehr als hinreichend ist, sieht man sofort, wenn man $x'=a$ nimmt und für x'' einen beliebigen zwischen a und $a+h$ enthaltenen Wert setzt. Wegen $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ ist dann $f(a+0)=f(a)$. Wenn umgekehrt $f(a+0)$ existiert und gleich $f(a)$ ist, so ist es möglich, zu jeder positiven Zahl ε zwei positive Zahlen h' und h'' zu finden derart, daß die Ungleichungen

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon, \quad |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

stattfinden: die erste, auf Grund des Theorems IV, für alle Wertepaare x' und x'', die in $(a, a+h')$ mit Ausschluß von a gewählt werden, und die zweite, auf Grund der Definition des Limes, für alle in $(a, a+h'')$ gewählten Werte von x. Man kann also, indem man die beiden Ungleichungen zu einer vereinigt und für h die kleinste der Zahlen h' und h'' wählt, behaupten, daß für alle Paare von Werten x' und x'', die dem Intervall $(a, a+h)$ angehören, sein muß $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. Offenbar läßt sich das Theorem auch für die linke Seite von a aussprechen und in analoger Art beweisen. Betrachtet man ferner gleichzeitig die rechte und die linke Seite von a, so erkennt man folgendes als die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Funktion $f(x)$ für $x=a$ stetig ist: Zu jeder positiven Zahl ε muß man eine positive Zahl h finden können derart, daß man für alle Paare von Werten x', x'', die in $(a-h, a+h)$ gewählt sind, $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ hat.

269. Der Begriff der Stetigkeit ist sehr nützlich, wenn es sich um die Vervollständigung der Definition gewisser Funktionen handelt, insbesondere derjenigen, welche uns für die rationalen Werte der unabhängigen Veränderlichen bereits aus der Algebra bekannt sind. Wenn die Funktion $f(x)$ so beschaffen ist, daß bei beliebig klein gegebenem positiven ε sich um jeden Wert von x ein Intervall herstellen läßt, in welchem die Differenz zwischen zwei beliebigen Funktionswerten dem absoluten Betrage nach kleiner ausfällt als ε, so ist es leicht die Bedeutung von $f(x)$ auf den Fall eines irrationalen x auszudehnen, und zwar so, daß man eine für alle Werte der unabhängigen Veränderlichen stetige Funktion erhält. Zu dem Ende konstruiere man in beliebiger Weise eine Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ von rationalen Zahlen, die nach der Irrationalzahl a konvergieren, und wähle in der Umgebung von a ein Intervall derart, daß in seinem Innern der absolute Betrag der Differenz zwischen zwei beliebigen Funktionswerten immer kleiner ist als ε. In dieses Intervall fallen schließlich die Glieder der Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$, so daß man, wenn n' und n'' eine gewisse Zahl übertreffen, immer hat

$$|f(a_{n'}) - f(a_{n''})| < \varepsilon.$$

Also (§ 139) existiert der Grenzwert von $f(a_n)$ für unendliches n, und dieser Grenzwert ist es, den wir übereinkommen als Wert von $f(a)$ anzunehmen. Jetzt wollen wir beweisen, daß die so definierte Funktion stetig ist für jeden, rationalen oder irrationalen, Wert a der unabhängigen Veränderlichen. In der Tat, wenn $\varepsilon > 0$ gegeben ist, so klein als man will, so können wir nach der Voraussetzung h schon so bestimmen, daß für zwei beliebige rationale Werte x' und x'' in $(a-h,\ a+h)$ stets $|f(x') - f(x'')| < \frac{1}{3}\varepsilon$ ist. Es ist klar, daß diese Ungleichung auch noch gilt, wenn eine der beiden Zahlen, z. B. x', irrational ist, vorausgesetzt, daß die andere rationale in genügender Nähe der ersten gewählt wird, und zwar beruht dies auf der Definition von $f(x')$. Daraus folgt daß, wenn in $(a-h,\ a+h)$ die Zahlen x' und x'', irrational oder auch nicht, gewählt werden, es immer möglich ist, zwei andre Zahlen a' und a'' zu finden, die rational sind, demselben Intervall angehören und so beschaffen sind, daß

$$|f(x') - f(a')| < \tfrac{1}{3}\varepsilon, \quad |f(x'') - f(a'')| < \tfrac{1}{3}\varepsilon$$

ist. Beachtet man jetzt, daß die Differenz $f(x') - f(x'')$ in die Summe der folgenden zerlegbar ist

$$f(x') - f(a'), \quad f(a') - f(a''), \quad f(a'') - f(x''),$$

deren jede absolut genommen kleiner als $\frac{1}{3}\varepsilon$ ist, so sieht man, daß $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ ist für alle dem Intervall $(a-h,\ a+h)$ angehörigen Wertepaare x', x''. Mithin ist auf Grund des Theorems V die Funktion stetig für $x = a$.

270. Beispiele. a) Man erkennt sofort, daß die Funktionen $y = 1$, $x, x^2, \ldots, \sqrt{x}$, $\sin x$, $\cos x$ u. s. w. stetig sind. Z. B. folgert man aus

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x-a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} < \frac{|x-a|}{\sqrt{a}},$$

$$\sin x - \sin a = 2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2},$$

wenn x nach a konvergiert, $\lim \sqrt{x} = \lim \sqrt{a}$, $\lim \sin x = \sin a$, und bei der ersten Funktion hat man, wenn $a = 0$ ist, rechts davon $\lim \sqrt{x} = 0$. Auch die Funktion, welche im allgemeinen durch den Quotienten von $\sin x$ und x ausgedrückt wird, dagegen für $x = 0$ den Wert 1 hat, ist für $x \gtrless 0$ stetig als Quotient von zwei stetigen Funktionen, und für $x = 0$ ist sie stetig, weil der Bogen x, wenn er nach Null konvergiert, zwischen seinem Sinus und seiner Tangente enthalten bleibt, so daß man hat

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad \lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

b) Die Funktion a^x ist uns aus der Algebra nur für rationales x bekannt. Es ist aber leicht die Definition für $a > 0$ nach den Angaben von § 269 zu vervollständigen. Zunächst muß man sich daran erinnern, daß für rationale x', x'' die Differenz zwischen den zugehörigen Werten von a^x so klein gemacht werden kann als man will, indem man $x' - x''$ dem absoluten Betrage nach hinreichend klein macht. Dann wird sich nämlich $a^{x'-x''}$ von 1 so wenig, als man haben will, unterscheiden, und es wird daher auch $a^{x'} - a^{x''}$ beliebig klein sein, als Produkt von $a^{x''}$ und $a^{x'-x''} - 1$. Hiernach sind wir auf Grund des in § 269 Gesagten sicher, daß für jede Folge von rationalen Zahlen $x_1, x_2, x_3, \ldots$, die nach einem gegebenen irrationalen Grenzwert x konvergieren, die Folge $a^{x_1}, a^{x_2}, a^{x_3}, \ldots$ ebenfalls einen endlichen Grenzwert zuläßt, der nur von x abhängt: dieser Grenzwert wird mit a^x bezeichnet. Es ist leicht zu beweisen, daß die so definierte Funktion a^x die verschiedenen Eigenschaften bewahrt, welche wir schon für rationales x kennen, d. h. daß sie immer in einem Sinne variiert, wenn x wächst, daß sie mit wachsendem x unbegrenzt zunimmt oder nach Null konvergiert, je nachdem a größer oder kleiner als 1 ist, und endlich, daß sie die Eigenschaft $a^x \cdot a^{x'} = a^{x+x'}$ hat. Aus den letzten Bemerkungen folgt, daß die Gleichung $a^y = x$ die Größe y als Funktion von x definiert in dem Intervall $(0, \infty)$ mit Ausschluß der unteren Grenze; denn jedem positiven Wert von x entspricht ein und nur ein Wert von y. Die Stetigkeit dieser Funktion $y = \operatorname{Log} x$, der inversen von a^x, ist eine unmittelbare Folge der Stetigkeit von a^x.

c) Um eine andere einfache Anwendung des in § 269 Gesagten zu machen, wollen wir uns die Aufgabe stellen, unter den Funktionen, welche die Eigenschaft $f(x) + f(x') = f(x + x')$ genießen, diejenigen zu finden, die stetig sind. Wenn x eine positive rationale Zahl ist, und man setzt $x = \frac{p}{q}$ mit ganzen und positiven p, q, so ist klar, daß man haben muß

$$f(x) = pf\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{p}{q} \cdot qf\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{p}{q} f(1) = ax,$$

wenn man mit a den Wert von $f(1)$ bezeichnet. Da man für $x' = 0$ hat $f(x) + f(0) = f(x)$, so sieht man sofort, daß $f(0) = 0$ ist. Für $x' = -x$ erhält man ferner $f(-x) = -f(x)$. Mithin ist, auch wenn man x einen negativen rationalen Wert erteilt, $f(x) = ax$. Erteilt man hingegen x einen irrationalen Wert und konstruiert in beliebiger Weise eine Folge von rationalen Zahlen $x_1, x_2, x_3, \ldots$, die nach x konvergieren, so muß man auf Grund der Stetigkeit haben

$$f(x) = f(\lim_{n=\infty} x_n) = \lim_{n=\infty} f(x_n) = \lim_{n=\infty} a x_n = a x.$$

Wir fordern den Leser auf, eine ähnliche Untersuchung anzustellen für die Funktionen, welche der Bedingung $f(x) f(x') = f(xx')$ genügen, und bemerken, daß dieselbe außer von der stetigen Funktion x^m auch von unendlich vielen unstetigen Funktionen befriedigt wird, zu denen $\operatorname{sgn} x$ gehört.

d) Wenn x nach Null konvergiert, so bleibt der Quotient von $a^x - 1$ durch x zwischen den Zahlen

$$n\left(\sqrt[n+1]{a} - 1\right), \quad (n+1)\left(\sqrt[n]{a} - 1\right)$$

enthalten, wo $n = \left[\frac{1}{x}\right]$ ist, und da (§ 159) $\lim_{n=\pm\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \log a$ ist, so hat man

$$\lim_{x=0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a.$$

Ein Beispiel einer für alle Werte der unabhängigen Veränderlichen stetigen Funktion wird uns also geboten durch die Funktion, welche für $x \gtrless 0$ durch $\frac{a^x - 1}{x}$ ausgedrückt wird und für $x = 0$ gleich $\log a$ ist. Analog beweist man, daß

$$\lim_{x=0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

und daß folglich die Funktion stetig ist, welche im allgemeinen durch $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$ ausgedrückt wird, während sie für $x = 0$ den Wert e hat.

271. Unstetige Funktionen. Eine Funktion heißt unstetig für einen bestimmten Wert von x, wenn sie nicht stetig ist, und unstetig in einem Intervall, wenn sie wenigstens für einen Wert unstetig ist, der dem Intervall angehört. Die Unstetigkeit kann auf jeder Seite von $x = a$ stattfinden oder nur auf einer Seite, und in jedem Falle sind die Unstetigkeiten, welche rechts oder links von a bestehen können, voneinander unabhängig. Wir wollen uns also mit den rechts von a möglichen Unstetigkeiten beschäftigen und bemerken, daß die Funktion unstetig ist, wenn ihr Grenzwert auf der rechten Seite existiert und einen endlichen Wert hat, der von $f(a)$ verschieden ist, aber auch wenn dieser Grenzwert unendlich ist oder garnicht existiert. In dem ersten Falle heißt die Unstetigkeit eine gewöhnliche oder eine Unstetigkeit erster Art, im zweiten eine zweiter Art. Der wesentliche Unterschied zwischen den beiden Arten liegt darin, daß die zweite nicht von dem Werte abhängt, den die Funktion für den betrachteten Wert von x annimmt, sondern einzig und allein von dem Verhalten der Funktion in der Umgebung des genannten Wertes. Mit andern Worten, um zu wissen, ob $f(x)$ rechts oder links von a unstetig von zweiter Art ist, ist es unnötig $f(a)$ zu kennen; dies ist dagegen unerläßlich, wenn man wissen will, ob die Funktion eine gewöhnliche Unstetigkeit hat, die wenigstens auf einer Seite von a beseitigt werden kann, indem man den Wert von $f(a)$ ändert.

272. Beispiele. a) Aus den am Ende von § 267 aufgestellten Sätzen folgt, daß $\frac{1}{x}$ und $\sin\frac{1}{x}$ stetig sind, solange $x \gtrless 0$ ist. Dagegen haben sie für $x = 0$ eine Unstetigkeit zweiter Art. Um das zu konstatieren ist es nicht nötig zu fragen, welchen Wert man ihnen für $x = 0$ beilegen will. Es genügt vielmehr zu beachten, daß, wenn x nach Null konvergiert, der absolute Betrag von $\frac{1}{x}$ über alle Grenzen wächst, und daß $\sin\frac{1}{x}$ überhaupt nach keinem Grenzwert konvergiert, da diese Funktion in einem beliebig kleinen Intervall $(-h, h)$ nacheinander die Werte $0, 1, 0, -1$ annimmt, so oft der absolute Betrag von $\frac{2}{\pi x}$, indem er über alle Grenzen wächst, eine ganze Zahl wird, die (mod. 4) einer der Zahlen 0, 1, 2, 3 kongruent ist. Dagegen ist die Funktion, welche für $x \gtrless 0$ durch $x \sin\frac{1}{x}$ ausgedrückt wird, auch für $x = 0$ stetig oder weist für diesen Wert eine gewöhnliche Unstetigkeit auf, je nachdem der Wert, den man ihr für $x = 0$ beilegt, null ist oder nicht. Daß sich eine Unstetigkeit auch nur auf einer Seite eines Wertes von x bieten kann, erkennt man sofort, wenn man z. B. die Funktion betrachtet, welche für $x = 0$ null ist und für $x \gtrless 0$ durch $e^{\frac{1}{x}}$ ausgedrückt wird. Sie ist stetig links von Null, unstetig rechts, da ihre Werte nach Null oder nach Unendlich konvergieren, je nachdem x durch negative oder durch positive Werte nach Null konvergiert. Unstetig wie $\frac{1}{x}$ rechts von Null ist die Funktion $\log x$, welche für $x > 0$ stetig ist und für $x < 0$ keinen Sinn hat. Dasselbe läßt sich sagen von $\sin \log x$, welches wie $\sin\frac{1}{x}$ unstetig ist, aber für $x > 0$ stetig ist infolge des letzten Satzes in § 267. Aus dem gleichen Grunde ist $\log \sin x$ stetig, solange man nicht hat $\sin x = 0$, dagegen ist es unstetig wie $\frac{1}{x}$ rechts von den geraden Vielfachen von π und links von den ungeraden Vielfachen, wie man auch die Definition vervollständigen mag. Die vorstehenden Funktionen nennt man wie alle diejenigen, welche in einem endlichen Intervalle eine endliche Anzahl von Malen unstetig sind, im allgemeinen stetig, um sie von den unendlich oft unstetigen Funktionen zu unterscheiden.

b) Auch $\operatorname{tg} x$ ist im allgemeinen stetig, nicht aber $\operatorname{tg}\frac{1}{x}$. Die erste, als Quotient der stetigen Funktionen $\sin x$ und $\cos x$, ist stetig solange $\cos x \gtrless 0$ ist, dagegen unstetig von zweiter Art in der Umgebung der unendlich vielen Wurzeln $\alpha = \frac{\pi}{2} \pm n\pi$ von $\cos x$, weil man hat

$$\lim_{x=\alpha-0} \operatorname{tg} x = +\infty, \qquad \lim_{x=\alpha+0} \operatorname{tg} x = -\infty.$$

Ebensolche Unstetigkeiten bieten sich für unendlich viele Werte von x, die beliebig nahe an Null liegen, bei der Funktion, die für $x \gtrless 0$ durch $\operatorname{tg}\frac{1}{x}$ definiert ist. Sie ist dagegen stetig in dem ganzen Intervall $\left(\frac{2}{\pi}, \infty\right)$ mit Ausschluß der unteren Grenze und in dem ganzen Intervall $\left(-\infty, -\frac{2}{\pi}\right)$ mit Ausschluß der oberen Grenze. Für $x = 0$ hat man immer wie in der Umgebung dieses Wertes eine Unstetigkeit zweiter Art, aber man bemerkt hier noch etwas Komplizierteres, insofern die Funktion unendlich oft alle möglichen Werte annimmt. Man beachte, daß rechts wie links von Null die Funktion beliebig groß wird, aber es nicht bleibt. Deshalb kann man (§ 262) nicht sagen, daß sie ins Unendliche wächst, sondern nur, daß sie in der Umgebung der Null nicht endlich ist.

c) Die letzte Bemerkung kann man auch machen, und zwar rechts von Null, bei der Funktion, welche für rationales x den Wert 0 hat und für irrationales x durch $\log x$ ausgedrückt wird. Dieselbe ist überdies unstetig von zweiter Art für alle Werte von x: sie ist eine total unstetige Funktion, während $\operatorname{tg}\frac{1}{x}$ der Kategorie der punktiert unstetigen Funktionen angehört, da wir in $(-h, h)$ trotz der unendlich vielen Unstetigkeiten doch immer Werte von x, und sogar unendlich viele solche Werte, finden können, für welche die Funktion stetig ist. Dies sind die beiden großen Kategorien[1]) von unendlich oft unstetigen Funktionen. Ein einfacheres Beispiel für eine total unstetige Funktion bietet sich uns in der Funktion, welche die Werte 0 und 1 annimmt, je nachdem x rational oder irrational ist, und auch in derjenigen, welche wir oben (§ 254, f) mit $\varpi(x)$ bezeichnet haben. Wenn man ferner eine Funktion betrachtet, die nach Belieben definiert ist, so oft $\varpi(x)$ verschwindet oder keine Bedeutung hat, und in jedem andern Falle gleich $\log \varpi(x)$ ist, dann ist klar nicht nur, daß diese Funktion nicht stetig ist, sondern auch, daß sie in jedem noch so kleinen Intervalle nicht endlich ist.

d) Die Funktion $[x]$, welche rechts von allen Werten von x stetig ist, bietet nur links von jedem ganzzahligen Werte von x eine gewöhnliche Unstetigkeit dar. In der Tat, wenn x eine ganze Zahl ist, so hat man $[x] = x$, $[x+0] = x$, $[x-0] = x-1$. Die Funktion $\left[\frac{1}{x}\right]$, welche links von jedem positiven oder negativen Werte von x stetig ist, ist unstetig von erster Art rechts von unendlich vielen Werten, die beliebig nahe an Null liegen, und sie ist dagegen unstetig von zweiter Art für $x = 0$.

1) Um sich zu überzeugen, daß dies keine leeren Unterscheidungen sind, sondern daß sie einer wesentlichen Verschiedenheit in dem Verhalten der unstetigen Funktionen entsprechen, lese man die „Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali" von Dini (auch deutsch von Lüroth u. Schepp), p. 62.

Die Funktion, welche im allgemeinen durch $x\left[\frac{1}{x}\right]$ ausgedrückt wird und für $x = 0$ gleich der Einheit ist, ist für diesen Wert von x stetig, obgleich in die Umgebung desselben unendlich viele andere fallen, auf deren rechter Seite die Funktion eine gewöhnliche Unstetigkeit erleidet, die gerade durch x gemessen wird und daher immer mehr verschwindet, wenn x nach Null konvergiert.

e) Mit Hilfe der Funktion $[x]$ läßt sich leicht zeigen, daß eine stetige Funktion einer unstetigen Funktion nicht immer unstetig ist. Es sei $\varphi(x)$ eine stetige Funktion, die nur an die Bedingung $\varphi(0) = \varphi(1)$ gebunden ist, wie z. B. $\sin \pi x$ oder $x - \sqrt{x}$ u. s. w. Man bezeichne zur Abkürzung $x - [x]$ mit $\psi(x)$ und betrachte $f(x) = \varphi(\psi(x))$, eine stetige Funktion der unstetigen Funktion $\psi(x)$. Offenbar kann $f(x)$ nur unstetig sein, wenn $\psi(x)$ unstetig ist, d. h. links von den ganzzahligen Werten von x. Dies vorausgeschickt bemerke man, daß für diese Werte, $\psi(x) = 0$, $f(x) = \varphi(0)$ ist, während man auf der linken Seite hat

$$\psi(x-0) = 1, \quad f(x-0) = \varphi(\psi(x-0)) = \varphi(1) = \varphi(0) = f(x).$$

Also ist $f(x)$ stetig. Ein einfacheres Beispiel erhält man, wenn man nimmt $\psi(x) = \frac{1}{x^2}$ für $x \gtrless 0$ und $\psi(0) = 0$ und $\varphi(x)$ unter denjenigen stetigen Funktionen wählt, welche für unendliches x wieder den Wert anzunehmen streben, den sie für $x = 0$ haben: z. B. $e^{-x} \sin x$. Wenn auch $\psi(x)$ für $x = 0$ unstetig ist, so ist die Funktion $f(x) = \varphi(\psi(x))$ stetig, da

$$f(0) = \varphi(\psi(0)) = \varphi(0), \quad \lim_{x=0} f(x) = \varphi(\infty) = \varphi(0)$$

ist.

f) Im allgemeinen stetig ist die Funktion

$$f(x) = \sin x + \tfrac{1}{2} \sin 2x + \tfrac{1}{3} \sin 3x + \cdots,$$

welche gleichzeitig mit $\sin x$ verschwindet, aber (§ 254, g) die Werte

$$f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x) + \left[\frac{x}{2\pi}\right]\pi$$

annimmt und folglich stetig ist, solange x nicht gleich einem Vielfachen α von 2π wird. Inzwischen ist

$$f(\alpha) = 0, \quad f(\alpha + 0) = \frac{\pi}{2}, \quad f(\alpha - 0) = -\frac{\pi}{2},$$

und man hat daher auf jeder Seite der Werte $x = \alpha$ eine gewöhnliche Unstetigkeit. Dieses Beispiel ist deshalb bemerkenswert, weil es uns zeigt, daß eine Summe von unendlich vielen stetigen Funktionen nicht stetig zu sein braucht. Da überdies

$$\lim (\sin x + \tfrac{1}{2} \sin 2x + \cdots) \gtrless \lim \sin x + \tfrac{1}{2} \lim \sin 2x + \cdots$$

ist, wenn x nach Null konvergiert, so sieht man (vgl. § 263), daß der Grenzwert einer Summe nicht immer gleich der Summe der Grenzwerte der Summanden ist, wenn dieselben in unendlicher Anzahl vorhanden sind.

273. Theorem VI. Wenn die Funktion $f(x)$ für $x = a$ stetig und von Null verschieden ist, so bewahrt sie in der Umgebung von a das Zeichen von $f(a)$.

In der Tat ist auf Grund der Stetigkeit $\lim\limits_{x=a} f(x) = f(a)$; d. h. wenn die positive Zahl ε so klein als man will gegeben ist, so gibt es eine positive Zahl h derart, daß man in dem ganzen Intervall $(a-h,\ a+h)$ hat $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, also

$$f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon. \tag{3}$$

Man braucht nur $\varepsilon = |f(a)|$ zu nehmen, um zu sehen, daß man hat $f(x) > 0$ oder $f(x) < 0$, je nachdem $f(a)$ positiv oder negativ ist.

274. Theorem VII. Eine in einem endlichen Intervalle stetige Funktion ist in diesem Intervalle auch endlich.

Daß die Funktion in der Umgebung jeder Zahl des Intervalles endlich ist, folgt unmittelbar aus der Einschränkung (3). Sie ist also auf Grund des Theorems II in dem Intervalle endlich.

275. Theorem VIII. Eine in einem Intervall stetige Funktion, die an dessen Grenzen entgegengesetzte Vorzeichen hat, muß in diesem Intervall wenigstens einmal verschwinden.

Infolge des Theorems VI gibt es immer rechts von der unteren Grenze a unendlich viele Werte x derart, daß für alle Zahlen des Intervalls (a, x) die Funktion das Zeichen von $f(a)$ bewahrt: es sei z. B. das Zeichen $+$. Die genannten Werte von x sind nicht so groß als man will, da an der andern Grenze, in b, die Funktion nach der Voraussetzung einen negativen Wert annimmt. Die von ihnen gebildete Menge ist also endlich und besitzt daher (§ 172) eine obere Grenze ξ. Da links von ξ die Funktion positiv bleibt, so ist es auf Grund desselben Theorems VI nicht möglich, daß $f(\xi) < 0$ ist. Daraus folgt zunächst, da $f(b) < 0$ ist, daß ξ kleiner ist als b, und daß man daher in dem Intervall (a, b) auch die rechte Seite von ξ betrachten kann. Wäre nun $f(\xi) > 0$, so würde es rechts von ξ Zahlen x geben derart, daß in dem ganzen Intervall (ξ, x), mithin in dem ganzen Intervall (a, x) die Funktion positiv bliebe, d. h. ξ, die obere Grenze einer Zahlenmenge, würde von Zahlen dieser Menge übertroffen werden, was absurd ist. Folglich ist $f(\xi) = 0$.

276. Folgerung. Eine stetige Funktion kann nicht von einem Werte zu einem andern übergehen, ohne durch alle Zwischenwerte hindurchzugehen.

Es sei l irgend eine zwischen $f(a)$ und $f(b)$ enthaltene Zahl, und man betrachte die Funktion $f(x) - l$, welche offenbar wie $f(x)$ in dem Intervall (a, b) stetig ist. An den Grenzen desselben nimmt sie die Werte $f(a) - l$, $f(b) - l$ an, welche nach den gemachten Voraussetzungen entgegengesetzte Vorzeichen haben. Das vorige Theorem sichert gerade die Existenz einer Zahl ξ, die zwischen a und b enthalten ist und für welche man hat $f(\xi) - l = 0$, d. h. $f(\xi) = l$.

277. **Bemerkungen.** a) Die letzten Eigenschaften sind von viel feinerer Art, als es den Anschein hat. In der Tat, man glaube nicht, daß man es als intuitive Unmöglichkeit ansehen darf, daß eine stetige Funktion ihr Zeichen wechseln kann ohne zu verschwinden; denn a priori widerspricht es dem Begriff der Stetigkeit nicht, daß eine solche Funktion z. B. nur irrationaler Werte fähig ist. Wie könnte aber diese Funktion verschwinden, d. h. den Wert Null annehmen, der rational ist? Nur nachdem wir das Theorem VIII bewiesen haben, ist es uns erlaubt zu behaupten, daß eine derartige Funktion nicht existieren kann.

b) Ebensowenig darf man aber glauben, daß die Möglichkeit, unter Überspringung von Zwischenwerten den Wert zu ändern, eine wesentliche Eigenschaft der Unstetigkeit ist; denn es gibt unstetige Funktionen, die von einem Werte zu einem andern nicht übergehen, ohne successiv alle Zwischenwerte anzunehmen. Es würde genügen die Funktion $\sin \frac{1}{x}$ anzuführen (§ 272, a), welche für $x = 0$ unstetig ist. Wenn x abnehmend von einem positiven Werte zu einem negativen übergeht, so führt die Funktion stetige Oszillationen zwischen -1 und $+1$ aus und springt dabei niemals von einem Werte zu irgend einem andern[1]). Ähnliches kann man von der Funktion $\operatorname{tg} \frac{1}{x}$ nicht behaupten, die in der Umgebung der Null unvermittelt von positiven Werten zu negativen Werten übergeht, die absolut genommen unendlich groß sind.

c) Auch eine total unstetige Funktion kann die Eigenschaft haben, von welcher hier die Rede ist. In der Tat, wenn man die Zahlen a und b beliebig wählt, so nahe aneinander als man will, so kann man beweisen, daß die Funktion $\varpi(x)$ in dem Intervall (a, b) alle zwischen 0 und 1 enthaltenen Werte (unendlich oft) annimmt, mithin auch die zwischen $\varpi(a)$ und $\varpi(b)$, die Existenz dieser Zahlen zugegeben. Nach dem, was wir früher (§ 254, f) über diese Funktion gesagt haben, können wir uns darauf beschränken zu zeigen, daß man, wenn eine beliebige Zahl l zwischen 0 und 1 gegeben ist, immer einen Wert von x finden kann derart, daß $\varpi(x)$ gleich l wird. Wir konstruieren in dem Intervall (0, 1) eine Folge $l_1, l_2, l_3, \ldots$ von Zahlen, die nach l konvergieren und schreiben x im Dezimalsystem.

---

1) Wegen anderer Beispiele siehe eine Abhandlung von Darboux in den „Annales de l'École norm. sup." (2^e^ série, t. IV).

Dabei erteilen wir ihm einen beliebigen ganzen Teil, zerlegen die Dezimalstellen in Gruppen, welche der Reihe nach 1, 2, 3, ... Ziffern haben und wählen auch die Ziffern jeder Gruppe willkürlich, indem wir uns nur verpflichten es so einzurichten, daß sich unter den ν Ziffern der ν-ten Gruppe $[\nu l_\nu]$ Nullen befinden. Dies vorausgeschickt nehmen wir in der so konstruierten Zahl x die n ersten Dezimalen und setzen voraus, daß die n-te in die ν-te Gruppe fällt, so daß

$$n' - \nu < n \leqq n', \quad m' - [\nu l_\nu] \leqq m \leqq m'$$

ist, wenn wir mit m die Anzahl der Nullen bezeichnen und

$$n' = 1 + 2 + 3 + \cdots + \nu, \quad m' = [l_1] + [2l_2] + [3l_3] + \cdots + [\nu l_\nu]$$

setzen. Nun beachte man, daß, wenn ν ins Unendliche wächst,

$$\lim \frac{\nu}{n'} = 0, \quad \lim \frac{[\nu l_\nu]}{n'} = 0$$

ist und außerdem nach einem bekannten Theorem (§ 141)

$$\lim \frac{m'}{n'} = \lim \frac{[\nu l_\nu]}{\nu} = \lim l_\nu = l.$$

Mithin hat man, da

$$\frac{m' - [\nu l_\nu]}{n'} \leqq \frac{m}{n} < \frac{m'}{n' - \nu}$$

ist,

$$\varpi(x) = \lim \frac{m}{n} = \lim \frac{m'}{n'} = l.$$

278. Theorem IX (zweites Theorem von Weierstraß). Jede Funktion, die in einem endlichen Intervall stetig ist, hat in diesem Intervall ein Minimum und ein Maximum.

Das Theorem VII sagt uns, daß die Funktion in dem Intervall (a, b), in welchem sie stetig ist, endlich ist. Also existiert auf Grund des Theorems I in (a, b) eine untere Grenze λ. Wenn wir annehmen, daß diese nicht ein Wert von $f(x)$ in dem genannten Intervall ist, so ist die Funktion

$$\varphi(x) = \frac{1}{f(x) - \lambda}$$

in dem ganzen Intervall (a, b) definiert und als Quotient von zwei stetigen Funktionen stetig. Sie ist aber nicht endlich. Ist nämlich l beliebig groß gegeben, so kann man immer einen Wert von $f(x)$ finden, der kleiner ist als eine beliebige Zahl, welche λ übertrifft, und insbesondere kleiner als $\lambda + \frac{1}{l}\cdot$ Dann ist klar, daß man für diesen Wert von x hat $\varphi(x) > l$. Aus Theorem VII wissen wir aber, daß es in einem endlichen Intervalle keine stetige Funktion gibt, die in demselben Intervalle nicht auch endlich ist. Es ist also absurd anzunehmen, daß λ nicht ein Wert von $f(x)$ in (a, b) ist, d. h. es muß sicher in (a, b) wenigstens eine Zahl ξ existieren derart, daß $f(\xi) = \lambda$ ist. Mithin ist λ das Minimum der Funktion. In derselben Weise beweist man die Existenz des Maximums. Wenn daher eine Funktion in einem gegebenen Intervalle die untere Grenze oder die obere Grenze nicht erreicht, so ist das für sie ein sicheres Kennzeichen der Unstetigkeit in diesem Intervalle.

279. Theorem X (Theorem von Cantor). Wenn eine Funktion in einem endlichen Intervalle stetig ist, so kann man zu jeder positiven Zahl ε, die so klein ist als man will, eine Zahl h bestimmen derart, daß in jedem Intervall von der Größe h, welches in dem gegebenen Intervall enthalten ist, die Oszillation der Funktion kleiner ist als ε.

Unter der Oszillation einer Funktion in einem Intervall versteht man die Differenz zwischen ihrer oberen und ihrer unteren Grenze in diesem Intervall. Wenn also die Funktion stetig ist, so ist die Oszillation der Exzeß des Maximums über das Minimum. Dies vorausgeschickt gestattet uns auf Grund des Theorems V die Stetigkeit von $f(x)$, wenn $\varepsilon > 0$ beliebig klein gegeben ist, um jeden Wert von x, der dem betrachteten Intervalle angehört, ein solches Intervall $(x - h, x + h)$ zu konstruieren, daß für jedes in demselben enthaltene Wertepaar x', x''

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \tag{4}$$

ist. Aber für bestimmte Werte von ε und von x gibt es unendlich viele Werte, die man h erteilen kann; denn kennt man einen solchen, so genügt jede positive Zahl, die kleiner ist als jener bekannte Wert, a fortiori denselben Bedingungen. Es können jedoch die unendlich vielen Werte von h, welche zu bestimmten Werten von ε und von x gehören, nicht beliebig groß sein, schon deshalb, weil das betrachtete Intervall endlich ist. Sie haben daher eine obere Grenze. Diese Grenze werden wir von jetzt an mit h bezeichnen. Auf diese Weise entspricht bei gegebenem ε jeder Zahl x eine bestimmte Zahl h derart, daß für jedes Paar von Zahlen x' und x'', die größer sind als $x - h$ und kleiner als $x + h$, die Ungleichung (4) besteht. Hiermit ist eine Funktion $h(x)$ definiert, die in dem ganzen Intervall nur positive Werte annimmt. Diese Funktion hat folglich eine untere Grenze λ, die positiv oder vielleicht null ist, und auf Grund des ersten Theorems von Weierstraß gibt es in dem betrachteten Intervall wenigstens eine Zahl ξ, in deren Umgebung die untere Grenze von $h(x)$ immer λ ist. Wir wollen nun beweisen, daß λ nicht null sein kann. Wir setzen $h(\xi) = h_0$ und betrachten einen Wert von x, der dem Intervall $(\xi - \frac{1}{2}h_0, \xi + \frac{1}{2}h_0)$ angehört. Jedes Paar von Zahlen x' und x'', die in $(x - \frac{1}{2}h_0, x + \frac{1}{2}h_0)$ gewählt werden, gehört auch dem Intervall $(\xi - h_0, \xi + h_0)$ an und genügt folglich der Bedingung (4). Mithin sind die Werte, welche die Funktion $h(x)$ in $(\xi - \frac{1}{2}h_0, \xi + \frac{1}{2}h_0)$ hat, nicht kleiner als $\frac{1}{2}h_0$, und es ist also $\lambda \geq \frac{1}{2}h_0$. Folglich ist auch in dem ganzen ursprünglichen Intervall $h(x)$ niemals kleiner als $\frac{1}{2}h_0$. Daraus folgt sofort, daß bei gegebenem ε die Bedingung (4) erfüllt ist, wie man auch in dem gegebenen Intervall das Zahlenpaar x', x'' wählen mag, vorausgesetzt, daß $|x' - x''| < h_0$ ist. Bemerken wir schließlich noch, daß in der Formulierung des Theorems anstatt von den unendlich vielen Differenzen zu reden, die auf der linken Seite von (4) auftreten, nur von der Oszillation gesprochen wird, d. h. von der größten Differenz, weil es genügt diese kleiner als ε zu machen, damit alle andern es auch werden.

280. Für das obige Theorem läßt sich ein anderer Beweis führen, der die Benutzung des ersten Weierstraßschen Theorems vermeidet. Wir wollen an dem Punkte einsetzen, wo wir dazu gelangt waren, einer gegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ entsprechend die Funktion $h(x)$ zu definieren. In dem Intervall $(x - h(x), x + h(x))$ wähle man eine beliebige Zahl $x + l$ und bemerke, daß die Bedingung (4) in jedem Teil des Intervalles erfüllt ist, folglich auch in demjenigen Intervall, welches seine Mitte in $x + l$ hat, während eine seiner Grenzen mit der zu $x + l$ nächst benachbarten Grenze des ersten Intervalls zusammenfällt. Daraus folgt $h(x + l) \geqq h(x) \mp l$, je nachdem l positiv oder negativ ist. Dagegen trifft dies nicht immer zu, wenn man die von $x + l$ am weitesten entfernte Grenze wählt. Ferner ist klar, daß, wenn man ein noch größeres Intervall betrachtet, welches immer von $x + l$ halbiert wird, die Formel (4) zu gelten aufhört, und zwar auf Grund der Definition von $h(x)$. Daraus folgt $h(x + l) \leqq h(x) \pm l$, je nachdem l positiv oder negativ ist. Es ist also in allen Fällen

$$|h(x + l) - h(x)| \leqq |l|, \quad \lim_{l=0} h(x + l) = h(x),$$

d. h. die Funktion $h(x)$ ist stetig. Nun besagt aber das zweite Theorem von Weierstraß die Existenz eines Minimums von $h(x)$, und dieses Minimum λ ist positiv, da es alle Werte von $h(x)$ sind. Jetzt ist klar, daß das Intervall, welches in der Formulierung des Cantorschen Theorems vorkommt, gerade 2λ ist.

Theorie der Derivierten.

Die Derivation.

281. Definitionen. Wenn eine Zahl z aus einem Größenzustand in einen andern übergeht, so pflegt man den (positiven, negativen oder verschwindenden) Zuwachs, den sie erfährt, mit δz zu bezeichnen.

Jedem beliebigen Zuwachs δx der unabhängigen Veränderlichen entspricht ein bestimmter Zuwachs δy der Funktion $y = f(x)$. Es ist nämlich, sobald x fixiert ist,

$$\delta y = f(x+h) - f(x), \text{ wenn } \delta x = h.$$

Das Verhältnis

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

heißt das rechtsseitige oder linksseitige Zuwachsverhältnis, je nachdem h positiv oder negativ ist. Wenn bei der Funktion y diese Zuwachsverhältnisse mit nach Null konvergierendem h nach bestimmten Grenzwerten konvergieren, so sind dieselben Funktionen von x, welche man als die rechtsseitige Derivierte und die linksseitige Derivierte bezeichnet. Die beiden Derivierten können zusammenfallen, und in diesem Falle sagt man, die Funktion y habe eine einzige Derivierte, welche man mit $f'(x)$ oder kürzer mit y' bezeichnet. Die Funktionen, welche für gewöhnlich betrachtet werden, haben eine einzige Derivierte.

282. **Beispiele.** a) Die Derivierte einer Konstanten ist null, da man, wenn y konstant ist, immer $\delta y = 0$ hat, welches auch der Wert von x sein mag. Also ist $y' = 0$. Die Derivierte der unabhängigen Veränderlichen ist die Einheit, da, wenn $y = x$ ist, $\delta y = \delta x$ wird. Also ist $y' = 1$.

b) Um sich zu überzeugen, daß die rechtsseitige und die linksseitige Derivierte einer Funktion für einen und denselben Wert der unabhängigen Veränderlichen verschiedene Werte haben können, betrachte man die Funktion $y = f(x)$, welche für $x = 0$ null ist und für $x \gtrless 0$ durch $x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ ausgedrückt wird. Da

$$f(0) = 0, \quad f(h) = h \operatorname{arctg} \frac{1}{h}, \quad \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(h) - f(0)}{h} = \operatorname{arctg} \frac{1}{h}$$

ist und man hat

$$\lim_{h=+0} \operatorname{arctg} \frac{1}{h} = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{h=-0} \operatorname{arctg} \frac{1}{h} = -\frac{\pi}{2},$$

so sieht man, daß für $x = 0$ bei der betrachteten Funktion die rechtsseitige Derivierte gleich $\frac{\pi}{2}$ und die linksseitige Derivierte gleich $-\frac{\pi}{2}$ ist.

c) Ebenso hat man bei der Funktion, die für $x = 0$ den Wert 0 hat und für $x \gtrless 0$ durch $\dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ ausgedrückt wird,

$$f(0) = 0, \quad f(h) = \frac{h}{1 + e^{\frac{1}{h}}}, \quad \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{h}}}.$$

Je nachdem nun h von rechts oder von links nach Null konvergiert, wächst $e^{\frac{1}{h}}$ über alle Grenzen oder konvergiert es nach Null. Mithin ist

$$\lim_{h=+0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{h}}} = 0, \qquad \lim_{h=-0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{h}}} = 1,$$

d. h. die Funktion hat für $x = 0$ eine rechtsseitige Derivierte, die gleich Null ist, und eine linksseitige Derivierte, die gleich der Einheit ist.

d) Ein anderes Beispiel wird uns geliefert (vgl. § 272, e) von der Funktion $y = \varphi(x - [x])$ unter der Voraussetzung, daß $\varphi(x)$ für $x = 0$ die rechtsseitige Derivierte α zuläßt, für $x = 1$ die linksseitige Derivierte β, und daß $\alpha \gtrless \beta$ und $\varphi(0) = \varphi(1)$ ist. Man sieht sofort, daß, wenn man x einen ganzzahligen Wert erteilt,

$$\lim_{\delta x=+0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{h=+0} \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} = \alpha, \quad \lim_{\delta x=-0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{h=-0} \frac{\varphi(1+h) - \varphi(1)}{h} = \beta$$

ist. Die Funktion hat daher für jeden ganzzahligen Wert der Veränderlichen eine rechtsseitige und eine linksseitige Derivierte, die voneinander verschieden sind. Man kann z. B. $\varphi(x) = \sin \pi x$ wählen, nachdem man bemerkt hat, daß (§ 270, a)

$$\alpha = \lim_{h=0} \frac{\sin \pi h - \sin 0}{h} = \pi, \quad \beta = \lim_{h=0} \frac{\sin(\pi + \pi h) - \sin \pi}{h} = -\pi$$

ist.

e) Aber die Derivierte kann auch nicht existieren oder nur auf einer Seite von x existieren. Z. B. hat die Funktion $y = \varpi(x)$, deren Definition (§ 254, f) dadurch vervollständigt sein möge, daß man, wenn $\varpi(x)$ nicht existiert, die Werte von y beliebig (zwischen 0 und 1) vorschreibt, keine Derivierte für jeden Wert von x; denn (§ 277, c), wenn δx nach Null konvergiert, so oszilliert δy unaufhörlich zwischen -1 und $+1$, sodaß das Zuwachsverhältnis, weit entfernt nach einem Grenzwert zu konvergieren, unendlich oft alle möglichen Werte annimmt. In analoger Weise verhält sich die Funktion, welche die Werte 0 und 1 hat, je nachdem x rational oder irrational ist; denn δy kann nur die Werte 0, 1, -1 annehmen. Die Funktion $x - [x]$ hat eine Derivierte gleich der Einheit für jeden Wert von x, außer links von den ganzzahligen Werten, wo man für $\delta x = h < 0$ hat $\delta y = 1 + h$, sodaß das Zuwachsverhältnis nach $-\infty$ konvergiert. In diesen Fällen liegt die Nichtexistenz der Derivierten einzig und allein an der Unstetigkeit der Funktion, da es unmöglich ist, daß die Derivierte existiert an einer Stelle, wo die Funktion unstetig ist. In der Tat, damit $\frac{\delta y}{\delta x}$ nach einem endlichen Grenzwert konvergieren kann, wenn δx nach Null konvergiert, muß auch δy nach Null konvergieren, d. h. y stetig sein. Also ist die Stetigkeit der Funktion eine notwendige Bedingung für die Existenz der Derivierten.

f) Die Stetigkeit ist nicht hinreichend für die Existenz der Derivierten. So z. B. ist die Funktion $\sqrt{x}$ stetig für $x \geqq 0$, und doch hat man

$$\lim_{h=+0} \frac{\sqrt{h}-\sqrt{0}}{h} = \infty.$$

Im folgenden werden wir gelegentlich sagen, die Derivierte von $\sqrt{x}$ für $x = 0$ sei unendlich; aber hiermit meint man bei den geometrischen Anwendungen oft, nicht daß der Grenzwert des Zuwachsverhältnisses unendlich ist, sondern daß die für $x > 0$ berechnete Derivierte unbegrenzt zunimmt, wenn x nach Null konvergiert. Faktisch ist nun für $x > 0$

$$\lim_{h=0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h=0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \lim_{x=+0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty.$$

Es ist aber klar, daß man keineswegs dieselbe Bedeutung der Aussage beilegen könnte, daß für ein ganzzahliges x die linksseitige Derivierte von $x - [x]$ gleich $-\infty$ ist. Übrigens ist es leicht, stetige Funktionen zu finden, bei welchen das Zuwachsverhältnis überhaupt keinen endlichen oder unendlichen Grenzwert hat. Es fehlt z. B. die Derivierte bei der Funktion $y = x\left[\frac{1}{x}\right]$, welche für $x = 0$ stetig ist; denn man hat

$$f(0) = 1, \quad f(h) = h\left[\frac{1}{h}\right], \quad \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(h)-f(0)}{h} = \left[\frac{1}{h}\right] - \frac{1}{h}$$

und sieht, daß, wenn h nach Null konvergiert, das Zuwachsverhältnis unaufhörlich zwischen 0 und -1, dieses ausgeschlossen, oszilliert.

g) Gegen das letzte Beispiel könnte man einwenden, daß die betrachtete Funktion allerdings für $x = 0$ stetig, aber in der Umgebung von Null unendlich oft unstetig ist. Um sich jedoch zu überzeugen, daß hierauf das Fehlen der Derivierten nicht zurückzuführen ist, braucht man nur die Funktion zu betrachten, welche für $x = 0$ null ist und für $x \gtrless 0$ durch $x \sin \frac{1}{x}$ ausgedrückt wird. Sie ist immer stetig und hat für $x = 0$ keine Derivierte, da

$$f(0) = 0, \quad f(h) = h \sin \frac{1}{h}, \quad \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(h)-f(0)}{h} = \sin \frac{1}{h}$$

ist und der Grenzwert von $\sin \frac{1}{h}$ für ein nach Null konvergierendes h nicht existiert.

h) Ein anderes bemerkenswertes Beispiel liefert uns die Funktion $\varphi(x - [x])$, die wir bereits betrachtet haben. Setzt man $\varphi(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$ für $x \gtrless 0$ und $\varphi(0) = 0$, so ist auch $\varphi(1) = 0$, $\varphi'(0)$ existiert nicht, und außerdem ist

$$\varphi'(1) = \lim_{h=0} \frac{1+h}{h} \sin \frac{\pi}{1+h} = \lim_{h=0} \frac{1+h}{h} \sin \frac{\pi h}{1+h} = \lim_{\alpha=0} \frac{\sin \pi\alpha}{\alpha} = \pi.$$

Also hat die stetige Funktion, welche im allgemeinen durch

$$(x - [x]) \sin \frac{\pi}{x - [x]}$$

dargestellt wird, keine rechtsseitige Derivierte für alle ganzzahligen Werte von x, während sie eine linksseitige Derivierte gleich π zuläßt. Nimmt man dagegen $\varphi(x) = x - \sqrt{x}$, so findet man, daß die stetige Funktion $[x] + \sqrt{x - [x]}$ für alle ganzzahligen Werte eine unendliche rechtsseitige Derivierte und eine linksseitige Derivierte gleich $\frac{1}{2}$ besitzt. Von dieser Funktion ausgehend gelang es Schwarz eine andere zu konstruieren, bei welcher sich in jedem Intervall unendlich oft analoge Umstände bieten. Endlich verdankt man Weierstraß ein Beispiel[1]), welches wir weiter unten mitteilen werden, für eine stetige Funktion, die für jeden Wert von x ohne Derivierte ist.

283. Derivation der inversen Funktionen. Wir betrachten die Funktion $y = f(x)$, welche für $x = a$ und in der Umgebung von a stetig ist. Wir nehmen ferner an, daß sich wenigstens für diese Werte von x die inverse Funktion $x = g(y)$ definieren läßt, und wollen beweisen, daß die Derivierte der Funktion g existiert, wenn die Derivierte der Funktion f existiert und von Null verschieden ist. Aus der Stetigkeit von y für $x = a$ folgt, daß δy oder $f(a + \delta x) - f(a)$ gleichzeitig mit δx nach Null konvergiert; und zur Stetigkeit von y in der Umgebung von a gehört überdies, daß δy eine stetige Funktion von δx ist und folglich (§ 276) alle Werte annimmt, die einem gewissen Intervall von geeigneter Kleinheit angehören, welches die Null einschließt. Der Wert Null ist aber ausgenommen. Der Grund dieser Ausschließung liegt darin, daß, wenn einem Wert h von δx entsprechend $\delta y = 0$ wäre, zu einem und demselben Wert $f(a)$ von y die Werte a und $a + h$ von x gehören würden, so daß man nicht sagen könnte, x sei eine Funktion von y. Nur infolge der vorstehenden Überlegungen ist man berechtigt $\frac{\delta x}{\delta y}$ als das Zuwachsverhältnis der Funktion $x = g(y)$ zu betrachten. Nimmt man nun an, daß, wenn δx nach Null konvergiert, $\frac{\delta y}{\delta x}$ nach einem Grenzwert $y' \gtrless 0$ konvergiert, so sieht man sofort (§ 263), daß der Grenzwert von

$$\frac{\delta x}{\delta y} = \frac{1}{\frac{\delta y}{\delta x}}$$

existiert und gleich $\frac{1}{y'}$ ist. Ausführlicher ausgedrückt: Kennt man die Derivierte $f'(x) \gtrless 0$ von $f(x)$, so ist diejenige der inversen Funktion $g(x)$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}. \tag{1}$$

Die vorstehenden Betrachtungen gelten für jede Seite des gegebenen

---

1) Allgemeinere Beispiele für analoge Funktionen findet man in den „Fondamenti" von Dini (p. 147).

Wertes a besonders. Wenn wir z. B. nur die Existenz der rechtsseitigen Derivierten von y zulassen, so kann man, da δy schließlich (§ 263) das Vorzeichen dieser Derivierten annimmt und bewahrt, bei der inversen Funktion die Existenz einer rechtsseitigen bezw. linksseitigen Derivierten für den Wert $f(a)$ der unabhängigen Veränderlichen behaupten, je nachdem jenes Vorzeichen $+$ oder $-$ ist. Ist dagegen die betrachtete Derivierte von y die linksseitige, so kann man, je nachdem dieselbe positiv oder negativ ist, bei der inversen Funktion die Existenz einer linksseitigen bezw. rechtsseitigen Derivierten behaupten; denn in diesem Falle nimmt δy schließlich das entgegengesetzte Vorzeichen zu demjenigen der Derivierten von y an und bewahrt es. Es folgt aus dem Obigen, daß, wenn y nur eine einzige Derivierte nach x hat, dies auch von x in Bezug auf y gelten wird.

284. Derivation der Funktionen von Funktionen. Ist y nicht als Funktion von x, sondern als Funktion einer andern Funktion u gegeben, ist also $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, und setzt man überdies voraus, daß die Derivierten $f'(x)$ und $\varphi'(x)$ existieren, so ist es leicht zu zeigen, daß die Derivierte von y existiert und gleich dem Produkt von $f'(u)$ und $\varphi'(x)$ ist. In der Tat besteht die Identität

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta y}{\delta u} \cdot \frac{\delta u}{\delta x},$$

wo $\frac{\delta u}{\delta x}$ der Voraussetzung gemäß nach einem Grenzwert u' konvergiert. Dies erfordert aber, daß δu gleichzeitig mit δx nach Null konvergiert; und da die Funktion u, weil sie eine Derivierte hat, notwendig auch in der Umgebung des betrachteten Wertes von x stetig ist, so nimmt überdies δu alle Werte an, die einem gewissen Intervall angehören, welches die Null einschließt. Wenn nun von einem Werte von δx an, der absolut genommen genügend klein ist, δu beständig von Null verschieden bleibt (wie es immer der Fall ist, wenn $u' \gtrless 0$ ist), so ist man berechtigt $\frac{\delta y}{\delta u}$ als das Zuwachsverhältnis von y in Bezug auf u zu betrachten und zu sagen, daß dieses Verhältnis nach $f'(u)$ konvergiert, welches nach der Voraussetzung existiert. Dann folgt aus der obigen Identität, daß auch $\frac{\delta y}{\delta x}$ nach einem Grenzwert y' konvergiert, der gleich dem Produkt von $f'(u)$ und u' ist. Es bleibt zu zeigen, daß der ausgesprochene Satz auch dann gilt, wenn es in der Umgebung der Null eine Menge von Werten $h, h', \ldots$ gibt derart, daß $\delta u = 0$ wird, sobald δx gleich einem dieser Werte wird. In diesem Falle kann die Derivierte u', welche nach der Voraussetzung existiert, nicht von Null verschieden sein. Man bemerke jedoch, daß, wenn man δx unter Vermeidung der Werte $h, h', \ldots$ nach Null konvergieren läßt, die obige Schlußweise auch noch gilt und daher das Verhältnis $\frac{\delta y}{\delta x}$ nach dem Grenzwert $f'(u) \cdot 0 = 0$ konvergiert. Wenn dagegen δx nach Null konvergiert, indem es gerade die Werte $h, h', \ldots$ annimmt, so ist das genannte Verhältnis gleich Null, da wegen $\delta u = 0$ auch $\delta y = f(u + \delta u) - f(u)$ gleich Null ist. Es existiert also die Derivierte y', der Grenzwert von $\frac{\delta y}{\delta x}$ für nach Null konvergierendes δx, und sie ist null wie das Produkt von $f(u)$ und u', so daß man also in allen Fällen schreiben kann $y' = f'(u) \cdot u'$. Man bemerke hier, daß diese Gleichung die Gleichung (1) als Spezialfall enthält, da man (§ 253) für $u = g(x)$ hat $y = x$ und $y' = 1$. Wenn allgemeiner

$$y = f(u), \quad u = \varphi(v), \quad v = \psi(w), \quad \ldots$$

ist, so hat man $y' = f'(u)\varphi'(v)\psi'(w)\ldots$, vorausgesetzt, daß die Funktionen u, v, w in endlicher Anzahl auftreten. Wir sehen also, daß die Derivierte einer Funktion von Funktionen gleich dem Produkt der Derivierten dieser Funktionen ist, wobei jede Derivierte nach derjenigen Veränderlichen zu nehmen ist, von welcher die Funktion unmittelbar abhängt.

285. Derivierte einer Summe. Es sei $y = u + v + w + \cdots$, wo $u, v, w, \ldots$ Funktionen von x sind, die Derivierte besitzen, und man erteile x den Zuwachs δx, wodurch sich bei $y, u, v, \ldots$ die Inkremente $\delta y, \delta u, \delta v, \ldots$ ergeben. Da immer

$$y + \delta y = u + \delta u + v + \delta v + w + \delta w + \cdots$$

ist, so folgt

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta x} + \frac{\delta w}{\delta x} + \cdots,$$

mithin, wenn man zu den Grenzwerten für nach Null konvergierendes δx übergeht, $y' = u' + v' + w' + \cdots$. Also ist die Derivierte einer Summe gleich der Summe der Derivierten der Summanden, vorausgesetzt, daß diese in endlicher Anzahl auftreten.

286. Derivierte eines Produktes. Wenn $y = uv$ ist, so ist

$$y + \delta y = (u + \delta u)(v + \delta v) = uv + u\delta v + v\delta u + \delta u \cdot \delta v,$$

mithin nacheinander

$$\frac{\delta y}{\delta x} = u\frac{\delta v}{\delta x} + v\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta x}\delta v, \quad y' = uv' + vu'.$$

Daraus folgt, daß die Derivierte eines Produktes gleich der Summe der Produkte ist, die man durch Multiplikation der Derivierten jedes Faktors mit dem Produkt der andern Faktoren erhält. In der Tat, wenn man annimmt, daß das Theorem, welches wir für zwei Faktoren bewiesen haben, für $n - 1$ Faktoren gilt, so braucht man im Falle eines Produktes $y = uvw \cdots$ von n Faktoren nur zu schreiben

$$y' = u'(vw \cdots) + u(vw \cdots)' = u'vw \cdots + uv'w \cdots + uvw' \cdots + \cdots,$$

um sich zu überzeugen, daß es allgemein gültig ist.

287. **Derivierte eines Quotienten.** Läßt man die Existenz der Derivierten von u und v zu, so existiert auch die Derivierte des Quotienten $y = \frac{u}{v}$, da man wegen

$$\delta y = \frac{u + \delta u}{v + \delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\,\delta u - u\,\delta v}{v\,(v + \delta v)}$$

hat

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{v\dfrac{\delta u}{\delta x} - u\dfrac{\delta v}{\delta x}}{v^2\left(1 + \dfrac{\delta v}{v}\right)}, \quad y' = \frac{v u' - u v'}{v^2}.$$

Insbesondere ist, wenn a eine Konstante bedeutet, für $y = \frac{a}{u}$

$$y' = -\frac{a u'}{u^2}.$$

288. **Derivierte einer Potenz.** Es sei $y = x^n$ und n eine ganze und positive Zahl. Aus der Regel für die Derivation eines Produktes ergibt sich, wenn man $y = x \cdot x \cdots x$ schreibt, sofort $y' = nx^{n-1}$. Wir wollen beweisen, daß diese Formel für jeden rationalen Wert von n besteht. Nehmen wir zunächst an, daß n die Form $\frac{1}{m}$ hat, wo m ganz und positiv ist. Da die Derivierte von x^m existiert, so existiert nach dem in § 283 Gesagten auch die Derivierte der inversen Funktion $y = x^{\frac{1}{m}}$. Nachdem wir so die Existenz von y' konstatiert haben, sind wir berechtigt die Gleichung $y^m = x$ zu derivieren, indem wir die Regel des § 284 anwenden. Es ergibt sich

$$m y^{m-1} \cdot y' = 1 \quad \text{oder} \quad y' = \frac{1}{m} y^{1-m} = n y^{m(n-1)} = n x^{n-1}.$$

Wenn ferner n der Quotient von zwei positiven ganzen Zahlen p und q ist, so hat man bei Anwendung derselben Regel und unter Beachtung des letzten Resultates

$$y = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p, \quad y' = p\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q} x^{\frac{p-1}{q} + \frac{1}{q} - 1} = n x^{n-1}.$$

Endlich wende man, wenn n einen negativen Wert $-m$ hat, die Regel des vorigen Paragraphen an. Man erhält

$$y = \frac{1}{x^m}, \quad y' = -\frac{m x^{m-1}}{x^{2m}} = -m x^{-m-1} = n x^{n-1}.$$

Ist nunmehr $y = u^n$ gegeben, wo der Exponent n irgend eine positive oder negative rationale Zahl ist, so gibt die Regel des § 284 $y' = n u^{n-1} u'$. Insbesondere ist für $y = \sqrt{u}$

$$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

Um unnütze Rechnungen zu vermeiden ist es auch zweckmäßig sich zu erinnern, daß für $y = \frac{1}{u^n}$

$$y' = -\frac{n u'}{u^{n+1}}$$

ist.

289. **Derivierte von a^x und $\operatorname{Log} x$.** Es sei $y = a^x$. Wenn man x den Zuwachs $\delta x = h$ erteilt, so erhält man

$$\delta y = a^{x+h} - a^x, \quad \frac{\delta y}{\delta x} = a^x \frac{a^h - 1}{h};$$

mithin wird, wenn wir ein früheres Resultat (§ 270, d) heranziehen,

$$y' = a^x \lim_{h=0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \log a.$$

Insbesondere wird, wenn $y = e^x$ ist, $y' = e^x$. Analog hat man für $y = \operatorname{Log} x$

$$\delta y = \operatorname{Log}(x+h) - \operatorname{Log} x, \quad \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{1}{h} \operatorname{Log}\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

und dann (§ 270, b, d)

$$y' = \frac{1}{x} \operatorname{Log} \lim_{h=0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = \frac{M}{x}.$$

Insbesondere wird, wenn $y = \log x$ ist, $y' = \frac{1}{x}$. Die beiden vorstehenden Resultate stehen durch die Formel (1) in Beziehung zueinander, da, wenn $f(x) = a^x$ gesetzt wird, $g(x) = \operatorname{Log} x$ ist. Daraus folgt, daß, wenn man eine der Derivierten, z. B. $f'(x) = a^x \log a$, kennt, die andere durch die Formel (1) gegeben ist:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(\operatorname{Log} x)} = \frac{1}{a^{\operatorname{Log} x} \log a} = \frac{M}{x}.$$

Nunmehr können wir nach dem in § 284 Gesagten behaupten, daß, wenn die Derivierte von u existiert, die Derivierten der Funktionen

$$y = e^u, \quad y = \log u$$

bezüglich sind

$$y' = e^u \cdot u', \quad y' = \frac{u'}{u}.$$

Endlich bemerke man, daß die Kenntnis der Derivierten von e^u

und $\log u$ es erlaubt, die Regel für die Derivation einer Potenz wiederzufinden, und zwar ausgedehnt auf den Fall eines irrationalen Exponenten. In der Tat leitet man aus

$$y = u^n = e^{n \log u} \text{ ab } y' = e^{n \log u} \cdot \frac{n u'}{u} = n u^{n-1} \cdot u'.$$

290. Derivierte der Kreisfunktionen. Es sei $y = \sin x$. Wenn $\delta x = h$, so ist

$$\delta y = \sin(x+h) - \sin x = 2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Also ist (§ 270, a)

$$y' = \lim_{h=0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x.$$

Ist $y = \cos x$, so kann man eine analoge Rechnung anstellen oder auch unter Benutzung der Regel des § 284 schreiben:

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad y' = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.$$

Wenn $y = \operatorname{tg} x$ ist, so erhält man, indem man $\operatorname{tg} x$ als Quotienten von $\sin x$ durch $\cos x$ betrachtet und die Regel des § 287 anwendet,

$$y' = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

oder auch durch direkte Rechnung

$$y' = \lim_{h=0} \frac{\operatorname{tg}(x+h) - \operatorname{tg} x}{h} = \lim \frac{\sin h}{h} \cdot \frac{1}{\cos x \cos(x+h)} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Endlich hat man, wenn

$$y = \sin u, \quad y = \cos u, \quad y = \operatorname{tg} u$$

ist, bezüglich

$$y' = u' \cos u, \quad y' = -u' \sin u, \quad y' = \frac{u'}{\cos^2 u}.$$

291. Derivierte der inversen Kreisfunktionen. Zunächst muß man bemerken, daß die Derivierten dieser Funktionen im allgemeinen existieren, und zwar auf Grund des in § 283 bewiesenen Theorems. Erst dann hat man das Recht, nachdem aus

$$y = \operatorname{arc} \sin x, \quad y = \operatorname{arc} \cos x, \quad y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$$

die Relationen $x = \sin y$, $x = \cos y$, $x = \operatorname{tg} y$ abgeleitet sind, dieselben zu derivieren und zu schreiben

$$1 = y' \cos y, \quad 1 = -y' \sin y, \quad 1 = \frac{y'}{\cos^2 y}$$

und daraus folgende Werte für y' zu entnehmen:

$$\frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}.$$

Man kann auch durch direkte Rechnung vorgehen, was den Vorteil hat, daß man zugleich mit den Ausdrücken für die Derivierten den Beweis für die Existenz dieser Derivierten erhält. Setzt man z. B.

$$y = \operatorname{arc\,tg} x, \quad \delta x = h = \{1 + x(x+h)\}\,\alpha,$$

so hat man, wenn h (und infolgedessen α) nach Null konvergiert,

$$y' = \lim \frac{\operatorname{arc\,tg}(x+h) - \operatorname{arc\,tg} x}{h} = \lim \frac{\operatorname{arc\,tg} \alpha}{\alpha} \cdot \frac{1}{1+x(x+h)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Man beachte, daß im obigen die Wurzel $\sqrt{1-x^2}$ immer positiv genommen ist, da die durch die Symbole $\operatorname{arc\,sin} x$ und $\operatorname{arc\,cos} x$ dargestellten Bogen einen positiven Kosinus bezw. Sinus haben. Die Summe dieser Bogen ist (§ 254, d) konstant, und dies erklärt uns, weshalb ihre Derivierten absolut genommen gleich, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen behaftet sind. Endlich sehen wir, wenn wir zusammenfassen und uns an die Regel des § 284 erinnern, daß man, wenn

$$y = \operatorname{arc\,sin} u, \quad y = \operatorname{arc\,cos} u, \quad y = \operatorname{arc\,tg} u$$

ist, bezüglich hat

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}, \quad y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}, \quad y' = \frac{u'}{1+u^2}.$$

Schließlich wollen wir noch hinzufügen, daß wir bei Heranziehung des Theorems in § 283 stillschweigend die Fälle beiseite gelassen haben, in welchen die Derivierte der Funktion nicht existiert. Z. B. existiert für die Funktion $y = \operatorname{arc\,sin} x$ die Derivierte solange, als nicht $\cos y = 0$, d. h. $x = \pm 1$ ist; für diese Werte von x ist dagegen festzuhalten, daß die Funktion keine Derivierte hat. So ist für $x = 1$ klar, daß die Derivierte von $\operatorname{arc\,sin} x$ nicht existieren kann, weder als rechtsseitige (weil rechts von der Einheit die Funktion nicht existiert) noch auch als linksseitige, weil

$$\lim_{h=0} \frac{\operatorname{arc\,sin}(1-h) - \operatorname{arc\,sin} 1}{-h} = \lim_{h=0} \frac{\operatorname{arc\,cos}(1-h)}{h}$$

$$= \lim_{\alpha=0} \frac{\alpha}{1-\cos\alpha} = \lim_{\alpha=0} \frac{\alpha}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \infty$$

ist. Ähnliches läßt sich für $\operatorname{arc\,cos} x$ bemerken, während die Derivierte von $\operatorname{arc\,tg} x$ immer existiert, da die Derivierte von $\operatorname{tg} x$ nicht verschwinden kann.

292. Übungen. a) Die Derivierte des Polynoms

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

vom Grade n, ist ein Polynom vom Grade $n-1$:

$$y' = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + (n-2)a_2x^{n-3} + \cdots + 2a_{n-2}x + a_{n-1}.$$

Die Derivierte von y', welche man die zweite Derivierte von y zu nennen pflegt, ist

$$y'' = n(n-1)a_0x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_1x^{n-3} + \cdots + 2a_{n-2}.$$

Die successiven Derivierten y''', $y^{\mathrm{IV}}, \ldots$ (die dritte, vierte, ...) sind ebenfalls Polynome, und zwar von den Graden $n-3$, $n-4, \ldots$; die n-te Derivierte ist konstant, und die folgenden sind alle null: $y^{(n)} = n!\,a_0$, $y^{(n+1)} = y^{(n+2)} = \cdots = 0$.

b) Wenn

$$y = x(\log x - 1), \quad \log\cos x, \quad \log\log x, \quad \log\operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad \log\frac{1-\cos kx}{1+\cos kx}$$

ist, so liefert die Anwendung der in den vorigen Paragraphen bewiesenen Regeln und erhaltenen Resultate folgende Werte für die bezüglichen Derivierten:

$$y' = \log x, \quad -\operatorname{tg} x, \quad \frac{1}{x\log x}, \quad \frac{1}{\sin x}, \quad \frac{2k}{\sin kx}.$$

Wenn

$$y = \arccos(1-x) - \sqrt{2x-x^2}, \quad \arccos\frac{a}{x} + \log\left(x + \sqrt{x^2-a^2}\right)$$

ist, so erhält man

$$y' = \sqrt{\frac{x}{2-x}}, \quad \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}.$$

Ebenso findet man für die Funktionen

$$y = \arcsin\frac{\sin a \sin x}{1-\cos a\cos x}, \quad \arccos\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x}, \quad \operatorname{arc\,tg}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

folgendes:

$$y' = \frac{\sin a}{1-\cos a\cos x}, \quad \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos x}, \quad \frac{2}{e^{2x}+e^{-2x}}.$$

c) Diese Berechnungen von Derivierten lassen sich sehr leicht ausführen, indem man, wenn es nötig ist, die Regel für die Derivation einer Summe, eines Produktes oder eines Quotienten anwendet und dann jeden Bestandteil des Resultates nach der Regel für die Derivation einer Funktion von einer Funktion behandelt: dies ist die wichtigste Regel, insofern sie alle Schwierigkeiten, welche die Berechnung der Derivierten eines komplizierten Ausdrucks zu bieten scheint, zu überwinden gestattet, indem man dieselben trennt und sie dann eine nach der anderen in Angriff nimmt. Folgendermaßen verfährt man z. B., um die Derivierte von

$$y = \operatorname{arctg}\left(x - \sqrt{1+x^2}\right)$$

zu berechnen:

$$y' = \frac{1}{1+\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)^2}\left(1 - \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \cdots = \frac{1}{2(1+x^2)}.$$

Dieses Resultat verifiziert man leicht, indem man bemerkt, daß

$$y = \tfrac{1}{2} \operatorname{arctg} x - \tfrac{1}{4}\pi$$

ist. Ebenso schreibt man, um die Derivierte von

$$y = x\sqrt{1+x^2} + \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

zu berechnen,

$$y' = \sqrt{1+x^2} + x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \cdots = 2\sqrt{1+x^2}.$$

d) Sind die Relationen

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad \operatorname{tg}\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

gegeben, so ist daraus leicht abzuleiten

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y' = \frac{\sqrt{1-k^2}}{1+k\cos x},$$

indem man beide Seiten deriviert. Sind ferner die Funktionen

$$y = x^x, \quad y = x^{x^x}, \ldots$$

gegeben, so findet man, indem man die Logarithmen beider Seiten nimmt und deriviert,

$$y' = x^x(1+\log x), \quad y' = x^{x+x^x}\left(\frac{1}{x} + \log x + \log^2 x\right), \ldots$$

Wenn man aber in dieser Weise verfährt, so läßt man die Existenz von y' a priori zu. Um diesen Einwand zu vermeiden, muß man vorher zeigen, daß die Derivierte existiert. Dies ergibt sich bei dem vorletzten Funktionenpaar, indem man bemerkt, daß y sich auf die Form $\operatorname{arctg} u$ bringen läßt. Für $y = x^x$ kann man auch schreiben $y = e^{x\log x}$ u. s. f.

e) Die n-te Derivierte von $y = x^m \log x$ ist

$$y^{(n)} = m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}\left(\log x + \frac{1}{m} + \frac{1}{m-1} + \cdots + \frac{1}{m-n+1}\right).$$

Insbesondere ist

$$y^{(m)} = m!\left(\log x + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m}\right), \quad y^{(m+1)} = \frac{m!}{x}.$$

Ebenso findet man durch successive Derivationen, daß die n-ten Derivierten der Funktionen

$$y = e^{x\cos a}\cos(x\sin a), \quad y = e^{x\cos a}\sin(x\sin a)$$

bezüglich lauten

$$y^{(n)} = e^{x\cos a}\cos(na + x\sin a), \quad y^{(n)} = e^{x\cos a}\sin(na + x\sin a).$$

Weniger leicht ist die Berechnung der n-ten Derivierten von $y = \operatorname{arctg} x$, welche sich jedoch als Funktion von y selbst ausdrücken läßt, indem man $(n-1)$-mal nacheinander $y' = \cos^2 y$ deriviert:

$$y^{(n)} = (n-1)!\cos^n y \cdot \sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right).$$

Eigenschaften der Derivierten.

293. Bevor wir weiter gehen, wollen wir eine kurze Digression über einen für die Anwendungen der Mathematik äußerst wichtigen Gegenstand machen. Schon beim Beweis der grundlegenden Sätze in der Theorie der Funktionen ist es nützlich sich einer geometrischen Darstellung der unabhängigen Veränderlichen zu bedienen. Man erreicht dieselbe, indem man die Werte der Veränderlichen und die Punkte einer Geraden aufeinander bezieht, wie es in der analytischen Geometrie zu geschehen pflegt. Dadurch gewinnen die Beweise, obwohl sie ihrem Wesen nach ungeändert bleiben (da man sich wohl hüten muß sie in irgend einer Weise auf geometrische Begriffe zu gründen), eine klare und wirkungsvolle Fassung und lassen sich mit geringerem sprachlichem Aufwand führen. Anstatt von einem Werte zu reden, den man der Veränderlichen erteilt, nennt man den Punkt, welcher das Bild dieses Wertes ist; und jedes Intervall (a, b) findet auf diese Weise seine Darstellung in einer geraden Strecke, welche von den Punkten a und b begrenzt wird, d. h. von den Punkten, deren in einem bestimmten Sinne gerechnete Abstände vom Anfangspunkt durch die Zahlen a und b gemessen werden. Um nun eine Funktion y darzustellen, braucht man nur jedes Paar entsprechender Werte von x und y als das System der (rechtwinkligen) cartesischen Koordinaten eines Punktes in der Ebene zu betrachten: die Gleichung $y = f(x)$ stellt dann eine Linie dar, mit deren Hilfe man sich leicht von den wichtigsten Eigenschaften von Funktionen und Derivierten Rechenschaft geben kann. Vor allen Dingen ist es aber nötig, die geometrische Bedeutung der Derivierten zu kennen. Man betrachte die Tangente der Kurve im Punkte M, d. h. die Grenzlage der Sekante MM', wenn M' die Kurve durchlaufend nach M hinrückt. S und T mögen die Punkte heißen, in welchen die Sekante und die Tangente die x-Achse treffen, P und P' seien die Fußpunkte der Lote, die von M und M' auf diese Achse gefällt sind, und man bezeichne mit H denjenigen Punkt, welcher die Abscisse von M' und die Ordinate von M hat. x und y seien fixiert als die Koordinaten von M, $x + \delta x$ und $y + \delta y$ seien diejenigen von M', und man beachte, daß wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke MHM', SPM

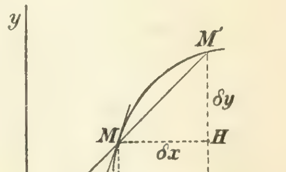

Fig. 4.

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{M'H}{MH} = \frac{MP}{SP}$$

ist. Wenn δx und δy nach Null konvergieren, rückt M' nach M

hin. P bleibt fest wie M, und S rückt nach T hin. Es ist daher

$$y' = \lim \frac{\delta y}{\delta x} = \lim \frac{MP}{SP} = \frac{MP}{TP} = \operatorname{tg} \widehat{MTx},$$

d. h. die Derivierte der Ordinate einer Kurve nach der Abscisse stellt den Neigungskoeffizienten der Kurventangente dar. Wenn die unabhängige Veränderliche die Zeit ist, so stellt dieser Koeffizient eine Geschwindigkeit dar oder das Maß der mehr oder weniger großen Schnelligkeit, mit welcher die Funktion zu wachsen oder abzunehmen strebt, und gerade in dieser Weise hat sich der Begriff der Derivierten, welcher die Grundlage der Infinitesimalrechnung bildet, zum ersten Male dem Geiste Newtons dargeboten kurz vor dem Jahre 1667[1]).

294. Beispiele. a) Von großem Nutzen ist beim Zeichnen einer Kurve $y = f(x)$ die Kenntnis der Derivierten $f'(x)$ der Ordinate; denn man besitzt hiermit ein Mittel, um die Kurve nach Punkten und nach Tangenten zu konstruieren. Wir wollen uns hier auf einige Beispiele beschränken, die dazu dienen sollen, die Nützlichkeit der graphischen Darstellung zu zeigen, und zwar nicht vom geometrischen Gesichtspunkt, von dem im folgenden ausführlich die Rede sein wird, sondern von demjenigen der Theorie der Funktionen selbst. Wir schicken zwei ganz einfache Übungen voraus, indem wir die Tangenten der Parabel und der gleichseitigen Hyperbel konstruieren, welche durch die Gleichungen

$$y = \frac{x^2}{2a}, \quad y = \frac{a^2}{x}$$

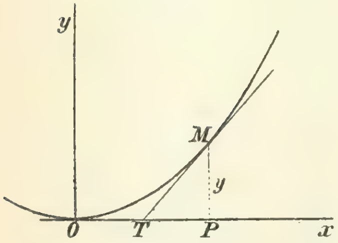

Fig. 5.

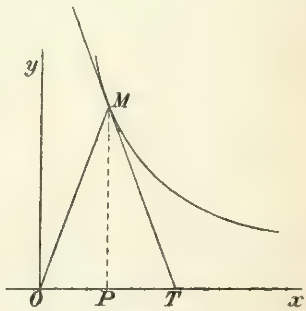

Fig. 6.

dargestellt werden. Aus den Formeln

$$y' = \frac{x}{a} = 2\frac{y}{x}, \quad y' = -\frac{a^2}{x^2} = -\frac{y}{x}$$

leitet man ab $TP = \frac{y}{y'} = \frac{1}{2}x$ bei der ersten Kurve, $PT = -\frac{y}{y'} = x$ bei

1) Siehe Mansion: „Résumé du Cours d'Analyse, etc." p. 194.

der zweiten; und man sieht folgendes: Wenn man den Punkt O, den Scheitel der Parabel oder den Mittelpunkt der Hyperbel, kennt, und P die Projektion eines beliebigen Punktes M der einen oder der andern Kurve bezüglich auf die Scheiteltangente oder auf eine Asymptote ist, so braucht man nur M mit dem Mittelpunkt von OP bezw. mit dem zu O in Bezug auf P symmetrischen Punkte zu verbinden, um die Tangente in M zu erhalten.

b) Die darstellende Linie von $x - [x]$ besteht aus unendlich vielen geradlinigen Abschnitten, deren jeder von einem Punkte der Geraden $y = 0$ mit ganzzahliger Abscisse n ausgeht und in dem Punkte mit der Abscisse $n + 1$ auf der Geraden $y = 1$ endigt. In Wirklichkeit müßten die Punkte auf der zweiten Geraden ausgeschlossen werden; aber es ist gut, zu bemerken, daß vom geometrischen Gesichtspunkt derartige Ausschließungen unnötig sind, und daß man sich im Gegenteil des Begriffs der Stetigkeit bedienen muß, um so wenig wie möglich Punkte und Tangenten auszuschließen. So pflegt man, wenn ein Punkt beim Durchlaufen einer Kurve einem festen Punkte zustrebt, dessen Koordinaten die Gleichung der Kurve nicht erfüllen, trotzdem den festen Punkt als der Kurve angehörend zu betrachten; und man wäre andrerseits mit graphischen Hilfsmitteln auch nicht imstande ihn auszuschließen oder von den andern Punkten zu trennen. Analog verfährt man, wenn in einem Punkte M die Tangente fehlt, während eine Gerade existiert, mit welcher die Tangente in einem andern Punkte M' zusammenzufallen strebt, wenn dieser nach M hinrückt. Man betrachtet dann diese Gerade als die Tangente in M. Derartige Vereinbarungen dienen dazu, mancherlei Zweifeln vorzubeugen, die sich uns bei den geometrischen Anwendungen zu häufig darbieten würden, wenn wir uns an die strenge Interpretation der bisher auseinandergesetzten Prinzipien halten wollten.

c) Eine andere interessante Linie, welche wieder aus den Abschnitten besteht, die zwei Geraden auf unendlich vielen in einem Punkte zusammenlaufenden Geraden bestimmen, ist die zur Darstellung der Funktion $x\left[\frac{1}{x}\right]$ dienende Kurve. Wenn x größer als $\frac{1}{n+1}$, aber nicht größer als $\frac{1}{n}$ ist, so hat man $y = nx$, die Gleichung einer Geraden, auf welcher die Geraden $y = 1 - x$ und $y = 1$, die Punkte der ersten ausgeschlossen, einen Abschnitt bestimmen. Der Punkt A der y-Achse, welcher die Ordinate 1 hat, kann als zur Kurve gehörig betrachtet werden; es ist aber graphisch unmöglich, dieselbe in seiner Umgebung zu zeichnen, obwohl in A die Ordinate stetig ist.

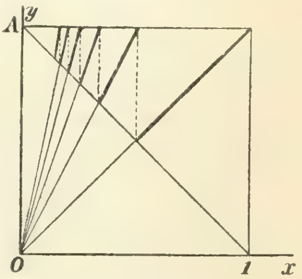

Fig. 7.

d) Bei dem vorstehenden Beispiel ist die betrachtete Funktion in A stetig und unstetig in der Umgebung von A. Dagegen ist die durch die Gleichung $y = f(x)$ dargestellte Kurve, wo $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$, $f(0) = 0$, also die Funktion $f(x)$ für alle Werte von x stetig ist (§ 272, a), trotzdem in der Umgebung des Anfangspunktes nicht konstruierbar. Das Gleiche läßt sich von der stetigen Funktion

$$f(f(x)) = x \sin\frac{1}{x} \sin\frac{1}{x\sin\frac{1}{x}}$$

sagen, sogar in der Umgebung unendlich vieler Punkte des Intervalls $\left(-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right)$, nämlich $\pm\frac{1}{\pi}, \pm\frac{1}{2\pi}, \pm\frac{1}{3\pi}, \cdots$ Diese Punkte verdichten sich immer mehr bei den Funktionen $f(f(f(x)))$, $f(f(f(f(x))))$ u. s. w., da jedesmal neue Punkte auftreten, außer den Punkten, in deren Umgebung die vorangehende Funktion nicht darstellbar ist, nämlich auch diejenigen, in welchen diese Funktion verschwindet. Man darf jedoch nicht glauben, daß die Nicht-Darstellbarkeit einzig und allein von dem Fehlen einer Derivierten herrührt, d. h. von dem Fehlen einer bestimmten Tangente in dem betrachteten Punkte; denn die Kurve $y = x^2 \sin\frac{1}{x}$ berührt im Anfangspunkte die x-Achse, es ist aber materiell unmöglich, sie in der Umgebung dieses Punktes zu zeichnen.

e) Es gibt übrigens Funktionen, bei welchen es unmöglich ist überhaupt einen noch so kleinen Strich von der darstellenden Linie zu zeichnen, obwohl sich von derselben beliebig viele Punkte angeben lassen, die auch so nahe aneinander liegen als man will. So ist es z. B. bei der Funktion $\varpi(x)$; denn (§ 277, b) auf jeden zur x-Achse parallelen Geradenabschnitt, der in dem durch die Einschränkung $0 \leqq y \leqq 1$ definierten Ebenenstreifen enthalten und beliebig klein ist, fallen unendlich viele Punkte der darstellenden Linie, welche den ganzen Streifen zu bedecken scheint. Und wenn man in diesem Falle die Nicht-Darstellbarkeit durch eine Linie im gewöhnlichen Sinne des Wortes auf die vollständige Unstetigkeit der Funktion zurückführen kann, so läßt sich dies von der Weierstraßschen Funktion keineswegs sagen, die stetig, aber in jedem Punkte ohne Derivierte ist. Diese Bemerkungen müssen uns von der Notwendigkeit überzeugen, durch rein analytische Betrachtungen alle diejenigen Eigenschaften der Funktionen zu beweisen, welche geometrisch interpretiert als evident erscheinen; denn diese Eigenschaften bestehen unabhängig von der Möglichkeit einer geometrischen Darstellung, und andrerseits kann diese bei ausgedehnten Klassen von Funktionen fehlen ungeachtet der Stetigkeit und sogar trotz der Existenz der Derivierten.

f) Der Leser kann sich in der geometrischen Darstellung der hauptsächlichsten von den unstetigen Funktionen üben, die wir früher angetroffen haben. Wir wollen uns hier auf nur zwei Funktionen beschränken, deren darstellende Linien wir im folgenden brauchen werden. Die Linie $y = \frac{[x]}{x}$ besteht aus unendlich vielen Hyperbelbogen; denn wenn bei ganzzahligem n die Veränderliche x dem Intervall $(n, n+1)$ mit Ausschluß der oberen Grenze angehört, so wird die Gleichung $xy = n$ und stellt einen Hyperbelbogen dar, der von einem Punkte P der Geraden $y = 1$ nach einem Punkte Q der Hyperbel $x(1-y) = 1$ führt. Nach dem, was wir bei dem ersten Beispiel gesehen haben, geht die Tangente in jedem Punkte P durch A hindurch, den zum Anfangspunkt in Bezug auf die Gerade $y = 1$ symmetrischen Punkt. Es laufen also die Tangenten in den Punkten P_1, P_2, P_3, ... im Punkte A zusammen. Da ferner für einen beliebigen Punkt M der Linie, wenn x ins Unendliche wächst, $\lim y = 1$ wird, so ist klar, daß auch die Tangente in M, welche in Bezug auf die durch M zur x-Achse gezogene Parallele symmetrisch zu OM ist, in der Grenze durch A hindurchgeht, d. h. während ein Punkt, wenn er die Linie durchläuft, der Lage auf der Geraden $y = 1$ zustrebt, nähert sich die Tangente in diesem Punkte der Grenzlage $y = 2$. Mit derselben Leichtigkeit läßt sich die darstellende Linie der stetigen Funktion $2^{-[x]}\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{x - [x]}\right)$ konstruieren

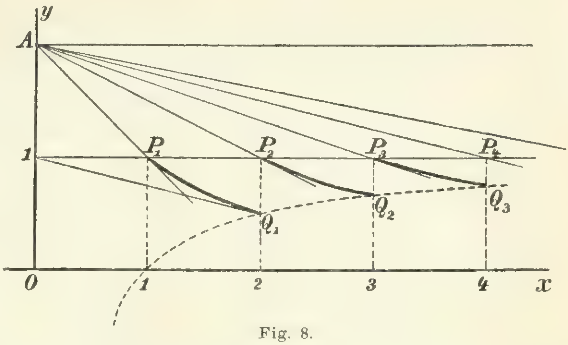

Fig. 8.

eine Linie, die offenbar aus unendlich vielen Parabelbogen besteht; und man erkennt folgendes: Während ein Punkt, der auf der Kurve ins Unendliche fortrückt, der Lage auf der x-Achse zustrebt, oszilliert der spitze Winkel, den die Tangente in diesem Punkte mit der Achse bildet, unbegrenzt in einem Intervall $\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right)$, dessen untere Grenze nach Null konvergiert.

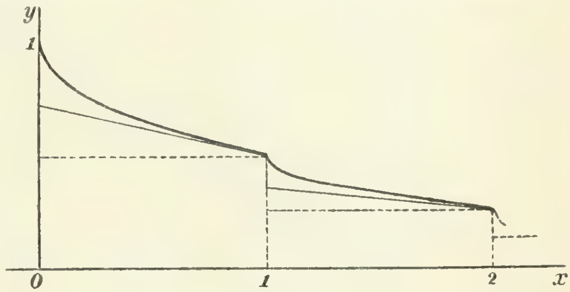

Fig. 9.

g) Wer sich den praktischen Studien widmet, wird dort lernen, daß eine Maschine von sich selbst ein Diagramm zeichnen kann, ihr eignes Diagramm, d. h. eine Linie, welche den Druck des Dampfes als Funktion des von dem Kolben erzeugten Volumens darstellt. Kennt man also die Lagen des Kolbens in den Augenblicken, wo die Zulassung des Dampfes aus dem Kessel in den Zylinder aufhört oder beginnt, oder die Auslassung von diesem in den Kondensator, so enthüllt die Maschine dem, der sie befragt, ihre Vorzüge und ihre Mängel. Verschiedene Diagramme kommen in allen Zweigen der Ingenieurwissenschaft vor und werden auch beim Studium der mannigfachsten Naturphänomene sehr viel angewandt, wobei diejenigen von soziologischer Natur[1]) nicht ausgeschlossen sind. Bei solchen empirischen Kurven kann man, obwohl sie gerade insofern von Wichtigkeit sind, als sie dazu dienen, die Änderungsgeschwindigkeit der betreffenden Funktionen zu zeigen, theoretisch nicht von einer Tangente oder einer Derivierten sprechen; denn die Kurven sind natürlich Fehlern, wenn auch nur kleinen, unterworfen und stellen also faktisch Funktionen v dar, die von den wahren Funktionen u verschieden sind. Es ist nun leicht sich zu überzeugen, daß, wenn man auch zuläßt, daß die Derivierte von u existiert, diejenige von v nicht existieren oder stark von u' abweichen kann. Wäre z. B.[2]) $u - v = \alpha \sin \frac{x}{\alpha^2}$, wo α konstant und äußerst klein ist, so würde man auch haben $u' - v' = \frac{1}{\alpha} \cos \frac{x}{\alpha^2}$, und es könnte folglich, obwohl $|u - v|$ niemals α übertrifft, $|u' - v'|$ in der Umgebung unendlich vieler Werte von x außerordentlich groß werden.

295. Eine Funktion $f(x)$ nennt man rechts von a wachsend oder abnehmend oder konstant, wenn es möglich ist, eine positive Größe h zu bestimmen derart, daß die Werte von $f(x)$ in $(a, a+h)$ bezüglich alle größer, alle kleiner oder alle gleich $f(a)$ sind. Man sagt dagegen, $f(x)$ sei links von a wachsend, abnehmend, konstant, wenn in $(a-h, a)$ die Werte von $f(x)$ bezüglich alle kleiner, größer oder gleich $f(a)$ sind. Es kann auch vorkommen, daß eine solche Zahl h nicht existiert. Es liegt z. B. auf der Hand, daß in der Umgebung der Null die Funktion $f(x)$, welche für $x = 0$ gleich 0 ist und für $x \gtrless 0$ durch $x \sin \frac{1}{x}$ ausgedrückt wird, niemals aufhört positive, negative und verschwindende Werte anzunehmen. Wird also h noch so klein gewählt, so sind die Werte von $f(x)$ in dem Intervall $(-h, h)$ immer teils größer, teils kleiner als $f(0)$, und unendlich viele von ihnen sind auch gleich $f(0)$. Man kann daher die Funktion für $x = 0$ nicht wachsend, noch auch abnehmend oder konstant nennen; und es ist klar, daß gerade hierauf die Unmöglichkeit beruht, in der Umgebung des Anfangspunktes die geometrische Darstellung auszuführen; denn hat man einen Punkt konstruiert, in dessen Umgebung die Ordinate nicht wächst, noch auch abnimmt, noch auch konstant bleibt, so kann man sich nicht denken, in welcher Weise sich die benachbarten Punkte an ihn anschließen. Ähnliches läßt sich von der stetigen Funktion $y = x \sin^2 \frac{1}{x}$ sagen, welche man für $x = 0$ nicht als wachsend bezeichnen kann, nur deshalb, weil sie in der Umgebung der Null unendlich oft den Wert $f(0) = 0$ annimmt. Bemerkenswert ist ferner die Funktion $\varpi(x)$, von der man in der Umgebung jedes Punktes überhaupt nichts sagen kann (§ 277, b).

1) Siehe z. B. den „Cours d'Économie politique" von V. Pareto.

2) Laurent: „Calcul des probabilités, p. 200. Siehe auch den „Calcolo" von Genocchi und Peano, p. XIII.

296. Eine Funktion $f(x)$ heißt wachsend oder abnehmend oder konstant in einem Intervalle, wenn für jedes Paar von Zahlen x' und x'', die man in dem betrachteten Intervall wählt, die Differenz $f(x') - f(x'')$ das Vorzeichen von $x' - x''$ oder das entgegengesetzte Vorzeichen hat oder null ist. Um den Unterschied zwischen „wachsend (abnehmend u. s. w.) in einem Intervalle“ und „wachsend in der Umgebung eines Wertes der unabhängigen Veränderlichen“ wohl zu verstehen, genüge das Beispiel der Funktion $\frac{1}{x}$, welche man rechts von der Null wachsend nennen muß, welchen Wert man ihr auch für $x = 0$ beilegen mag, während sie in jedem Intervall $(0, h)$ mit Ausschluß der unteren Grenze abnehmend ist, wie klein auch h sein mag. Es liegt auf der Hand, daß eine in einem Intervall wachsende oder abnehmende oder konstante Funktion in der Umgebung jeder Zahl des Intervalles bezüglich wachsend, abnehmend oder konstant ist. Keineswegs ebenso evident ist aber der umgekehrte Satz, der gleichwohl besteht, wie im folgenden Paragraphen bewiesen werden wird. Man bemerke jedoch sogleich, daß diese Umkehrung nicht gilt, wenn man z. B. die Funktion als wachsend nur auf einer Seite aller Zahlen eines Intervalles voraussetzt. So ist die Funktion $x - [x]$ wachsend rechts von allen Werten von x, aber nicht wachsend in (a, b), wenn $[a] < [b]$ ist.

297. Theorem I. Eine Funktion, die in der Umgebung aller Werte der Veränderlichen, die einem gegebenen Intervalle angehören, wachsend (oder abnehmend oder konstant) ist, ist in diesem Intervalle wachsend (oder abnehmend oder konstant).

Wenn die Funktion in dem Intervalle (a, b), welches endlich oder unendlich ist, nicht wachsend wäre, so würde dieses wenigstens ein Intervall (a_1, b_1) enthalten, für dessen Grenzen man hätte $f(a_1) > f(b_1)$. Nunmehr nenne man (a_2, b_2) die untere oder die obere Hälfte von (a_1, b_1), je nachdem für $x = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$ die Funktion einen kleineren oder nicht kleineren Wert als $f(a_1)$ annimmt, und man bemerke, daß in jedem Falle $f(a_2) \geqq f(b_2)$ ist. Fährt man in dieser Weise fort, so gelangt man wie in § 171 zur Kenntnis einer Zahl ξ, die der gemeinsame Limes der unteren Grenzen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ und der oberen Grenzen $b_1, b_2, b_3, \ldots$ der konstruierten Intervalle ist. Wählt man h positiv und so klein als man will, so kann man immer n so bestimmen, daß a_n und b_n beide in $(\xi - h, \xi + h)$ fallen, eins links und das andre rechts von ξ. Man sieht auf diese Weise, daß die Intervalle $(\xi - h, \xi)$ und $(\xi, \xi + h)$ bezüglich zwei Zahlen $x' = a_n$ und $x'' = b_n$ enthalten derart, daß $f(x') \geqq f(x'')$ ist, und dies hindert, daß die Funktion in der Umgebung von ξ wachsend ist; denn für einen hinreichend kleinen Wert von h müßte dann immer sein $f(x') < f(x'')$.

In analoger Weise geht der Beweis vor sich unter der Voraussetzung einer abnehmenden oder konstanten Funktion.

298. Der Beweis des vorstehenden Theorems läßt sich auch in der Weise führen, daß man die Wiederholung des in § 171 angewandten Verfahrens vermeidet. Es sei $f(x)$ wachsend in der Umgebung jeder Zahl eines Intervalles, und man wähle in demselben nach Belieben die Werte x' und $x'' > x'$. Um zu beweisen, daß die Funktion in dem Intervall wachsend ist, genügt es zu zeigen, daß $f(x') < f(x'')$ ist. Da $f(x)$ rechts von x' wachsend ist, so gibt es Zahlen $x < x''$, die größer als x' und so beschaffen sind, daß $f(x') < f(x)$ ist. Die Menge dieser Werte x ist endlich und hat daher eine obere Grenze $\xi \leqq x''$. Dies vorausgeschickt gibt es, da die Funktion auch links von ξ wachsend ist, ein Intervall $(\xi - h, \xi)$ derart, daß $f(x) < f(\xi)$ ist für jedes $x < \xi$, welches diesem Intervalle angehört. Andererseits gibt es nach der Definition der oberen Grenze in der betrachteten Menge sicherlich eine Zahl ξ', welche in dasselbe Intervall fällt, und man hat deshalb wegen $f(x') < f(\xi')$ und $f(\xi') < f(\xi)$ auch $f(x') < f(\xi)$, d. h. ξ gehört zu der Menge. Wäre nun $\xi < x''$, so könnte man rechts von ξ eine Zahl $\xi'' < x''$ finden derart, daß $f(\xi) < f(\xi'')$ und folglich $f(x') < f(\xi'')$ ist, so daß ξ'' der Menge angehören würde. Das ist aber absurd, weil die größte Zahl der Menge $\xi < \xi''$ ist. Also ist $\xi = x''$ und endlich $f(x') < f(x'')$. Man bemerke, daß bei diesem Beweis kein voller Gebrauch von den Voraussetzungen gemacht worden ist; denn während die Funktion links von jeder Zahl x_1 des Intervalles als wachsend vorausgesetzt wurde, haben wir rechts nur die Möglichkeit zugelassen Zahlen x_2 beliebig nahe an x_1 zu finden derart, daß $f(x_1) < f(x_2)$ ist. Jedoch erkennen wir, nachdem das Theorem bewiesen ist, daß aus diesen scheinbar weiteren Voraussetzungen mit Notwendigkeit folgt, daß die Funktion auch rechts von jedem Werte von x wachsend ist.

299. Theorem II. Eine Funktion ist rechts (oder links) von a wachsend oder abnehmend, je nachdem für $x = a$ ihre rechtsseitige (oder linksseitige) Derivierte positiv oder negativ ist.

Im Grunde besteht die Tatsache, daß eine Funktion für einen gegebenen Wert von x wächst (oder abnimmt), in der Möglichkeit eine positive Zahl h anzugeben derart, daß δy für $|\delta x| < h$ das Vorzeichen von δx (oder das entgegengesetzte Vorzeichen) hat. Wenn nun für $x = a$ die rechtsseitige oder linksseitige Derivierte von y positiv ist, so bedeutet dies, daß das zugehörige Zuwachsverhältnis, wenn δx nach Null konvergiert, schließlich positiv wird und bleibt, und daß daher δy schließlich das Vorzeichen von δx annimmt und bewahrt. Mithin ist die Funktion wachsend. In derselben Weise zeigt man, daß die Funktion abnehmend ist, wenn die Derivierte negativ ist. Wenn ferner die Derivierte null ist, so hindert dies nicht, daß δy schließlich ein gegebenes Vorzeichen annimmt und behält, und daß folglich die Funktion für jenen betrachteten Wert von x wachsen oder abnehmen könnte. Es kann aber auch vorkommen, daß δy schließlich gleich Null wird oder daß es niemals aufhört zu verschwinden oder sein Zeichen zu wechseln, und dann ist die Funktion, wenn sie nicht konstant ist, überhaupt nicht wachsend oder abnehmend.

300. Theorem III. Eine Funktion ist in einem Intervalle wachsend oder abnehmend, je nachdem ihre Derivierte, die als einzig vorausgesetzt wird, in dem genannten Intervalle positiv oder negativ bleibt.

In der Tat, wenn z. B. $f'(x) > 0$ ist für alle Werte von x, die einem gewissen Intervall angehören, so ist $f(x)$ in der Umgebung jedes dieser Werte wachsend und ist folglich auf Grund des Theorems I in dem Intervalle wachsend.

301. Minima und Maxima. Man sagt, daß für $x = a$ die Funktion $f(x)$ durch ein Minimum hindurchgeht oder daß $f(a)$ ein Minimum von $f(x)$ ist, wenn keiner der Werte, die $f(x)$ in der Umgebung von a annimmt, kleiner als $f(a)$ ist. Ebenso sagt man, $f(a)$ sei ein Maximum von $f(x)$, wenn in der Umgebung von a kein Wert von $f(x)$ größer ist als $f(a)$. Das so definierte Maximum und Minimum heißen auch absolut, um sie von dem größten und kleinsten Werte zu unterscheiden, den eine Funktion in einem gegebenen Intervall annehmen kann; diese heißen das relative Maximum und Minimum, weil sie von der Gesamtheit der Funktionswerte in dem betrachteten Intervalle abhängen, während Minimum und Maximum in dem absoluten Sinne nur von den Werten abhängen, welche die Funktion in der Umgebung gewisser Werte der unabhängigen Veränderlichen annimmt. In einem Intervalle kann es mehrere absolute Minima oder Maxima geben, dagegen gibt es nur einen einzigen Wert des relativen Minimums oder Maximums. Die letzteren können gleichzeitig mit dem Intervall sich ändern, während die ersteren ihren Charakter in jedem Intervalle behalten und immer für bestimmte unveränderliche Werte von x eintreten. Diese Bemerkungen werden evident, wenn man von der geometrischen Darstellung Gebrauch macht. So sehen wir z. B. an der Figur, daß die dargestellte Funktion in dem Intervall (a, b) das relative Minimum an der unteren Grenze a hat und das Maximum in einem Punkte γ, in welchem sie auch ein absolutes Maximum hat. Ein

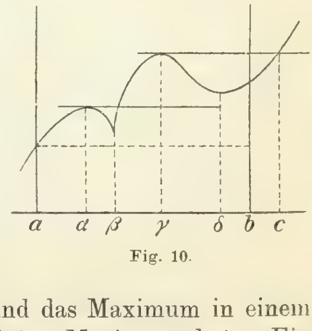

Fig. 10.

anderes absolutes Maximum sieht man in α, und zwei Minima, eines in β und ein anderes, welches größer als das vorerwähnte Maximum ist, in δ. Verschiebt man a nach links, so nimmt das relative Minimum ab und tritt an der unteren Grenze des neuen Intervalles auf. Wenn dagegen b anfängt nach rechts zu rücken, so bleibt das relative Maximum ungeändert und verbleibt in γ, bis b auf die rechte Seite des Punktes c gelangt. Alsdann nimmt das genannte Maximum zu und rückt unvermittelt nach der oberen Grenze des neuen Intervalles. Wir schließen mit zwei wichtigen Bemerkungen: Das absolute Minimum für $x = a$ ist nichts anderes als das relative Minimum in einem hinreichend kleinen Intervall, welches in der Umgebung von a gewählt ist; und das relative Minimum in einem gegebenen Intervall ist, wenn es nicht an den Grenzen eintritt, auch ein absolutes Minimum. Gleiches gilt von dem Maximum. Künftighin sind das Minimum und das Maximum immer in ihrer neuen Bedeutung zu verstehen, falls nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt wird.

302. Theorem IV. Wenn eine Funktion mit einer einzigen Derivierten durch ein Minimum oder durch ein Maximum hindurchgeht, so verschwindet die Derivierte.

Nehmen wir z. B. an, $f(a)$ sei ein Minimum, und bemerken wir, daß nach der Definition des absoluten Minimums die Funktion links von a nicht wachsend ist und rechts davon nicht abnehmend ist. Es kann also die Derivierte, welche als einzig (§ 281) vorausgesetzt wird, betrachtet als Derivierte links auf Grund des Theorems II nicht positiv sein und betrachtet als Derivierte rechts nicht negativ sein. Folglich ist sie null. Die Umkehrung des Satzes gilt nicht, da die Derivierte sehr wohl verschwinden kann für einen Wert von x, der die Funktion nicht zu einem Minimum oder Maximum macht. Nichts hindert z. B., daß die Funktion (wie es bei $y = x^3$ der Fall ist) sowohl links als auch rechts von dem genannten Werte wachsend sein kann.

303. Theorem V (Theorem von Rolle). Wenn eine Funktion mit einer einzigen Derivierten gleiche Werte an den Grenzen eines Intervalles hat, so verschwindet die Derivierte wenigstens einmal in diesem Intervalle mit Ausschluß der Grenzen, vorausgesetzt, daß auch an ihnen die Funktion stetig ist.

Die Funktion ist stetig in dem ganzen Intervall (a, b), nämlich stetig an den Grenzen nach der ausdrücklich gemachten Voraussetzung und stetig im Innern von (a, b), da in diesem Intervalle, höchstens die Grenzen ausgeschlossen, die Existenz von $f'(x)$ zugelassen wird. Also enthält dieses Intervall auf Grund des zweiten Satzes von Weierstraß wenigstens eine Zahl ξ, für welche $f(x)$ den größten oder den kleinsten Wert erreicht. Wenn die Werte der Funktion alle gleich $f(a)$ wären, so würde die Derivierte beständig null sein. Wir wollen deshalb annehmen, daß $f(x)$ in (a, b) auch Werte annimmt, die von $f(a)$ verschieden sind. Alsdann wird wenigstens eine von den beiden Zahlen, welche den größten und den kleinsten Wert der Funktion darstellen, von $f(a) = f(b)$ verschieden sein und folglich einer Zahl ξ entsprechen, die von a und von b verschieden ist. Nachdem so die Grenzen des Intervalles ausgeschlossen sind, ist das Minimum oder Maximum der Funktion auch eines im absoluten Sinne (§ 301), und man hat daher notwendig (§ 302) $f'(\xi) = 0$.

304. Bemerkungen. a) In Betreff der auferlegten Einschränkungen bemerke man, daß die Funktion $x - [x]$, welche an den Grenzen des Intervalles (0, 1) verschwindet, in diesem Intervalle, wenn die Grenzen ausgeschlossen werden, stetig ist und eine einzige Derivierte besitzt; aber dieselbe ist (weil gleich 1) niemals null. Dies liegt an der Unstetigkeit, welche die Funktion links von $x = 1$ hat, eine Unstetigkeit, die sie verhindert ihre obere Grenze zu erreichen. Es ist jedoch keineswegs unmöglich, daß die ausgesprochene Eigenschaft auch dann besteht, wenn die Funktion an den Grenzen des Intervalles nicht stetig ist, wie es in $\left(0, \frac{1}{\pi}\right)$ bei der Funktion $\sin \frac{1}{x}$ ist, die an der unteren Grenze unstetig ist. Wenn dagegen die Bedingung der Stetigkeit in einem *ganzen* Intervall erfüllt ist, so bleibt die Eigenschaft erfüllt unabhängig von der Existenz der Derivierten an den Grenzen. Es genüge das Beispiel der *stetigen* Funktion $x \sin \frac{1}{x}$, welche für $x = 0$ keine Derivierte hat. In jedem Intervall $\left(0, \frac{1}{n\pi}\right)$ verschwindet ihre Derivierte unendlich viele Male für Werte von x, die invers sind zu den Wurzeln der Gleichung $\operatorname{tg} x = x$.

b) Das Rollesche Theorem sagt uns insbesondere, daß *zwischen zwei Wurzeln von* $f(x)$ *immer wenigstens eine Wurzel von* $f'(x)$ *fällt*, wobei wohlgemerkt vorausgesetzt wird, daß die Bedingungen der Stetigkeit und der Existenz einer einzigen Derivierten erfüllt sind, die in der Formulierung hervorgehoben sind. Daraus folgt, daß man, wenn für $x = a$ gleichzeitig $f(x)$ und $f'(x)$ verschwinden, sich denken kann, daß das Rollesche Theorem in dem verschwindenden Intervalle (a, a) besteht. Man hat sich also vorzustellen, daß in a zwei (oder mehr) Wurzeln von $f(x)$ übereinanderliegen. Aus diesem Grunde pflegt man zu sagen, daß a eine *vielfache* Wurzel von $f(x)$ ist, indem man die Bezeichnung *einfache* Wurzel für jede Wurzel von $f(x)$ vorbehält, welche $f'(x)$ nicht zum Verschwinden bringt. Eine vielfache Wurzel a von $f(x)$ heißt ferner eine *Doppelwurzel*, wenn sie eine einfache Wurzel von $f'(x)$ ist, d. h. wenn man hat $f'(a) = 0$, aber $f''(a) \gtrless 0$; sie heißt dreifach, wenn sie eine Doppelwurzel von $f'(x)$ ist, in welchem Falle man hat $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$, aber $f'''(a) \gtrless 0$; und so fort. Im allgemeinen wird als Wurzel n-ter Ordnung von $f(x)$ jede Zahl a bezeichnet, welche $f(x)$ und ihre successiven Derivierten bis zur n-ten ausschließlich zum Verschwinden bringt. Eine solche Wurzel pflegt man als hervorgehend aus dem Zusammenfallen von n Wurzeln, die gleich a sind, zu betrachten.

305. Theorem VI (Theorem von Cauchy). Wenn in dem endlichen Intervalle (a, b) die Funktionen φ und ψ stetig sind, und wenn höchstens mit Ausschluß der Grenzen einzige Derivierte φ' und ψ' existieren und keine gemeinsamen Wurzeln haben, so enthält das genannte Intervall wenigstens eine Zahl ξ, die von den Grenzen verschieden ist, und für welche man hat

$$\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{\psi(b) - \psi(a)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}.$$

Da man beim Formulieren eines Satzes nicht von Größen sprechen kann, die ohne Bedeutung sind, so ist in der vorstehenden Formulierung die Voraussetzung enthalten, daß wenigstens eine der beiden Funktionen, z. B. ψ, ungleiche Werte an den Grenzen des Intervalles hat. Unter dieser Voraussetzung kann man immer eine Konstante k bestimmen derart, daß die Funktion $\varphi(x) - k\psi(x)$ an jenen Grenzen gleiche Werte annimmt; denn man braucht nur zu setzen

$$\varphi(a) - k\psi(a) = \varphi(b) - k\psi(b)$$

und unter Beachtung von $\psi(a) \gtrless \psi(b)$ daraus zu entnehmen

$$k = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{\psi(b) - \psi(a)}.$$

Nun ist die betrachtete Funktion in dem ganzen Intervall stetig und hat eine einzige Derivierte $\varphi'(x) - k\psi'(x)$, welche auf Grund des Rolleschen Theorems wenigstens für einen Wert ξ im Innern von (a, b) verschwinden muß, so daß man hat $\varphi'(\xi) = k\psi'(\xi)$. Da es unmöglich ist, daß $\psi'(\xi) = 0$ ist, weil sonst auch $\varphi'(\xi) = 0$ wäre gegen die über φ' und ψ' gemachte Voraussetzung, so kann man aus der letzten Gleichung (auch wenn $k = 0$ ist, in welchem Falle man wieder zu dem Rolleschen Theorem gelangt) ableiten

$$k = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}.$$

Setzt man die beiden Werte von k einander gleich, so findet man das Theorem von Cauchy. Man bemerke, daß durch das Verschwinden von φ' und ψ' an den Grenzen die Gültigkeit des Theorems nicht aufgehoben wird, ebenso wie sie nicht aufgehoben wird durch die Nichtexistenz von φ' und ψ' an jenen Grenzen, während sie aufhören könnte, wenn sich an denselben eine Unstetigkeit für φ oder für ψ darbieten würde.

306. Theorem VII (Theorem von Lagrange). Für jede Funktion $f(x)$, die in einem endlichen Intervalle (a, b) stetig ist und im Innern desselben eine einzige Derivierte besitzt, hat man

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(\xi),$$

wo ξ eine Zahl von (a, b) bedeutet, die von den Grenzen verschieden ist.

Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus dem Theorem von Cauchy. Man braucht nur $\varphi(x) = f(x)$ und $\psi(x) = x$ zu setzen und zu beachten, daß $\psi'(x) = 1$ ist.

307. Folgerungen. a) Eine Funktion mit einer verschwindenden Derivierten ist konstant. In der Tat, wenn $f'(x) = 0$ ist für jeden Wert von x in (a, b), so kann man das Theorem von Lagrange anwenden auf jedes Intervall (a, x), dessen obere Grenze nicht größer ist als b; und man erhält $f(x) = f(a) = \text{const.}$ Dieser Satz ist eine notwendige Ergänzung des Theorems III, eine Ergänzung, die sich zu dem analogen Theorem II in keiner Weise geben ließe. Es ist wohl zu beachten, daß $f'(x)$ die Bedeutung einer einzigen Derivierten hat, und man kann sich leicht überzeugen, daß der Satz nicht bestehen würde, wenn z. B. nur die Derivierte rechts beständig null wäre, wie es bei $y = [x]$ der Fall ist.

b) Zwei Funktionen, welche dieselbe Derivierte haben, können sich nur um eine Konstante unterscheiden. In der Tat, wenn $\varphi' = \psi'$ ist, so ist die Derivierte von $\varphi - \psi$ gleich Null, und man hat daher $\varphi - \psi = \text{const.}$ Kennt man also von $f(x)$ eine primitive Funktion $F(x)$, d. h. eine Funktion, welche $f(x)$ als Derivierte hat, so sind alle andern primitiven Funktionen in der Form $F(x) + C$ enthalten, wo C eine willkürliche Konstante bedeutet.

308. Bemerkungen. a) Um zu sehen, wie das Lagrangesche Theorem versagen kann, wenn irgend eine der in der Formulierung verlangten Bedingungen fehlt, genügt es die Funktion zu betrachten, welche durch $f(0) = 0$ und $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x \gtrless 0$ definiert ist. Wendet man das Theorem von Lagrange in einem Intervalle (a, b) an, dessen Grenzen nicht null sind, so erhält man $\xi^2 = ab$, ein Resultat, welches unzulässig ist, sobald a und b entgegengesetzte Vorzeichen haben, d. h. wenn das Intervall (a, b) den Wert $x = 0$ enthält, für den $f'(x)$ nicht existiert. Und auch, wenn dieser Wert an einer Grenze liegt, wenn man z. B. das Intervall $(0, x)$ betrachtet, gelangt man zu dem unzulässigen Resultat $\xi^2 = -x^2$, was einzig und allein von der Unstetigkeit der Funktion an der unteren Grenze herrührt.

b) Betrachten wir allgemeiner eine Funktion $f(x)$, die auf einer Seite von a, z. B. auf der rechten, nicht endlich ist, aber eine einzige Derivierte besitzt, womit gemeint ist, daß diese Derivierte in einem hinreichend kleinen Intervalle (a, x) als existierend vorausgesetzt wird, aber nicht für $x = a$; denn wir nehmen ja außerdem an, daß, wenn x nach a konvergiert, die Funktion nicht aufhört Werte anzunehmen, deren absoluter Betrag beliebig groß ist. Das Theorem von Lagrange läßt sich also auf $f(x)$ in dem Intervall (a, x) mit Ausschluß der unteren Grenze anwenden, d. h. in einem Intervall (x', x), dessen untere Größe größer als a ist und so nahe an a liegt, als man will. Nun kann man, wenn eine Zahl l beliebig groß gegeben ist, nach der Voraussetzung immer eine Zahl x' derart bestimmen, daß der absolute Betrag von $f(x')$ beliebig groß ist, und also auch derart, daß man hat

$$|f(x') - f(x)| > (x-a)l \quad \text{oder} \quad (x-x')\,|f'(\xi)| > (x-a)\,l > (x-x')\,l$$

und endlich $|f'(\xi)| > l$, wo ξ zwischen x' und x liegt und nach a konvergiert, wenn x dies tut. Wenn also beim Konvergieren der Veränderlichen nach einem endlichen Grenzwert eine Funktion mit einer einzigen Derivierten Werte von beliebig großem absoluten Betrage annimmt, so gilt das Gleiche von der Derivierten.

c) In noch einfacherer Weise läßt sich zeigen, daß, wenn eine Funktion mit einer einzigen Derivierten bei unbegrenztem Zunehmen der Veränderlichen nach einem endlichen Grenzwert konvergiert, die Derivierte oszilliert oder nach Null konvergiert. In der Tat, wird a fixiert und $x > a$ angenommen, so folgt aus $f(x) - f(a) = (x-a)f'(\xi)$, daß, wenn x unbegrenzt wächst, $(x-a)f'(\xi)$ nach einem endlichen Grenzwert konvergiert und infolgedessen $\lim\limits_{x=\infty} f'(\xi) = 0$ ist. Man hüte sich hierbei wohl die linke Seite so anzusehen, als lautete sie $\lim\limits_{x=\infty} f'(x)$; denn obwohl wir allerdings bewirken können, daß ξ beliebig große Werte annimmt, indem wir a genügend große Werte erteilen, so ist nicht gesagt, daß ξ alle Werte annehmen muß, die größer als eine gegebene Zahl sind. Man kann also nur behaupten, daß $\lim\limits_{x=\infty} f'(x)$ null ist oder nicht existiert. Auf alle Fälle ist es sicher, daß $f'(x)$ bei unendlich zunehmendem x nicht aufhört, Werte mit beliebig kleinen absoluten Beträgen anzunehmen. Diese Folgerungen aus dem Lagrangeschen Theorem sind wie das Theorem selbst einer einfachen geometrischen Interpretation fähig. Um aber nicht der Versuchung nachzugeben, solchen Interpretationen einen beweisenden Wert zuzuschreiben, wird der Leser gut tun gewisse oben gemachte Bemerkungen (§ 294, e) noch einmal zu lesen.

d) Man kann dem Lagrangeschen Theorem auch die Form geben $\frac{\delta y}{\delta x} = f'(\xi)$, indem man das Inkrement δx von irgend einem Werte $x = a$ ausgehend wählt. Man beachte, daß das Theorem auch gilt, wenn $f'(a)$ nicht existiert; denn bei allen obenstehenden Sätzen haben wir, um nicht ohne Not überflüssige Bedingungen einzuführen, immer Sorge getragen die Grenzen des Intervalles auszuschließen, indem wir jedoch an ihnen die Funktionen als stetig voraussetzten. Wenn nun $f'(a)$ existiert, so folgt aus dem Lagrangeschen Theorem, wenn wir δx nach Null konvergieren lassen, $\lim\limits_{x=a} f'(\xi) = f'(a)$; aber die linke Seite ist nicht mit $\lim\limits_{x=a} f'(x)$ zu verwechseln, obwohl, wenn x nach a konvergiert, auch ξ dies tut. In der Tat braucht ξ, obgleich es zwischen a und x eingeschlossen bleibt, nicht alle Werte in der Umgebung von a anzunehmen (vgl. § 260), und man kann daher nur behaupten[1]), daß, wenn x nach a konvergiert, die Funktion $f'(x)$ durch unendlich viele Werte hindurchgeht, die sich von $f'(a)$ beliebig wenig unterscheiden; aber hierdurch ist nicht ausgeschlossen, daß sie auch andere annehmen kann, welche sie hindern, nach einem Grenzwert zu konvergieren. Ein Beispiel hierfür hat man in der stetigen Funktion $x^2 \sin\frac{1}{x}$, für welche $f'(0) = 0$ ist, während $f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ unaufhörlich oszilliert, wenn x nach Null konvergiert. Das Theorem von Lagrange liefert

$$x \sin\frac{1}{x} = 2\xi \sin\frac{1}{\xi} - \cos\frac{1}{\xi},$$

und daraus, daß $\lim \cos\frac{1}{\xi} = 0$ sein muß, ist zu entnehmen, daß ξ eine solche unstetige Funktion von x ist, die mit x nach Null konvergiert, indem sie unendlich viel zahlreichere Werte vermeidet, als sie annimmt. Ein anderes Beispiel bietet uns die Funktion

$$f(x) = x \sin \log x,$$

für welche man hat

$$\sin \log x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \log \xi\right).$$

Es gibt also, da $\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \log \xi\right)$ nicht größer als $\frac{1}{2}$ sein kann, in $(0, h)$ immer, wie klein auch h sein mag, unendlich viele Intervalle,

1) Siehe den „Calcolo" von Genocchi und Peano, p. 50.

die beständig von ξ vermieden werden. Sie gehören der Folge (q, q^2), (q^3, q^4), (q^5, q^6), ... an, wo $q = e^{-\frac{\pi}{2}}$ ist.

e) Es folgt aus der vorigen Bemerkung, daß jede Funktion, welche als einzige Derivierte einer andern betrachtet werden kann, nur Unstetigkeiten zweiter Art haben kann. Mit andern Worten, wenn ein Punkt M' längs einer Kurve nach einem festen Punkte M hinrückt, so strebt, falls die Tangenten in M und in M' wohlbestimmt sind, die bewegliche Tangente dem Zusammenfallen mit der festen Tangente zu oder sie nähert sich überhaupt keiner Grenzlage. Natürlich kann die Derivierte einer Funktion auch gewöhnliche Unstetigkeiten besitzen; wo sich diese aber bieten, ist man sicher, daß die rechtsseitige Derivierte von der linksseitigen verschieden ist. Hierfür hat man ein Beispiel in der Funktion

$$f(x) = x[x] - \tfrac{1}{2}([x] + [x]^2),$$

welche als Derivierte die Funktion $[x]$ hat; und die gewöhnliche Unstetigkeit derselben für jeden ganzzahligen Wert von x stellt gerade den unvermittelten Übergang von der linksseitigen Derivierten, die gleich $x - 1$ ist, zu der rechtsseitigen dar, die gleich x ist.

Ergänzungen zur Theorie der Grenzwerte.

309. Dank den letzten Theoremen können wir uns darauf vorbereiten, das Gebiet der reinen Theorie zu verlassen und in das nicht minder interessante der praktischen Anwendungen des Kalküls einzutreten. Zunächst wollen wir aus dem Theorem von Cauchy ein anderes wichtiges Theorem ableiten, mit dessen Hilfe es leicht sein wird eine Lücke (§ 263), die wir in der Theorie der Grenzwerte gelassen haben, auszufüllen. Dieses Theorem wird uns in den Stand setzen, die Grenzwerte vieler Funktionen zu berechnen, welche sich für bestimmte Werte der unabhängigen Veränderlichen unter Formen ohne Bedeutung wie

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty$$

darbieten würden, wenn es erlaubt wäre, die gewöhnlichen Regeln der Grenzwertberechnung anzuwenden. Wir bemerken sofort, daß alle vorstehenden Formen sich auf die beiden ersten reduzieren lassen, die beiden einzigen, die bei der Formulierung des in Rede stehenden Theorems in Betracht kommen. In der Tat, sollte das Produkt $\varphi\psi$ von zwei Funktionen sich, wenn x einem Grenzwert zustrebt, in der Form $0\cdot\infty$ darbieten, so genügt es eben jenes Theorem auf den Quotienten von φ und $\frac{1}{\psi}$ anzuwenden. Ebenso braucht man, wenn die Differenz $\varphi - \psi$ die Form $\infty - \infty$ anzunehmen strebt, nur das Produkt von φ und $1 - \frac{\psi}{\varphi}$ zu betrachten, um sofort auf den vorigen Fall zurückzukommen, vorausgesetzt, daß $\frac{\psi}{\varphi}$ nach 1 konvergiert, denn sonst könnte jene Differenz nicht endlich bleiben. Auf denselben Fall reduziert sich auch die Aufsuchung des Grenzwertes von φ^{ψ}, sei es, daß φ nach Null oder nach Unendlich konvergiert, während ψ nach Null konvergiert, sei es, daß φ nach der Einheit konvergiert, während ψ über alle Grenzen zunimmt. Es genügt den Logarithmus des vorgelegten Ausdrucks, d. h. $\psi \log \varphi$, zu betrachten, der sich gerade unter der Form $0 \cdot \infty$ darbieten würde, wenn man den übrigens unfruchtbaren Irrtum begehen würde, in unberechtigter Weise die bekannte Regel anzuwenden, welche den Grenzwert des Produktes mehrerer Funktionen in endlicher Anzahl liefert, wenn diese endlichen Grenzwerten zustreben.

310. Theorem VIII (Theorem von L'Hospital). Konvergieren zwei stetige Funktionen gleichzeitig nach Null oder nach Unendlich, wenn die unabhängige Veränderliche einem endlichen Grenzwert a zustrebt oder unendlich zunimmt, und konvergiert das Verhältnis der Derivierten (die außerhalb der Stelle a als existierend und einzig vorausgesetzt werden) nach einem Grenzwert, so konvergiert das Verhältnis der Funktionen nach demselben Grenzwert, vorausgesetzt, daß die Derivierten in der Umgebung von a keine gemeinsamen Wurzeln haben oder, falls die Veränderliche unendlich zunehmen muß, keine beliebig großen gemeinsamen Wurzeln.

a) Nehmen wir zunächst an, daß, wenn x nach a konvergiert, $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ nach Null konvergieren, daß man also wegen der Stetigkeit $\varphi(a) = 0$ und $\psi(a) = 0$ hat. Wählt man x genügend nahe an a, so liefert, da kein Wert des Intervalles (a, x), der von den Grenzen verschieden ist, φ' und ψ' gleichzeitig zum Verschwinden bringt, das Theorem von Cauchy

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\psi(x) - \psi(a)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)},$$

wo ξ, welches zwischen a und x liegt, mit x nach a konvergiert. Daraus folgt

$$\lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x=a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)},$$

wenn der Limes auf der rechten Seite existiert. Dieser Schluß gilt auch unter der Voraussetzung, daß x, anstatt nach a zu konvergieren, über alle Grenzen wächst. In der Tat, setzt man $x = \frac{1}{z}$, so kann man schreiben

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{z=0} \frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{\psi\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{z=0} \frac{-\frac{1}{z^2}\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)}{-\frac{1}{z^2}\psi'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x=\infty} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

Hierbei wird die Annahme gemacht, daß die Funktionen $\varphi\left(\frac{1}{z}\right)$ und $\psi\left(\frac{1}{z}\right)$, welche stetig sind, solange $z \gtrless 0$ ist, auch für $z = 0$ stetig seien, daß man also übereinkommt ihnen für $z = 0$ den Wert Null beizulegen. Um das Theorem von Cauchy ohne Bedenken anwenden zu können, ist es überdies nötig die Existenz einer Zahl l zuzulassen von der Beschaffenheit, daß für $x > l$ niemals $\varphi'(x)$ und $\psi'(x)$ gleichzeitig verschwinden. Analoge Betrachtungen lassen sich anstellen, wenn y nach $-\infty$ konvergiert, in welchem Falle z sich dem Grenzwert Null von links nähern muß.

b) Wir wollen jetzt annehmen, daß für unendlich zunehmendes x die Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ jede Grenze überschreiten und daß das Verhältnis ihrer Derivierten nach dem Grenzwert l konvergiert. Dies erfordert, daß man, wenn eine beliebig kleine positive Zahl ε gegeben ist, immer eine Zahl a finden kann von solcher Beschaffenheit, daß für $x > a$

$$\left| \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} - l \right| < \varepsilon$$

ist. Nehmen wir an, a sei bereits groß genug gewählt, damit es in (a, ∞) keine gemeinsamen Wurzeln von φ' und ψ' gibt, so hat man, wenn man das Theorem von Cauchy anwendet, identisch

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\psi(x) - \psi(a)} \cdot \frac{1 - \frac{\psi(a)}{\psi(x)}}{1 - \frac{\varphi(a)}{\varphi(x)}} = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)} \cdot \frac{1 - \frac{\psi(a)}{\psi(x)}}{1 - \frac{\varphi(a)}{\varphi(x)}}$$

für jedes $x > a$ und für ein passendes $\xi > a$, welches kleiner als x ist. Man lasse x unter Festhaltung von a unbegrenzt zunehmen. Der erste Faktor bleibt unaufhörlich zwischen $l - \varepsilon$ und $l + \varepsilon$, während der zweite, der nach der Einheit konvergiert, schließlich in das Intervall $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ fällt und darin bleibt. Daraus folgt, daß man von einem bestimmten Wert von x an beständig haben wird

$$\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)} = l + \theta\varepsilon, \quad \frac{1 - \frac{\psi(a)}{\psi(x)}}{1 - \frac{\varphi(a)}{\varphi(x)}} = 1 + \theta'\varepsilon,$$

wo θ und θ' absolut genommen kleiner sind als 1. Es ist also

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = l + (\theta + l\theta' + \theta\theta'\varepsilon)\varepsilon.$$

Wird nun η positiv und beliebig klein fixiert, so genügt es für $l \gtrless 0$ gleichzeitig zu nehmen

$$\varepsilon < |l|, \quad \varepsilon < \frac{\eta}{1 + 2|l|}$$

oder $\varepsilon = \frac{\eta}{1+\eta}$ für $l = 0$, damit sich im ersten Falle ergibt

$$\left|\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} - l\right| = |\theta + l\theta' + \theta\theta'\varepsilon| \cdot \varepsilon < (1 + 2|l|)\varepsilon < \eta$$

und

$$\left|\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right| = |\theta + \theta\theta'\varepsilon| \cdot \varepsilon < (1 + \varepsilon)\varepsilon = \frac{(1 + 2\eta)\eta}{(1 + \eta)^2} < \eta$$

im zweiten. Es ist also in allen Fällen

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = l.$$

Das Theorem muß man auch dann als gültig betrachten, wenn der Zähler endlich bleibt, in welchem Falle der Grenzwert des Verhältnisses der Funktionen null ist; und um zu zeigen, daß das Verhältnis der Derivierten nicht nach einem von Null verschiedenen Grenzwert konvergieren kann, genügt es zu schreiben

$$1 = \lim \frac{\varphi(x) + \psi(x)}{\psi(x)} = \lim \frac{\varphi'(x) + \psi'(x)}{\psi'(x)} = 1 + \lim \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}\cdot$$

Wenn endlich x, anstatt ins Unendliche zu wachsen, nach einem endlichen Grenzwert a konvergiert, so bleibt das Theorem bestehen. Setzt man nämlich $x - a = \frac{1}{z}$, so kann man schreiben

$$\lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{z=\infty} \frac{\varphi\left(a + \frac{1}{z}\right)}{\psi\left(a + \frac{1}{z}\right)} = \lim_{z=\infty} \frac{-\frac{1}{z^2}\,\varphi'\left(a + \frac{1}{z}\right)}{-\frac{1}{z^2}\,\psi'\left(a + \frac{1}{z}\right)} = \lim_{x=a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}\cdot$$

311. Bemerkungen. a) Beim Aufsuchen des Grenzwertes von $\frac{\varphi}{\psi}$ für den Fall, daß x nach a konvergiert, kann es vorkommen, daß die Zahlen $\varphi'(a)$ und $\psi'(a)$ nicht existieren oder beide null sind, ohne daß das Theorem versagt, da nur in der Umgebung von a, nicht für $x = a$, die Funktionen Derivierte zu haben und diese ohne gemeinsame Wurzeln zu sein brauchen. Wenn die Derivierten für $x = a$ verschwinden und außerdem stetig sind, so stehen wir bei der Aufsuchung des Grenzwertes ihres Verhältnisses vor demselben Problem, welches wir lösen wollten. Wenn wir aber annehmen, daß auch die andern Bedingungen erfüllt sind, so können wir das Theorem noch einmal anwenden, indem wir zu den zweiten Derivierten übergehen, und weiter, wenn es nötig ist, zu den dritten u. s. f.

b) Gewisse frühere Bemerkungen führen dazu, einen scheinbar schwerwiegenden Einwand gegen das Theorem von L'Hospital zu erheben, insofern es den Anschein hat, als ob das daraus sich ergebende Verfahren zur Berechnung des Grenzwertes eines Quotienten immer illusorisch werden müßte sowohl in dem Falle, wo die Funktionen beim Konvergieren der Veränderlichen nach einem endlichen Grenzwert unendlich zunehmen, als auch, wenn sie nach Null konvergieren, während die Veränderliche über alle Grenzen wächst. In der Tat nehmen in dem ersten Falle die Derivierten, wenn sie nicht unaufhörlich oszillieren, auch ihrerseits unendlich zu (§ 308, b) und konvergieren im zweiten Falle nach Null (§ 308, c). Hierauf ist zu erwidern, daß die Wichtigkeit des durch das Theorem von L'Hospital angezeigten Rechnungsverfahrens hauptsächlich in der Möglichkeit besteht einen Ausdruck, der nach einem Grenzwert konvergiert, in einen andern zu transformieren, der nach keinem davon verschiedenen Grenzwert konvergieren kann und der sich fast immer unter einer einfacheren Form darbietet oder solche Vereinfachungen ermöglicht, daß sich daraus leicht die direkte Berechnung des Grenzwertes ergibt.

c) Das Theorem von L'Hospital kann man auch dann als gültig betrachten, wenn das Verhältnis der Derivierten, anstatt nach einem endlichen Grenzwerte zu konvergieren, unbegrenzt wächst. In der Tat, nehmen wir an, daß φ und ψ dem Grenzwert Null zustreben, wenn x nach a konvergiert, und wählen wir in der Umgebung von a ein Intervall, in welchem $\frac{\varphi'}{\psi'}$ größer bleibt als eine gegebene Zahl l, die beliebig groß sein kann. Dann wird auch $\frac{\varphi}{\psi}$ für dieselben Werte von x größer sein als l, da der Wert dieses Verhältnisses für einen gegebenen Wert von x gleich einem der Werte ist, den das Verhältnis $\frac{\varphi'}{\psi'}$ in (a, x) annimmt. In dem Falle ferner, wo φ und ψ ins Unendliche zunehmen, betrachte man das Verhältnis $\frac{\psi}{\varphi}\cdot$ Dieses konvergiert nach Null wie $\frac{\psi'}{\varphi'}$, und da es schließlich positiv bleibt, so kann man behaupten, daß $\frac{\varphi}{\psi}$ ins Unendliche wächst wie $\frac{\varphi'}{\psi'}\cdot$

d) Wenn der Grenzwert des Verhältnisses der Derivierten **nicht existiert**, so ist es nicht erlaubt, daraus die Nichtexistenz eines Grenzwertes des Verhältnisses der Funktionen zu folgern. Z. B. hat man

$$\lim_{x=\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x=\infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = 1,$$

während das Verhältnis der Derivierten, welches offenbar gleich

$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$ ist, keinem Grenzwert zustrebt. In der Tat geht aus dem Beweise des Theorems nur hervor, daß, wenn für unendlich zunehmendes oder nach einem endlichen Grenzwerte konvergierendes x ein Grenzwert des Verhältnisses der Funktionen existiert, nicht der zweite, sondern der erste der beiden folgenden Grenzwerte existiert:

$$\lim_{x=\cdots} \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}, \quad \lim_{x=\cdots} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

ξ ist seinem Wesen nach eine Funktion von x, welche mit x unendlich zunimmt oder mit dieser Veränderlichen einem gemeinsamen endlichen Grenzwert zustrebt, welche aber nicht alle Werte anzunehmen braucht, die x dabei annimmt, woraus sich ergibt, daß aus der Existenz des ersten Grenzwertes nicht diejenige des zweiten gefolgert werden darf. Dagegen schließt die Existenz des zweiten Grenzwertes, die in der Formulierung des Theorems zugelassen wird, diejenige des ersten ein, folglich auch die eines Grenzwertes des Verhältnisses der Funktionen.

e) Die Einschränkungen, welche die gemeinsamen Wurzeln von φ' und ψ' betreffen, hat man bei den gewöhnlichen Anwendungen niemals Gelegenheit zu berücksichtigen. Es ist aber nützlich von der Möglichkeit unterrichtet zu sein, daß das Verhältnis der Funktionen oszilliert, obwohl das Verhältnis der Derivierten nach einem Grenzwert konvergiert. So ist z. B., wenn man

$$\varphi(x) = x + \sin x \cos x, \quad \psi(x) = (x + \sin x \cos x)\, e^{\sin x}$$

setzt, klar, daß bei unendlich zunehmendem x das Verhältnis der Funktionen unaufhörlich zwischen e und $\frac{1}{e}$ oszilliert; dagegen konvergiert das Verhältnis der Derivierten

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{2e^{-\sin x} \cdot \cos x}{x + (2 + \sin x)\cos x}$$

nach Null, da der Nenner endlich bleibt, während der Nenner mit x ins Unendliche wächst. Dies liegt an dem gleichzeitigen Verschwinden von $\varphi'(x)$ und $\psi'(x)$ allemal, wenn x durch eine der Wurzeln von $\cos x$ hindurchgeht, unter denen es bekanntlich immer solche gibt, die größer sind als eine beliebig angegebene Zahl.

312. Übungen. a) Welches ist für unendlich zunehmendes x der Grenzwert von $x^n e^{-x}$? Offenbar ist dieser Grenzwert null für $n \leq 0$. Wenn ferner n positiv ist, so sei ν die größte nicht positive unter den Zahlen $n-1$, $n-2$, ... Man hat für unendliches x

$$\lim x^n e^{-x} = \lim \frac{x^n}{e^x} = n \lim \frac{x^{n-1}}{e^x} = n(n-1) \lim \frac{x^{n-2}}{e^x} = \cdots$$

$$= n(n-1)(n-2)\ldots(\nu+1) \lim \frac{x^\nu}{e^x} = 0.$$

Mit andern Worten, e^x wächst schneller ins Unendliche als jede Potenz von x. Daraus ergibt sich, wenn man x in $\log x$ verwandelt, daß diese Funktion so langsam ins Unendliche wächst, daß jede Potenz von ihr mit einem noch so großen Exponenten weniger rasch wächst als x. Dies kann man in direkter Weise mit Hilfe des Theorems von L'Hospital konstatieren, indem man schreibt

$$\lim \frac{\log^n x}{x} = n \lim \frac{\log^{n-1} x}{x} = \cdots = n(n-1)\cdots(\nu+1) \lim \frac{\log^\nu x}{x} = 0.$$

Der Grenzwert von $x^{\frac{1}{x}}$ für unendliches x läßt sich (unter Erinnerung an die Stetigkeit von $\log x$) in folgender Weise berechnen:

$$\lim \log x^{\frac{1}{x}} = \lim \frac{\log x}{x} = 0, \quad \log \lim x^{\frac{1}{x}} = 0, \quad \lim x^{\frac{1}{x}} = 1.$$

Wenn man in den vorstehenden Resultaten x in $\frac{1}{x}$ verwandelt, so sieht man, daß

$$\lim_{x=0} x \log^n x = 0, \quad \lim_{x=0} x^x = 1$$

ist.

b) Soll der Grenzwert von $\cos x \cdot \log \sin x - \log \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ für nach Null konvergierendes x berechnet werden, so beginne man damit, den vorgelegten Ausdruck auf folgende Form zu bringen:

$$\log 2 \cdot \cos x + (1 + \cos x) \log \cos \frac{x}{2} - (1 - \cos x) \log \sin \frac{x}{2} \cdot$$

Der erste Bestandteil konvergiert nach $\log 2$, der zweite nach 0 und der dritte, welcher offenbar gleich $-\sin^2 \frac{x}{2} \log\left(\sin^2 \frac{x}{2}\right)$ ist, konvergiert ebenfalls nach 0 nach dem, was wir am Ende der vorigen Übung gesehen haben. Es ist also

$$\lim_{x=0} \left(\cos x \cdot \log \sin x - \log \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) = \log 2.$$

c) Um ein früheres Resultat zu verifizieren (vgl. § 270, a) bemerke man, daß, wenn x nach Null konvergiert,

$$\lim \frac{\sin x}{x} = \lim \frac{\cos x}{1} = 1, \quad \lim \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim \frac{1}{\cos^2 x} = 1$$

ist. Das Theorem von L'Hospital führt ferner, immer für nach Null konvergierendes x, zu folgenden Resultaten:

$$\lim \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{b - \sqrt{b^2 - x^2}} = \lim \frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{b}{a},$$

$$\lim \frac{a^x - b^x}{c^x - d^x} = \lim \frac{a^x \log a - b^x \log b}{c^x \log c - d^x \log d} = \frac{\log \frac{a}{b}}{\log \frac{c}{d}};$$

$$\lim \frac{\sin x - x\cos x}{x^3} = \frac{1}{3} \lim \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{3},$$

$$\lim \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{3} \lim \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{6} \lim \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{6},$$

$$\lim \frac{2x - 3\sin x + x\cos x}{x^5} = \frac{1}{5} \lim \frac{2 - 2\cos x - x\sin x}{x^4}$$

$$= \frac{1}{20} \lim \frac{\sin x - x\cos x}{x^3} = \frac{1}{60},$$

$$\lim \frac{(9 + 6\cos x)x - (14 + \cos x)\sin x}{x^7} = \frac{2}{7} \lim \frac{4\sin\frac{x}{2} + \sin x \cos\frac{x}{2} - 3x\cos\frac{x}{2}}{x^6}$$

$$= \frac{3}{70} \lim \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{140}.$$

d) Analog erhält man

$$\lim \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \frac{1}{3} \lim \frac{1 - \cos^2 x}{x^2\cos^2 x} = \frac{1}{3} \lim \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

oder in anderer Weise

$$\lim \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \lim \frac{\sin x - x\cos x}{x^3 \cos x} = \lim \frac{\sin x - x\cos x}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

Wenn man zur Berechnung des Grenzwertes von $\frac{1}{x^2} - \cot^2 x$ damit beginnt diesen Ausdruck auf die Form

$$\frac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \frac{\sin x + x\cos x}{x} \cdot \frac{\sin x - x\cos x}{x^3} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x}$$

zu bringen, so sieht man sofort (ohne Anwendung des Theorems von L'Hospital), daß der erste Faktor nach 2 konvergiert, und weiß bereits, daß die andern bezüglich nach $\frac{1}{3}$ und 1 konvergieren. Also ist

$$\lim_{x=0} \left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x\right) = \frac{2}{3}.$$

e) Da wir wissen (§ 270, d), daß $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$ für nach Null konvergierendes x dem Grenzwert e zustrebt, so ist es natürlich sich zu fragen, wie sich die Differenz $e - (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ verhält, und man wird auf diese Weise zu der folgenden Rechnung geführt:

$$\lim \frac{e - (1 + x)^{\frac{1}{x}}}{x} = e \lim \frac{(1 + x)\log(1 + x) - x}{x^2}$$

$$= \frac{e}{2} \lim \frac{\log(1 + x)}{x} = \frac{e}{2} \lim \frac{1}{1 + x} = \frac{e}{2}.$$

Ebenso ist

$$\lim \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}-e}{x^2} = \frac{e}{4} \lim \frac{2x+x^2-2(1+x)\log(1+x)}{x^3}$$
$$= \frac{e}{6} \lim \frac{x-\log(1+x)}{x^2} = \frac{e}{12} \lim \frac{1}{1+x} = \frac{e}{12}.$$

f) Will man für unendliches x den Grenzwert von

$$x - \sqrt{(x-a)(x-b)}$$

berechnen, so ist es zweckmäßig zu setzen $x = \frac{1}{z}$, um dann z nach Null konvergieren zu lassen. Auf diese Weise wird der vorgelegte Ausdruck gleich dem Quotienten von $1 - \sqrt{(1-az)(1-bz)}$ durch z und daher sein Grenzwert gleich dem Grenzwert von

$$\frac{1}{2} \sqrt{(1-az)(1-bz)} \left(\frac{a}{1-az} + \frac{b}{1-bz}\right)$$

für $z = 0$. Also ist

$$\lim_{x=\infty} \left(x - \sqrt{(x-a)(x-b)}\right) = \frac{1}{2}(a+b).$$

Zu diesem Resultat gelangt man sofort, ohne von dem Theorem von L'Hospital Gebrauch zu machen, wenn man dem vorgelegten Ausdruck die Form gibt

$$\frac{(a+b)x - ab}{x + \sqrt{(x-a)(x-b)}} = \frac{a+b-\frac{ab}{x}}{1+\sqrt{\left(1-\frac{a}{x}\right)\left(1-\frac{b}{x}\right)}}.$$

g) Allgemeiner gilt folgendes: So oft sich für zwei Funktionen φ und ψ, die mit x ins Unendliche wachsen, eine Funktion f derart bestimmen läßt, daß die Verhältnisse von φ und ψ zu f nach einem endlichen, von Null verschiedenen Grenzwert k konvergieren, und wenn man zudem den Grenzwert l von $(\varphi' - \psi')\frac{\sqrt{f}}{f'}$ kennt, so ist es leicht, den Grenzwert von $\sqrt{\varphi} - \sqrt{\psi}$ zu berechnen. In der Tat ist

$$\lim\left(\sqrt{\varphi} - \sqrt{\psi}\right) = \lim \frac{\varphi - \psi}{\sqrt{\varphi} + \sqrt{\psi}} = \frac{1}{2\sqrt{k}} \lim \frac{\varphi - \psi}{\sqrt{f}} = \frac{l}{\sqrt{k}}.$$

Für $f = \varphi = x^2$ und $\psi = (x-a)(x-b)$ kommt man wieder zu dem vorigen Übungsbeispiel. In analoger Weise behandelt man den Fall der n-ten Wurzeln und findet

$$\lim\left(\sqrt[n]{\varphi} - \sqrt[n]{\psi}\right) = \frac{1}{n} \lim \frac{\varphi' - \psi'}{x^{n-2}},$$

wenn der Grenzwert auf der rechten Seite existiert und man annimmt, daß die Verhältnisse von φ und ψ zu x^n für unendliches x nach 1 konvergieren. Insbesondere ist

$$\lim_{x=\infty}\left(\sqrt[n]{x^n + ax^{n-1} + \cdots} - \sqrt[n]{x^n + bx^{n-1} + \cdots}\right) = \frac{a-b}{n}.$$

Diskussion der Funktionen.

313. Zu den wichtigsten Anwendungen des Theorems von L'Hospital gehört die Aufsuchung der absoluten Minima und Maxima (§ 301) der Funktionen. Wir haben bereits gesehen (§ 302), daß, wenn die Funktion $f(x)$, die eine einzige Derivierte $f'(x)$ hat, für $x=a$ durch ein Minimum oder ein Maximum hindurchgeht, $f'(a)=0$ ist. Jetzt wollen wir annehmen, daß a die successiven Derivierten von $f(x)$ bis zur n-ten ausschließlich zum Verschwinden bringt, oder daß, wie man zu sagen pflegt (§ 304, b), a eine vielfache Wurzel $(n-1)$-ter Ordnung von $f'(x)$ ist. Durch wiederholte Anwendung des Theorems von L'Hospital erhält man, wenn x von rechts oder links nach a konvergiert,

$$\lim \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n} = \frac{1}{n} \lim \frac{f'(x)}{(x-a)^{n-1}} = \cdots = \frac{1}{n!} \lim \frac{f^{(n-1)}(x)}{x-a};$$

und da nach der Definition von $f^{(n)}(a)$

$$\lim \frac{f^{(n-1)}(x)}{x-a} = \lim \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} = f^{(n)}(a)$$

ist, so sieht man, daß

$$\lim \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

ist. Man bemerke, daß man zu demselben Resultat auch dadurch gelangt, daß man das Theorem von L'Hospital noch einmal mehr anwendet. Dann würde man aber die Existenz von $f^{(n)}(x)$ in der Umgebung von a zulassen, während es für uns genügen muß, daß $f^{(n)}(a)$ existiert. Zu dem erhaltenen Resultat zurückkehrend bemerke man, daß, wenn x nach a konvergiert, $f(x)-f(a)$ schließlich das Zeichen von $(x-a)^n f^{(n)}(a)$ annimmt und behält. Dieses Zeichen ändert sich mit demjenigen von $x-a$, wenn n ungerade ist, bleibt dagegen ungeändert und fällt mit demjenigen von $f^{(n)}(a)$ zusammen, wenn n gerade ist. Daraus folgt, daß man im ersten Falle weder ein Maximum noch ein Minimum hat und im zweiten Falle sicher ein Minimum oder ein Maximum. Mit andern Worten: Die Werte von x, welche eine Funktion von x zu einem Minimum oder Maximum machen, sind die einfachen Wurzeln der Derivierten oder die vielfachen Wurzeln von ungerader Ordnung. Je nachdem der Wert von $f^{(n)}(a)$ positiv oder negativ ist, hat man (im Falle eines geraden n) ein Minimum oder ein Maximum oder kann man (im Falle eines ungeraden n) sagen, daß die Funktion wachsend oder abnehmend ist. Wohlbemerkt wird hierbei immer vorausgesetzt, daß diese n-te Derivierte einzig ist. Sonst könnte es, wie wir sehen werden, vorkommen, daß der ausgesprochene Satz ungültig wird.

314. Übungen. a) Unter den Rechtecken, die einen gegebenen Umfang haben, ist das Quadrat dasjenige, welches die größte Fläche umschließt. In der Tat, wenn x die Länge einer Seite und $2a$ die des Umfanges ist, so wird der Inhalt gemessen durch die Zahl $y = x(a-x)$. Nun verschwindet die erste Derivierte $y' = a - 2x$ für $x = \frac{a}{2}$, und da die zweite Derivierte negativ ist, so sieht man, daß für $x = \frac{a}{2}$ die Funktion den Maximalwert $\frac{a^2}{4}$ erreicht. Ebenso ist unter allen Rechtecken, die den Flächeninhalt a^2 haben, das Quadrat dasjenige, welches den kleinsten Umfang hat. In der Tat, wenn x die Länge einer Seite und $2y$ die des Umfanges ist, so hat man $y = x + \frac{a^2}{x}$, $y' = 1 - \frac{a^2}{x^2}$, $y'' = \frac{2a^2}{x^3}$. Die erste Derivierte verschwindet für $x = a$ und für $x = -a$. Für diese Werte ist $y'' > 0$ bezw. $y'' < 0$, und die Funktion hat daher ein Minimum $2a$ und ein Maximum $-2a$. Aber nur das erstere liefert eine Antwort auf die vorgelegte Frage, da diese fordert, daß $x > 0$ ist.

b) Wir stellen uns die Aufgabe, aus einem rechteckigen Blatte eine Schachtel größten Volumens zu konstruieren in der Weise, daß wir an den Ecken vier gleiche Quadrate fortschneiden. Sind a und b die Dimensionen des Blattes und x die Höhe, welche man der Schachtel geben will, so wird ihr Volumen gemessen durch die Zahl

$$y = x(a-2x)(b-2x) = abx - 2(a+b)x^2 + 4x^3.$$

Setzt man die erste Ableitung $y' = ab - 4(a+b)x + 12x^2$ gleich Null, so erhält man

$$x = \tfrac{1}{6}\left(a + b \pm \sqrt{a^2 - ab + b^2}\right).$$

Die zweite Derivierte $y'' = -4(a+b) + 24x$ wird gleich

$$\pm 4\sqrt{a^2 - ab + b^2}.$$

Um das Maximum von y zu haben, muß man also das Zeichen $-$ festhalten, d. h. man hat $x = \frac{1}{6}\left(a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2}\right)$ zu nehmen. Dieser Wert ist immer zwischen $\frac{1}{6}a$ und $\frac{1}{6}b$ enthalten. Übrigens ist die andere Lösung illusorisch, da sie einen Wert gibt, der größer ist als die Hälfte der kleinsten Dimension des Blattes.

c) Wenn man die Funktion $y = x^{\frac{1}{x}}$ in dem Intervall $(0, \infty)$ diskutieren will, so beginne man mit der Bemerkung, daß man, wenn x von rechts nach Null konvergiert, nur $x = \frac{1}{z}$ zu setzen und z ins Unendliche wachsen zu lassen braucht, um zu finden $y = \frac{1}{z^z}$, $\lim y = 0$. Für $x = 1$ ist $y = 1$ und für unendlich zunehmendes x strebt die Funktion wieder dem Werte 1 zu (§ 312, a). Man begreift also, daß die Funktion, wenn x von 1 bis Unendlich variiert, durch ein Minimum oder durch ein Maximum hindurchgehen muß, und es ist leicht vorauszusehen, daß man ein Maximum hat, da für $x > 1$ auch $y > 1$ ist. Um sich darüber Gewißheit zu verschaffen, beachte man, daß die Derivierte

$$y' = x^{\frac{1}{x} - 2}(1 - \log x)$$

für $x < e$ positiv ist und für $x > e$ negativ wird, und daß daher die Funktion, welche zuerst wachsend ist, später abnimmt. Sie erreicht also für $x = e$ den Maximalwert $e^{\frac{1}{e}} = 1{,}444667\ldots$ Wenn man mit Hilfe der Untersuchung von y'' konstatieren will, daß die Funktion tatsächlich durch ein Maximum hindurchgeht und nicht durch ein Minimum, so bemerke man, daß aus

$$\frac{y'}{y} = \frac{1 - \log x}{x^2} \quad \text{folgt} \quad \frac{yy'' - y'^2}{y^2} = -\frac{3 - 2\log x}{x^3}.$$

Setzt man nun $x = e$, $y = e^{\frac{1}{e}}$, $y' = 0$, so erhält man $y'' = -e^{\frac{1}{e} - 3}$. Dies genügt, um behaupten zu können, daß $e^{\frac{1}{e}}$ der Maximalwert von $x^{\frac{1}{x}}$ ist.

d) Wir stellen uns die Aufgabe, die Basen derjenigen Logarithmensysteme zu finden, in welchen ein Logarithmus existieren kann, der gleich der entsprechenden Zahl ist. Es sei a die unbekannte Basis, und man untersuche, ob die Funktion $y = x - \operatorname{Log} x$ verschwinden kann. Es ist klar, daß für genügend kleines positives x und ebenso für hinreichend großes x die Funktion y positiv ist. Damit dieselbe verschwinden könne, ist also notwendig und hinreichend, daß ihr kleinster Wert negativ oder null ist. Dieses Minimum ist durch die Gleichung $y' = 1 - \frac{\operatorname{Log} e}{x} = 0$ bestimmt, und um sich zu überzeugen, daß es sich wirklich um ein Minimum handelt und nicht um ein Maximum, braucht man nur daran zu denken, daß für $x < \operatorname{Log} e$ die Funktion abnimmt, um dann von $x = \operatorname{Log} e$ ab zu wachsen zu beginnen. Der kleinste Wert von y ist also $\operatorname{Log} e - \operatorname{Log}\operatorname{Log} e = \operatorname{Log}\left(\frac{e}{\operatorname{Log} e}\right)$. Damit dieser Wert negativ oder null sei, ist es notwendig, daß man hat $e \leqq \operatorname{Log} e$, d. h. $1 \leqq \operatorname{Log} e^{\frac{1}{e}}$, und folglich $a \leqq e^{\frac{1}{e}}$.

e) Welchen Bedingungen müssen die Zahlen p und q genügen, damit das Trinom $x^3 + px + q$ für drei verschiedene reelle Werte von x verschwinde? Soll die Funktion $y = x^3 + px + q$ dreimal verschwinden können, wenn x von $-\infty$ bis $+\infty$ variiert, so ist vor allem nötig (§ 304, b), daß die Derivierte $y' = 3x^2 + p$ für zwei verschiedene reelle Werte von x verschwinden kann. Dies erfordert, daß $p < 0$ ist. Man nehme diese Bedingung als erfüllt an und bemerke, daß in dem ersten und in dem dritten der Intervalle

$$\left(-\infty,\ -\sqrt{-\frac{p}{3}}\right),\ \left(-\sqrt{-\frac{p}{3}},\ \sqrt{-\frac{p}{3}}\right),\ \left(\sqrt{-\frac{p}{3}},\ \infty\right)$$

$y' > 0$ ist, während in dem mittleren Intervalle $y' < 0$ ist. Also kann y in jedem dieser Intervalle nur einmal verschwinden, und damit sie in einem solchen Intervalle wirklich verschwinde, ist notwendig und hinreichend, daß sie an dessen Grenzen entgegengesetzte Vorzeichen hat. Da sie nun an den Grenzen des mittleren Intervalles die Werte

$$-\frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}}+q, \quad \frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}}+q$$

(das Maximum bezw. Minimum im absoluten Sinne) annimmt, so ist vor allen Dingen notwendig, daß diese Zahlen entgegengesetzte Vorzeichen haben, d. h. daß man hat

$$\left(-\frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}}+q\right)\left(\frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}}+q\right)<0 \quad \text{oder} \quad 4p^3+27q^2<0.$$

Diese Bedingung ist auch hinreichend; denn wenn sie erfüllt ist, so ist notwendig $p<0$, und die Funktion, welche im mittleren Intervall abnehmend ist, nimmt das Zeichen $+$ an dessen unterer Grenze, das Zeichen $-$ an der oberen Grenze an und verschwindet daher auch in den beiden andern Intervallen.

f) Wir wollen beweisen, daß bei der Ellipse der Abstand des Mittelpunktes von einer beliebigen Normale die Differenz der Halbachsen nicht übertrifft. Der Gleichung der Ellipse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ kann man genügen, indem man setzt $x=a\cos\varphi$, $y=b\sin\varphi$, wo φ von 0 bis 2π variiert. Den Neigungskoeffizienten der Tangente (§ 293) erhält man, indem man die Gleichung der Kurve deriviert:

$$b^2x+a^2yy'=0, \quad y'=-\frac{b^2x}{a^2y}=-\frac{b\cos\varphi}{a\sin\varphi}.$$

Also ist die Gleichung der Normale

$$y-b\sin\varphi=\frac{a\sin\varphi}{b\cos\varphi}(x-a\cos\varphi),$$

d. h. $ax\sin\varphi-by\cos\varphi=(a^2-b^2)\sin\varphi\cos\varphi$. Mithin ist der Abstand dieser Geraden vom Mittelpunkt

$$h=\frac{(a^2-b^2)\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}}.$$

Jetzt müßten wir die Derivierte von h nach φ berechnen und sie gleich Null setzen. Es ist hier aber zweckmäßig zu bemerken, daß man hat

$$\left(\frac{a^2-b^2}{h}\right)^2=\frac{a^2}{\cos^2\varphi}+\frac{b^2}{\sin^2\varphi}=a^2+b^2+a^2\operatorname{tg}^2\varphi+b^2\cot^2\varphi,$$

sodaß also die Aufsuchung des größten Wertes von h reduziert ist auf die Aufsuchung des kleinsten Wertes der Funktion $a^2\operatorname{tg}^2\varphi+b^2\cot^2\varphi$, d. h. der Summe von zwei veränderlichen Größen, deren Produkt den konstanten Wert a^2b^2 hat. Man kann daher unter Benutzung des in der ersten Übung erhaltenen Resultates sofort behaupten, daß das Maximum von h eintritt, wenn $a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi$ und $b^2 \cot^2 \varphi$ beide gleich ab werden, d. h. für $\operatorname{tg} \varphi = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}$, in welchem Falle man hat

$$\left(\frac{a^2 - b^2}{h}\right)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2, \text{ mithin } h = a - b.$$

g) Man kann beweisen, daß das Licht die kürzestmögliche Zeit braucht, wenn es von einem Punkte nach einem andern durch zwei homogene Mittel hindurchgeht, die durch eine Ebene getrennt sind. Es seien in der Tat a und b die Abstände der Punkte, die in den beiden Mitteln betrachtet werden, von der Trennungsebene; φ sei der Einfallswinkel, ψ der Brechungswinkel, nv und v seien die Geschwindigkeiten des Lichtes in den beiden Mitteln; und man bemerke, daß die zum Übergange von dem einen zu dem andern Punkte verbrauchte Zeit

$$t = \frac{1}{v}\left(\frac{a}{n \cos \varphi} + \frac{b}{\cos \psi}\right)$$

ist. Die Winkel φ und ψ sind aneinander durch die Relation gebunden

$$a \operatorname{tg} \varphi + b \operatorname{tg} \psi = \text{Const.},$$

aus welcher durch Derivation nach φ folgt

$$\frac{a}{\cos^2 \varphi} + \frac{b \psi'}{\cos^2 \psi} = 0.$$

Nun hat man

$$t' = \frac{1}{v}\left(\frac{a \sin \varphi}{n \cos^2 \varphi} + \frac{b \sin \psi}{\cos^2 \psi} \psi'\right) = \frac{a(\sin \varphi - n \sin \psi)}{n v \cos^2 \varphi},$$

und man sieht, daß $\sin \varphi / \sin \psi = n$ sein muß, damit t' verschwinde. Dies ist gerade das wohlbekannte Brechungsgesetz, welches von Descartes entdeckt und von Fermat und Leibniz als ein spezieller Fall des allgemeinen Gesetzes der Ökonomie hingestellt wurde, das die Manifestationen aller Naturphänomene beherrscht, auch derjenigen, die für mathematische Untersuchungen unzugänglich scheinen[1].

h) Bei den geometrischen Anwendungen kommt es vielfach vor, daß das zu ermittelnde Minimum (oder Maximum) ein relatives (§ 301) ist und sich auf ein bestimmtes Intervall bezieht, in welchem die unabhängige Veränderliche durch die Bedingungen des Problems zu bleiben gezwungen ist. Alsdann kann es sehr wohl vorkommen, daß die Derivierte nicht null ist und daß folglich die Untersuchung fruchtlos wird. Man muß deshalb, so oft die unabhängige Veränderliche ein bestimmtes Intervall nicht verlassen darf, darauf bedacht sein, diese Veränderliche anders zu wählen, oder direkt erforschen, ob nicht zufällig an den Grenzen ein Minimum oder ein Maximum eintritt, welches der vorgelegten Aufgabe entsprechen könnte, obwohl es kein Minimum oder Maximum im absoluten Sinne ist. Ein sehr einfaches Beispiel bietet sich

1) Man lese hierüber das interessante Kapitel über die Richtung der Bewegung in den „First principles" von Spencer.

uns bei der Aufsuchung der kleinsten oder größten unter den Sehnen eines Kreises, die einen festen Endpunkt A und einen beweglichen M haben. Es ist a priori klar, daß man das Minimum $r = 0$ hat, wenn M mit A zusammenfällt, und das Maximum $r = 2a$, wenn M mit dem Punkte B zusammenfällt, der auf dem Kreise dem Punkte A diametral gegenüberliegt. Wählt man AB als Abscissenachse und A als Anfangspunkt, so hat man $r^2 = 2ax$, mithin $rr' = a$, und man sieht, daß r' weder in A noch in B verschwindet. Dies liegt daran, daß die Variabilität von x auf das Intervall $(0, 2a)$ beschränkt ist und das gesuchte Minimum und Maximum gerade an den Grenzen eintreten. Wenn man als unabhängige Veränderliche den Winkel $\theta = \widehat{MAB}$ wählt, so hat man $r = 2a\cos\theta$, $r' = -2a\sin\theta$ und findet nur das Maximum, welches dem Werte $\theta = 0$ entspricht. Dies erklärt sich durch die Bemerkung, daß θ nur in dem Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ variiert, an dessen Grenzen das zu dem Intervall gehörige Minimum $r = 0$ eintritt, während das Maximum $r = 2a$ für $\theta = 0$ stattfindet, d. h. für einen Wert, der ins Innere des genannten Intervalles fällt. Dieses Maximum ist also auch eines im absoluten Sinne, und es muß daher r' verschwinden. Jede Schwierigkeit hört auf, wenn sich der Punkt A verschiebt, z. B. nach B zu, und in die Entfernung b vom Zentrum gelangt, in welchem Falle man hat $r^2 - 2br\cos\theta + b^2 = a^2$. Deriviert man nun und setzt $r' = 0$, so erhält man $\sin\theta = 0$, d. h. $\theta = 0$ und $r = a + b$, oder $\theta = \pi$ und $r = a - b$. Eine neue Derivation liefert

$$r'' = \frac{br\cos\theta}{b\cos\theta - r} = \frac{\pm b(a \pm b)}{\pm b - (a \pm b)} = \mp \frac{b}{a}(a \pm b) \lesseqgtr 0,$$

und man sieht also, daß $a + b$ der größte, $a - b$ der kleinste Wert von r ist.

i) Es sei $\varphi(x)$ eine in der Umgebung von $x = 0$ stetige Funktion, die aber für $x = 0$ unstetig von erster Art ist, und zwar sei $\varphi(-0) < 0$, $\varphi(+0) > 0$. Z. B. könnte man setzen $\varphi(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$, indem man bemerkt, daß $\varphi(\mp 0) = \mp 1$ ist. Die Funktion $f(x) = x^2\varphi(x)$ hat für $x = 0$ weder ein Maximum noch ein Minimum; denn in der Umgebung der Null hat die Funktion $\varphi(x)$, die stetig ist, das Vorzeichen von x, und man kann daher das Gleiche von der Funktion $f(x)$ sagen, die folglich sowohl links als auch rechts von der Null wachsend ist. Inzwischen ist

$$f'(0) = \lim_{x=0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x=0} x\varphi(x) = 0.$$

Analog ist es möglich, daß $f''(0)$ nicht existiert. Im entgegengesetzten Falle hat man aber

$$f''(0) = \lim_{x=\pm 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = 2\lim_{x=\pm 0} \frac{f(x)}{x^2} = 2\lim_{x=\pm 0} \varphi(x) = 2\varphi(\pm 0) \gtrless 0.$$

Auf alle Fälle kann man behaupten, daß nicht $f''(0) = 0$ ist. Also ist für $x=0$ die erste Derivierte von $f(x)$ null, nicht aber die zweite Derivierte, und doch ist $f(0)$ weder ein Minimum noch ein Maximum von $f(x)$. Dies klärt sich auf durch die Bemerkung, daß die zweite Derivierte nicht einzig ist.

j) Wir diskutieren schließlich die Art und Weise, wie die Funktion $\Gamma(x)$ variiert, indem wir zunächst annehmen, daß x von Null bis Unendlich variiert. Aus der Formel von Weierstraß (§ 252, b) leitet man ab, indem man auf beiden Seiten die Logarithmen nimmt,

$$\log \Gamma(x) = -\log x - \mathbf{C}x + \sum_1^{\infty} \left\{ \frac{x}{n} - \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) \right\}.$$

Wir derivieren jetzt und behalten uns vor im folgenden die Legitimität (vgl. § 285) der Derivation der rechten Seite als einer Summe, die unendlich viele Bestandteile hat, nachzuweisen:

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\frac{1}{x} - \mathbf{C} + \sum_1^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}\right) = -\mathbf{C} + \sum_1^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n-1}\right).$$

Mithin ist

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \mathbf{C} = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{x+2} + \cdots.$$

Die rechte Seite wächst mit x, und da sie für $x=1$ und für $x=2$ die Werte $0 < \mathbf{C}$ und $1 > \mathbf{C}$ annimmt, so wird sie ein einziges Mal gleich $\mathbf{C}$. Dies geschieht für einen bestimmten Wert $x=\xi$, der zwischen 1 und 2 liegt und die einzige Wurzel von $\Gamma'(x)$ ist. Da man $\Gamma'(x) < 0$ und $\Gamma'(x) > 0$ hat, je nachdem $x < \xi$ oder $x > \xi$ ist, so sieht man, daß $\Gamma(x)$ zuerst abnimmt und dann wächst, so daß $\Gamma(\xi)$ der kleinste Wert von $\Gamma(x)$ in dem Intervall $(0, \infty)$ ist. Zu demselben Schluß gelangt man durch die Bemerkung, daß

$$\frac{\Gamma''(\xi)}{\Gamma(\xi)} = \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{(\xi+1)^2} + \frac{1}{(\xi+2)^2} + \cdots > 0$$

ist. Den Wert der Wurzel ξ, die bereits in dem Intervall $(1, 2)$ isoliert ist, erhält man durch Anwendung gewisser Näherungsmethoden, von denen im fünften Buche gehandelt werden wird. Eine leichte Rechnung liefert

$$\xi = 1{,}4616321\ldots, \quad \Gamma(\xi) = 0{,}8856032\ldots$$

Wenn x von ξ nach Unendlich variiert, so überschreitet die Funktion unter beständigem Wachsen jede Grenze, da $\Gamma(x+1) \geqq [x]!$ ist. Sie wächst auch, wenn x von ξ nach Null abnimmt, und zwar wächst sie unbegrenzt, da

$$\lim_{x=0} x\Gamma(x) = \lim_{x=0} \Gamma(x+1) = \Gamma(1) = 1$$

ist.

k) Für negatives x hängen die Werte von $\Gamma(x)$ dank der Relation

$$\Gamma(x) = \frac{(-1)^n \Gamma(\varrho)}{(1-\varrho)(2-\varrho)(3-\varrho)\ldots(n-\varrho)},$$

in welcher $\varrho = x - [x]$ und $-n = [x]$ ist, von denjenigen ab, welche die

Funktion in dem Intervalle $(0, 1)$ mit Ausschluß der Grenzen annimmt. Daraus folgt, daß die Funktion in den Intervallen $(-1, 0)$, $(-2, -1)$, $(-3, -2)$, ... abwechselnd negativ und positiv ist, und daß sie in der Umgebung aller Grenzen $(0, -1, -2, -3, \ldots)$ dem absoluten Betrage nach unendlich groß wird. Man sieht also voraus, daß sie in jedem Intervalle $(-n, -n+1)$ wenigstens einmal einen größten oder kleinsten Wert erreichen muß, je nachdem n ungerade oder gerade ist. Ein solches Minimum oder Maximum hat man, wenn ϱ der Gleichung

$$\frac{\Gamma'(\varrho)}{\Gamma(\varrho)} + \frac{1}{1-\varrho} + \frac{1}{2-\varrho} + \cdots + \frac{1}{n-\varrho} = 0$$

genügt. Wenn nun ϱ von 0 bis 1 variiert, so nimmt die linke Seite beständig zu von $-\infty$ bis $+\infty$ und wird daher nur ein einziges Mal gleich Null für einen bestimmten Wert von ϱ, der hiermit als eine Funktion ϱ_n von n definiert ist. Es gibt also in $(-n, -n+1)$ ein einziges Minimum oder Maximum von $\Gamma(x)$, welches eintritt, wenn x den Wert $x_n = -n + \varrho_n$ annimmt. Nun ersieht man aus

$$-\frac{\Gamma'(\varrho_n)}{\Gamma(\varrho_n)} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$

daß für unendlich zunehmendes n die linke Seite (wie die rechte) unbegrenzt wachsen muß. Mithin konvergiert ϱ_n nach Null. Da überdies

$$\lim_{x=0} x\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -1$$

ist, so hat man

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{\varrho_n}{1-\varrho_n} + \frac{\varrho_n}{2-\varrho_n} + \cdots + \frac{\varrho_n}{n-\varrho_n}\right) = 1,$$

und da die Summe in Klammern zwischen

$$\varrho_n H_n \quad \text{und} \quad \frac{\varrho_n}{1-\varrho_n} + \varrho_n H_{n-1}$$

liegt, so folgt $\lim\limits_{n=\infty} \varrho_n H_n = 1$ oder $\lim\limits_{n=\infty} \varrho_n \log n = 1$. Dies vorausgeschickt ist

$$|\Gamma(x_n)| < \frac{\Gamma(\varrho_n + 1)}{(1-\varrho_n)\varrho_n \log n} \cdot \frac{\log n}{(n-1)!},$$

und da auf der rechten Seite der erste Faktor nach 1 und der zweite nach 0 konvergiert, so hat man $\lim\limits_{n=\infty} \Gamma(x_n) = 0$. Daraus folgt, daß die Funktion $\Gamma(x)$ jeden von Null verschiedenen Wert (unendlich oft) annimmt[1]). Mit andern Worten, die Gleichung $\Gamma(x) = k$, welche für $k = 0$ keine Wurzeln hat, läßt für jeden andern Wert von k unendlich viele solche zu.

---

1) Man vergleiche auf S. 65 der Monographie „La fonction gamma“ von M. Godefroy die darstellende Kurve von $y = \Gamma(x)$.

Reihenentwickelungen.

Reihen von Funktionen.

315. Wir wollen uns jetzt speziell mit denjenigen Funktionen beschäftigen, welche durch unendliche Reihen definiert sind. Die Werte von x, für welche eine gegebene Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$, deren Glieder Funktionen von x sind, konvergiert, können ein Intervall oder mehrere bilden, in welchen dann also die Summe der Reihe als Funktion von x definiert ist. Wenn man irgend ein Intervall (a, b) betrachtet, in welchem die Reihe konvergiert, so ist auch der Rest $\varphi_n(x)$, d. h. die Summe der Reihe, die aus der gegebenen Reihe durch Unterdrückung der n ersten Glieder entsteht, eine Funktion von x, die in dem genannten Intervalle definiert ist. Wir wissen (§ 180), daß, wenn x ins Unendliche wächst, der Rest nach Null konvergiert. Es läßt sich also (§ 122, b), wenn ε positiv und beliebig klein gegeben ist, für jeden in (a, b) enthaltenen Wert von x eine Zahl ν finden derart, daß der absolute Betrag von φ_n immer kleiner als ε bleibt, wenn n größer als ν ist. Gelingt es ν unabhängig von x zu bestimmen, so heißt die Reihe gleichmäßig konvergent. Denken wir uns mit andern Worten jedem Werte von x entsprechend für ν (welches wir als ganzzahlig voraussetzen) den kleinstmöglichen Wert gewählt, so können wir sagen, ν sei eine Funktion von x, die in dem Intervall (a, b) definiert ist. Wenn diese Funktion in diesem Intervalle endlich ist, wie auch ε gewählt sein mag, so besitzt sie daselbst (§ 256) eine obere Grenze (die im vorliegenden Falle ein Maximum ist), und offenbar wird für ein n, welches größer als diese Grenze ist, immer sein $|\varphi_n(x)| < \varepsilon$, wie man auch x in dem Intervall (a, b) fixieren mag. In diesem Falle ist die Konvergenz gleichmäßig. Es kann aber auch vorkommen, daß für einen Wert ε von passender Kleinheit (und a fortiori für jeden noch kleineren Wert) die Funktion ν in dem betrachteten Intervalle nicht endlich ist. Alsdann ist es unmöglich, einen Wert n zu bestimmen, der für alle Werte von x in (a, b) derselbe ist und von welchem ab φ_n absolut genommen kleiner bleibt als ε. Mithin konvergiert die Reihe nicht gleichmäßig.

316. Theorem I. Für die gleichmäßige Konvergenz einer Reihe von Funktionen von x in einem gegebenen Intervalle ist es notwendig und hinreichend, daß der Rest $\varphi_n(x)$ auch dann nach Null konvergiert, wenn man x innerhalb des betrachteten Intervalls in beliebiger Weise mit n variieren läßt.

Aus der Definition der gleichmäßigen Konvergenz ergibt sich, daß, wenn die Reihe gleichmäßig konvergiert, immer $\lim\limits_{n=\infty} \varphi_n(x_n) = 0$ ist, wie auch die Folge $x_1, x_2, x_3, \ldots$ beschaffen sein mag, deren Glieder in dem betrachteten Intervalle gewählt sind. Umgekehrt ist, wenn dies zutrifft, die Reihe gleichmäßig konvergent. Um sich davon zu überzeugen, braucht man nur zu zeigen, daß es, wenn die Konvergenz nicht gleichmäßig ist, in dem genannten Intervalle wenigstens eine Folge von Zahlen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ gibt derart, daß $\varphi_n(x_n)$ nicht nach Null konvergiert. In der Tat ist unter der genannten Voraussetzung, wenn eine positive Zahl ε von passender Kleinheit gegeben ist, die im vorigen Paragraphen definierte Funktion ν nicht endlich. Daraus folgt, daß man eine Folge $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ von Werten von ν finden kann, die ins Unendliche wachsen und zu Werten von x gehören, welche immer mit $x_\alpha, x_\beta, x_\gamma, \ldots$ bezeichnet werden können. Wie man nun auch die andern Werte von x_n wählen mag, so ist klar, daß $\varphi_n(x)$ nicht nach Null konvergieren kann, da man für $n = \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ hat $|\varphi_n(x)| \geqq \varepsilon$.

317. Beispiele. a) Die Reihe

$$(1) \qquad (1-x) + (x - \tfrac{1}{2}x^2) + (\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3) + (\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4) + \cdots$$

konvergiert gleichmäßig in dem Intervall $(-1, 1)$, da der Rest $\frac{x^n}{n}$ absolut genommen kleiner bleibt als ε, wenn n die Zahl $\frac{1}{\varepsilon}$ übertrifft, die von x unabhängig ist. Nicht so ist es bei der Reihe

$$(2) \qquad (1-x) + (x - x^2) + (x^2 - x^3) + (x^3 - x^4) + \cdots,$$

die in demselben Intervalle mit Ausschluß der unteren Grenze konvergiert; denn der Rest ist x^n, wenn $x < 1$ ist, und man kann nicht ν in der Weise fixieren, daß für $n > \nu$ und für jeden Wert von x in unserem Intervalle $|x^n| < \varepsilon$ ist. In der Tat, wenn man zugibt, daß x sich 1 beliebig nähern kann, so braucht man nur zu setzen $x = 1 - \frac{1}{n}$, damit der Ausdruck des Restes $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ wird und also für unendliches n nicht nach Null konvergiert. Es ist aber klar, daß die Reihe gleichmäßig konvergiert in jedem Intervall, welches ganz im Innern von $(-1, 1)$ liegt.

b) Die Reihe $1 + x + x^2 + \cdots$, welche in dem Intervalle $(-1, 1)$ mit Ausschluß der Grenzen konvergiert, ist gleichmäßig konvergent in einem Intervalle $(-\alpha, \alpha)$, dessen obere Grenze kleiner als 1 ist, aber beliebig nahe an 1 liegen kann. In der Tat, wenn die positive Zahl ε beliebig fixiert ist und ν so groß gewählt wird, daß α^ν nicht größer als $(1-\alpha)\varepsilon$ ist, so wird offenbar für $n > \nu$ der Rest $\frac{x^n}{1-x}$ absolut genommen kleiner bleiben als ε. Von der Reihe $1 + 2x + 3x^2 + \cdots$, die in demselben Intervalle konvergiert (§ 247, a), läßt sich das Gleiche sagen. Man braucht nur ν derart zu bestimmen, daß $(\nu + 1)\alpha^\nu$ nicht größer als

$(1-\alpha)^2 \varepsilon$ ist. Diese beiden Bestimmungen von ν sind möglich, da $\nu^p \alpha^\nu$ bei beliebigem p und für unendlich zunehmendes ν nach Null konvergiert (§ 312, a).

c) Die Summe der n ersten Glieder der Reihe

$$(3) \qquad (x - xe^{-x^2}) + (xe^{-x^2} - 2xe^{-2x^2}) + (2xe^{-2x^2} - 3xe^{-3x^2}) + \cdots$$

ist $x - nxe^{-nx^2}$ und konvergiert für unendlich zunehmendes n nach x. Die Reihe konvergiert also, aber nicht gleichmäßig; denn setzt man $x = \frac{1}{n}$, so wird der Rest nxe^{-nx^2} gleich $e^{-\frac{1}{n}}$ und konvergiert nicht nach Null. Ebenso ist die Reihe

$$\frac{x}{1+x} + \frac{x}{(1+x)(1+2x)} + \frac{x}{(1+x)(1+2x)(1+3x)} + \cdots$$

konvergent für $x \geqq 0$, da die Summe der n ersten Glieder $1 - \frac{1}{1+nx}$ ist und für unendlich zunehmendes n den Grenzwert 1 hat. Sie ist aber nicht gleichmäßig konvergent, da der Rest gleich $\frac{1}{2}$ wird, wenn man x den Wert $\frac{1}{n}$ beilegt, welcher jedem Intervalle angehört, dessen untere Grenze 0 ist. Dieselbe Reihe konvergiert dagegen gleichmäßig in jedem Intervalle, dessen untere Grenze α positiv ist; denn wenn ε positiv und beliebig klein gegeben ist, so genügt es n größer als $\frac{1-\varepsilon}{\alpha\varepsilon}$, eine Zahl, die unabhängig von x ist, zu wählen, um sicher zu sein, daß der n-te Rest kleiner wird und bleibt als ε.

318. Theorem II. Wenn die absoluten Beträge der Glieder einer Reihe von Funktionen, die in einem Intervalle gegeben ist, eine in diesem Intervalle gleichmäßig konvergente Reihe bilden, so konvergiert auch gleichmäßig und absolut die Reihe, die man erhält, indem man die Glieder der gegebenen Reihe mit Funktionen multipliziert, deren Werte in dem betrachteten Intervall eine endliche Menge bilden.

Es sei $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ die gegebene Reihe in dem Intervall (a, b), und $v_1, v_2, v_3, \ldots$ seien Funktionen, deren absolute Beträge in (a, b) eine bestimmte Zahl l nicht übertreffen. Die Reihe $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + \cdots$ konvergiert absolut, da die absoluten Beträge ihrer Glieder nicht größer sind als die entsprechenden Glieder der konvergenten Reihe $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots$ multipliziert mit l. Ist die positive Zahl ε gegeben, so kann man nach der Voraussetzung immer eine von x unabhängige Zahl ν finden derart, daß für $n > \nu$

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + |u_{n+3}| + \cdots < \frac{\varepsilon}{l}$$

ausfällt und a fortiori

$$|u_{n+1}v_{n+1} + u_{n+2}v_{n+2} + u_{n+3}v_{n+3} + \cdots| < \varepsilon$$

ist. Also konvergiert die Reihe $u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + \cdots$ auch gleichmäßig.

319. Folgerungen. a) Die Reihe, welche man erhält, indem man die konstanten Glieder einer absolut konvergenten Reihe mit Funktionen multipliziert, deren Werte in einem gegebenen Intervalle eine endliche Menge bilden, ist in diesem Intervalle absolut und gleichmäßig konvergent. Man braucht in der Tat nur in dem vorigen Theorem die u als konstant vorauszusetzen und zu bemerken, daß die Konvergenz einer Reihe mit konstanten Gliedern notwendig gleichmäßig ist.

b) Eine Reihe von Funktionen konvergiert absolut und gleichmäßig, wenn die aus den oberen Grenzen der absoluten Beträge der Glieder gebildete Reihe konvergiert. Es sei die Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ gegeben, und man ersetze jede Funktion $u_n(x)$ durch die obere Grenze μ_n von $u_n(x)$ in dem betrachteten Intervalle. Wenn die Reihe $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \cdots$ (mit positiven Gliedern) konvergiert, so ist die Konvergenz absolut. Nun kann man die gegebene Reihe betrachten als entstanden aus $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \cdots$ durch Multiplikation des allgemeinen Gliedes dieser Reihe mit $v_n = \frac{u_n}{\mu_n}$, und da $|v_n| \leqq 1$ ist, so ist das Theorem bewiesen.

320. Beispiele. a) Wenn α eine positive Zahl und kleiner als 1 ist, so ist bekanntlich die Reihe $1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots$ konvergent, und dies genügt auf Grund der zweiten Folgerung, um schneller (vgl. § 317, b) zu dem Schluß zu gelangen, daß die Reihe $1 + x + x^2 + \cdots$ in dem Intervall $(-\alpha, \alpha)$ absolut und gleichmäßig konvergiert oder (da man α beliebig nahe an 1 denken kann) in dem Intervall $(-1, 1)$ mit Ausschluß der Grenzen. Dasselbe gilt von der Reihe $1 + 2x + 3x^2 + \cdots$. In der Tat sind α^{n-1} und $n\alpha^{n-1}$ für jeden Wert von n die größten absoluten Beträge der Funktionen x^{n-1} und nx^{n-1} in dem Intervall $(-\alpha, \alpha)$.

b) Nach der einen oder der andern Folgerung ist, wenn $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ eine absolut konvergente Reihe ist, in jedem Intervalle die Konvergenz der Reihe

$$a_1 \sin(b_1 x) + a_2 \sin(b_2 x) + a_3 \sin(b_3 x) + \cdots$$

absolut und gleichmäßig, wie auch die Zahlen $b_1, b_2, b_3, \ldots$ beschaffen sein mögen. Z. B. sind, wenn p größer als 1 ist, absolut und gleichmäßig konvergent die Reihen

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin nx}{n^p}, \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos nx}{n^p}.$$

Für $p = 1$ hört die Gültigkeit der benutzten Sätze auf, so daß es nötig ist, zum direkten Studium der vorgelegten Reihen zu schreiten.

c) Man betrachte etwas allgemeiner die Reihe

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \cdots.$$

Wir wissen bereits (§ 218, i), daß diese Reihe bei beliebigem x konvergiert, wenn die Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$, mögen sie auch eine divergente Reihe bilden, abnehmend aufeinanderfolgen und nach Null konvergieren, wie es gerade für $a_n = \frac{1}{n}$ der Fall ist. Da die Reihe ungeändert bleibt, wenn x um ein Vielfaches von 2π vermehrt oder vermindert wird, so können wir uns darauf beschränken, sie in dem Intervall $(0, 2\pi)$ zu studieren. Bekanntlich ist

$$\sin(n+1)x + \sin(n+2)x + \cdots + \sin(n+p)x = \frac{\sin\frac{px}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \sin\left(n + \frac{p+1}{2}\right)x.$$

Daraus folgt, wenn man eine positive Zahl α so klein als man will fixiert und x in $(\alpha,\ 2\pi - \alpha)$ wählt,

$$|\sin(n+1)x + \sin(n+2)x + \cdots + \sin(n+p)x| < \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Mithin hat man (§ 192)

$$|\varphi_n(x)| < \frac{a_n}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Wenn also die positive Zahl ε gegeben ist und man ν groß genug wählt, damit $a_\nu < \varepsilon \sin\frac{\alpha}{2}$ wird, so wird $|\varphi_n(x)| < \varepsilon$ sein für $n \geqq \nu$. Also konvergiert die betrachtete Reihe gleichmäßig in jedem Intervall, welches kein Vielfaches von 2π enthält.

321. Theorem III. *Wenn für $x = a$ die Glieder einer gleichmäßig konvergenten Reihe endliche Grenzwerte haben, so hat auch die Summe der Reihe einen endlichen Grenzwert, der gleich der Summe der Grenzwerte der Glieder ist.*

a) Um einen bestimmten Fall zu haben, betrachte man die Grenzwerte *rechts* von a und trenne ein beliebig kleines Intervall $(a, a+h)$ von dem Intervall ab, in welchem die Reihe gleichmäßig konvergiert. Auf Grund dieser Konvergenz ist es, wenn ε positiv und beliebig klein gegeben ist, immer möglich ν derart zu bestimmen, daß für $n > \nu$

$$|\varphi_n(x')| < \tfrac{1}{3}\varepsilon, \quad |\varphi_n(x'')| < \tfrac{1}{3}\varepsilon,$$

mithin

$$|\varphi_n(x') - \varphi_n(x'')| < \tfrac{2}{3}\varepsilon$$

ist für zwei *beliebige* Werte x' und x'', die dem Intervall $(a, a+h)$ angehören. Man *fixiere* n und bemerke, daß, wenn x nach a konvergiert, die Summe $f_n(x)$ der n ersten Glieder der Reihe einem endlichen Grenzwert zustrebt, der gleich der Summe der Grenzwerte von $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ist. Man kann daher immer h so klein werden lassen, daß man hat $|f_n(x') - f_n(x'')| < \frac{1}{3}\varepsilon$. Daraus folgt, wenn man mit $f(x)$ die Summe der Reihe bezeichnet, daß man hat

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f_n(x') - f_n(x'')| + |\varphi_n(x') - \varphi_n(x'')| < \varepsilon$$

für jedes Paar von Werten von x' und x'', die in $(a, a+h)$ gewählt sind. Also hat (§ 264) $f(x)$, wenn x von rechts nach a konvergiert, einen Grenzwert $f(a+0)$.

b) Dies vorausgeschickt wollen wir beweisen, daß dieser Grenzwert gerade die Summe der Reihe ist, die aus den Grenzwerten der Glieder der gegebenen Reihe gebildet ist. Man hat

$$(4) \qquad f(x) - \sum_1^n u_i(a+0) = \sum_1^n \{u_i(x) - u_i(a+0)\} + \varphi_n(x).$$

Wenn ε positiv und beliebig klein gegeben ist, so existiert eine Zahl ν derart, daß für $n > \nu$ immer $|\varphi_n(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon$ ist für **alle** Werte von x, die $(a, a+h)$ angehören. **Unter Festhaltung** von n lasse man nun x nach a konvergieren. Da $u_i(x)$ nach $u_i(a+0)$ konvergiert, so hat man für genügend kleines h

$$\left|\sum_1^n \{u_i(x) - u_i(a+0)\}\right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

mithin auf Grund von (4)

$$\left|f(x) - \sum_1^n u_i(a+0)\right| < \tfrac{2}{3}\varepsilon.$$

Wenn man daher beachtet, daß auch $f(x) - f(a+0)$ dem absoluten Betrage nach kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$ gemacht werden kann, und zwar derart, daß es auch so bleibt, wenn x sich a unbegrenzt nähert, so hat man

$$\left|f(a+0) - \sum_1^n u_i(a+0)\right|$$

$$\leq |f(a+0) - f(x)| + \left|f(x) - \sum_1^n u_i(a+0)\right| < \varepsilon.$$

Also ist $f(a+0) = u_1(a+0) + u_2(a+0) + u_3(a+0) + \cdots$.

322. Theorem IV. Wenn eine Reihe von stetigen Funktionen gleichmäßig konvergiert, so ist die Summe der Reihe eine stetige Funktion.

In der Tat ist

$$f(a) = \sum_1^\infty u_i(a), \qquad f(a \pm 0) = \sum_1^\infty u_i(a \pm 0).$$

Die zweite Gleichung kann man auf Grund der gleichmäßigen Konvergenz und des vorigen Theorems behaupten. Andererseits hat man wegen der Stetigkeit der Glieder

$$u_i(a) = u_i(a \pm 0), \quad \text{mithin} \quad f(a) = f(a \pm 0).$$

Also ist $f(x)$ eine stetige Funktion.

323. Theorem V. Wenn die Derivierten der Glieder einer konvergenten Reihe von Funktionen eine gleichmäßig konvergente Reihe bilden, so ist die Summe dieser Reihe die Derivierte der Summe der ersten Reihe.

Wir beschränken uns darauf, z. B. die rechtsseitigen Derivierten zu betrachten, und bemerken folgendes: Wenn a dem Intervalle angehört, in welchem die gleichmäßige Konvergenz stattfindet, und man h hinreichend klein wählt, damit $a + h$ in dasselbe Intervall fällt, so kann man immer zu jeder positiven Zahl ε eine von x unabhängige Zahl ν finden derart, daß für $n \geqq \nu$

$$\left| \sum_{n+1}^{\infty} u_i'(x) \right| < \tfrac{1}{8}\,\varepsilon$$

ist für alle Werte von x, die in $(a, a + h)$ gewählt sind. Daraus folgt

$$\left| \sum_{\nu+1}^{n} u_i'(x) \right| \leqq \left| \sum_{\nu+1}^{\infty} u_i'(x) \right| + \left| \sum_{n+1}^{\infty} u_i'(x) \right| < \tfrac{1}{4}\,\varepsilon.$$

Man setze nun zur Abkürzung

$$\sigma_n = \sum_{1}^{n} \left\{ \frac{u_i(a+h) - u_i(a)}{h} - u_i'(a) \right\}$$

und bemerke, daß man bei Anwendung des Lagrangeschen Theorems (§ 306) auf die Summe der Zuwachsverhältnisse, die in den $n - \nu$ letzten Gliedern auftreten, erhält

$$\sigma_n = \sigma_\nu + \sum_{\nu+1}^{n} \{ u_i'(\xi) - u_i'(a) \},$$

wo ξ größer als a und kleiner als $a + h$ ist. Hat man nun ν in der vorhin angegebenen Weise fixiert, so ergibt sich zunächst

$$\left| \sum_{\nu+1}^{n} \{ u_i'(\xi) - u_i'(a) \} \right| < \tfrac{1}{2}\,\varepsilon.$$

Bemerkt man ferner, daß

$$\lim_{h=0} \frac{u_i(a+h) - u_i(a)}{h} = u_i'(a)$$

ist, so kann man h hinreichend verkleinern, damit $|\sigma_\nu| < \frac{1}{2}\varepsilon$ wird. Daraus ergibt sich $|\sigma_n| < \varepsilon$ für beliebig großes n und beliebig kleines positives h. Läßt man jetzt unter Festhaltung von ν und h in σ_n den Index n ins Unendliche wachsen, so erhält man wegen der Konvergenz der beiden betrachteten Reihen

$$\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \sum_1^\infty u_i'(a)\right| \leq \varepsilon;$$

mithin ist

$$\lim_{h=0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \sum_1^\infty u_i'(a),$$

d. h. $$f'(a) = u_1'(a) + u_2'(a) + u_3'(a) + \cdots.$$

324. Bemerkungen. a) Die letzten drei Theoreme füllen zum Teil die in den §§ 263, 267, 285 gelassenen Lücken aus, insofern sie uns unendlich viele Fälle angeben, in welchen die den Grenzwert oder die Stetigkeit oder die Derivierbarkeit einer Summe von Funktionen betreffenden Sätze bestehen bleiben, obwohl diese Funktionen in unendlicher Anzahl vorhanden sind. Damit ist aber nicht ausgeschlossen, daß jene Sätze auch in andern Fällen gelten können.

b) Jede stetige Funktion ist durch eine gleichmäßig konvergente Reihe darstellbar. In der Tat, man bilde irgend eine Folge von Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, die nach Null konvergieren, und setze $u_1 = f(x+\alpha_1)$ und $u_n = f(x+\alpha_n) - f(x+\alpha_{n-1})$. Die Summe der n ersten Glieder der Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ ist $f_n(x) = f(x+\alpha_n)$, und man hat $\lim_{n=\infty} f_n(x) = f(x)$. Also ist die Reihe konvergent und ihr Rest $\varphi_n(x) = f(x) - f(x+\alpha_n)$. Dies vorausgeschickt kann man immer, wenn die positive Zahl ε beliebig gegeben ist, auf Grund des Cantorschen Theorems (§ 279), da $f(x)$ stetig ist, h derart bestimmen, daß die Differenz $f(x') - f(x'')$ absolut genommen kleiner als ε ist, sobald $|x' - x''| < h$. Daraus folgt, wenn man ν hinreichend groß wählt, damit immer $|\alpha_n| < h$ bleibt für $n > \nu$, $|\varphi_n(x)| < \varepsilon$ für eben diese Werte von n, die größer als die von x unabhängige Zahl ν sind. Die stetige Funktion $f(x)$ ist auf diese Weise dargestellt als Summe der gleichmäßig konvergenten Reihe

$$f(x+\alpha_1) + \{f(x+\alpha_2) - f(x+\alpha_1)\} + \{f(x+\alpha_3) - f(x+\alpha_2)\} + \cdots.$$

c) Dagegen sagt uns das Theorem IV, daß eine unstetige Funktion niemals durch eine gleichmäßig konvergente Reihe von stetigen Funktionen darstellbar ist. So bietet z. B. die Summe der Reihe (2) eine gewöhnliche Unstetigkeit links von $x = 1$, und dies genügt, um behaupten zu können, daß die Reihe nicht gleichmäßig konvergiert. Man darf aber nicht glauben, daß umgekehrt die nicht gleichmäßige Konvergenz ein sicheres Anzeichen von Unstetigkeit für die Summe der Reihe ist. Es genüge das Beispiel der Reihe (3), welche als Summe die stetige Funktion x hat, während sie nicht gleichmäßig konvergiert.

d) Analog zeigt das Theorem V, daß die gleichmäßige Konvergenz der derivierten Reihe hinreichend ist, um behaupten zu können, daß die Derivierte der Summe der ursprünglichen Reihe existiert und gleich der Summe der Derivierten ihrer Glieder ist. Aber diese Bedingung ist nicht notwendig, da es Reihen gibt[1]), die man gliedweise derivieren darf, obwohl die zugehörigen Reihen der Derivierten nicht gleichmäßig konvergent sind. Es ist ferner leicht ein Beispiel für eine Reihe zu geben, bei welcher die gliedweise Derivation nicht erlaubt ist. So hat die Reihe (1) die Summe 1, und man erhält, indem man deriviert, die Relation $1=(1-x)+(x-x^2)+(x^2-x^3)+\cdots$, die für $x=1$ unrichtig ist. Das rührt eben von der nicht gleichmäßigen Konvergenz der letzten Reihe her.

Entwickelungen in Potenzreihen.

325. Von besonderer Wichtigkeit ist für uns die Darstellung der Funktionen durch Potenzreihen:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots. \tag{5}$$

Für solche Reihen ist grundlegend das folgende Theorem: Eine Potenzreihe konvergiert absolut und gleichmäßig in dem Intervalle $(-\alpha, \alpha)$, höchstens die Grenzen ausgeschlossen, wenn für $x=\alpha$ ihre Glieder eine endliche Wertmenge bilden. Man bemerke in der Tat, daß die Reihe sich betrachten läßt als entstanden aus der Reihe $1+\frac{x}{\alpha}+\frac{x^2}{\alpha^2}+\cdots$, indem man deren Glieder mit den Größen a_0, $a_1\alpha$, $a_2\alpha^2, \ldots$ (die nach der Voraussetzung sämtlich absolut genommen kleiner sind als eine feste Zahl) multipliziert. Da diese Reihe in $(-\alpha, \alpha)$ mit Ausschluß der Grenzen absolut und gleichmäßig konvergiert (§ 320, a), so läßt sich das Gleiche von der vorgelegten Reihe behaupten (§ 318). Offenbar kann die angegebene Bedingung erfüllt sein, wenn die Reihe an einer Grenze des Intervalles nicht konvergiert; denn es kann bei unendlich zunehmendem n auch vorkommen, daß $a_n\alpha^n$ endlich bleibt. Es ist aber sicher, daß jene Bedingung immer erfüllt ist, wenn die Reihe an einer Grenze konvergiert. Unter dieser Voraussetzung kann man nämlich wegen $\lim a_n\alpha^n=0$ zunächst zu der beliebig gegebenen positiven Zahl l' die

1) Siehe ein Beispiel in dem „Résumé du Cours d'Analyse“ von Mansion, p. 255.

kleinste ganze Zahl ν bestimmen von der Beschaffenheit, daß für $n > \nu$ immer $|a_n \alpha^n| < l'$ ist, und dann eine hinreichend große Zahl l finden, damit man für $n \leqq \nu$ hat $|a_n \alpha^n| < l$; und es ist klar, daß auch für beliebiges n sein wird $|a_n \alpha^n| < l$, da $l' \leqq |a_\nu \alpha^\nu| < l$ ist. Daraus folgt, daß die Reihe, wenn sie an einer der Grenzen des Intervalles $(-\alpha, \alpha)$ konvergiert, auch in dem ganzen Intervalle konvergiert mit Ausschluß höchstens der anderen Grenze, und zwar ist ihre Konvergenz in diesem Intervalle gleichmäßig, höchstens die Grenzen ausgeschlossen.

326. Konvergenzradius. Es kann vorkommen, daß keine positive Zahl α existiert von der Beschaffenheit, daß die Reihe (5) für $x = \alpha$ konvergent ist. In diesem Falle ergibt sich sofort aus dem letzten Theorem, daß die Reihe nur für $x = 0$ konvergiert (dies gilt für die Reihe mit dem allgemeinen Glied $n!x^n$). Es kann dagegen auch vorkommen, daß es Zahlen α gibt, so groß als man will, in welchem Falle die Reihe für alle Werte von x konvergent sein wird (es genüge das Beispiel der Reihe, deren allgemeines Glied $\frac{x^n}{n!}$ ist). Wenn aber für einen Wert von x die Reihe nicht konvergent ist, so ist die Menge der positiven Zahlen α notwendig endlich und besitzt daher (§ 172) eine obere Grenze ϱ, welche kein Maximum zu sein braucht. Es bilden daher die Werte von x, welche eine nach den Potenzen von x fortschreitende Reihe konvergent machen, ein Intervall $(-\varrho, \varrho)$, an dessen Grenzen die Konvergenz jedoch aufhören kann, während sie im Innern immer absolut und gleichmäßig ist. Die beiden am Anfang betrachteten Fälle lassen sich dem allgemeinen Falle unterordnen. Sie entsprechen den Annahmen $\varrho = 0$ und $\varrho = \infty$. In allen Fällen heißt die Zahl ϱ der Konvergenzradius der betrachteten Reihe. Bei den Reihen

$$\sum_1^\infty x^n, \quad \sum_1^\infty \frac{x^n}{n}, \quad \sum_1^\infty \frac{x^n}{n^2}$$

hat man $\varrho = 1$, d. h. das Konvergenzintervall ist bei den drei Reihen $(-1, 1)$. Während man aber bei der ersten beide Grenzen ausschließen muß und bei der zweiten nur die obere Grenze, konvergiert nur die dritte in dem ganzen Intervall. Mit andern Worten, die Werte von x, welche die drei Reihen konvergent machen, haben bei der ersten Reihe kein Minimum und kein Maximum, bei der zweiten nur ein Minimum, und lassen bei der dritten ein Minimum und ein Maximum zu.

327. Bestimmung von ϱ. Wird die Existenz der Zahl

$$\varrho = \lim_{n=\infty} \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|$$

zugelassen, so läßt sich leicht beweisen, daß dieselbe gerade der Wert des Konvergenzradius ist. Man betrachte in der Tat die aus den absoluten Beträgen $u_n = |a_n x^n|$ der Glieder der Reihe (5) gebildete Reihe und bemerke, daß für unendliches n

$$\lim \frac{u_n}{u_{n-1}} = \lim \left|\frac{a_n x}{a_{n-1}}\right| = \frac{|x|}{\varrho}$$

ist. Bekanntlich ist (§ 210, a), wenn $|x| < \varrho$ ist, die Reihe der u konvergent, und es konvergiert daher (§ 230) die Reihe (5) absolut. Daraus folgt, daß der Konvergenzradius nicht kleiner als ϱ ist. Er kann auch nicht größer sein als ϱ, sonst gäbe es in dem Konvergenzintervall Werte von $x > \varrho$, für welche die Konvergenz der Reihe (5) absolut wäre, wie das im Innern des genannten Intervalls immer der Fall ist, während andererseits wegen $\lim \frac{u_n}{u_{n-1}} > 1$ die Reihe der absoluten Beträge der Glieder divergent wäre gegen das Theorem von Dirichlet. In analoger Weise zeigt man, daß, wenn die Zahl

$$\varrho = \lim_{n=\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

existiert, dieselbe der Wert des Konvergenzradius ist. Man braucht nur zu bemerken, daß für unendliches n

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \frac{|x|}{\varrho}$$

ist, und die vorigen Betrachtungen zu wiederholen, indem man das Theorem des § 213 zu Hilfe nimmt. Auf diesem Wege gelangt man auch in indirekter Weise dazu, die notwendige Identität (vgl. 142, b) zwischen den betrachteten Grenzwerten zu konstatieren. Wenn diese Grenzwerte nicht existieren, so kann man auf das folgende Theorem rekurrieren.

328. Theorem von Hadamard. Wenn die Zahlen $\sqrt[n]{|a_n|}$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ eine endliche Menge bilden, so mißt die inverse Zahl ihres größten Grenzwertes den Konvergenzradius der Reihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$.[1])

In der Tat, wenn man den genannten Grenzwert, der immer existiert (§ 175), mit $\frac{1}{\varrho}$ bezeichnet, so ist bekanntlich (§ 178) von den Ungleichheiten

$$\sqrt[n]{|a_n|} < l, \quad \sqrt[n]{|a_n|} > l' \qquad \left(l' < \frac{1}{\varrho} < l\right)$$

die erste für alle Werte von n erfüllt, die größer als eine bestimmte

1) „Sur le rayon de convergence des séries ordonnées suivant les puissances d'une variable" (Comptes rendus de l'Académie de Paris, 1888, p. 259).

Zahl sind, die zweite für gewisse Werte von n, die beliebig groß sind. Nimmt man nun in der gegebenen Reihe, deren allgemeines Glied $u_n = a_n x^n$ ist, an $|x| < \varrho$, so kann man zwischen $|x|$ und ϱ eine Zahl $q\varrho$ einschalten. Wählt man ferner l derart, daß $q = |x| l$ ist, so hat man von einem bestimmten Wert von n ab immer

$$\sqrt[n]{|u_n|} = |x| \cdot \sqrt[n]{|a_n|} < q < 1, \quad |u_n| < q^n,$$

und die vorgelegte Reihe konvergiert daher absolut, da ihre Glieder dem absoluten Betrage nach schließlich kleiner sind als die entsprechenden Glieder der konvergenten geometrischen Progression $1 + q + q^2 + \cdots$. Wenn dagegen $|x| > \varrho$ ist, so kann man l' derart wählen, daß $1 = |x| \cdot l'$ ist, und man wird immer noch Werte von n antreffen, für welche

$$\sqrt[n]{|u_n|} = |x| \cdot \sqrt[n]{|a_n|} > 1, \quad |u_n| > 1$$

ist. Daraus folgt in diesem Falle, daß die Reihe nicht konvergent ist, da die für die Konvergenz notwendige Bedingung $\lim u_n = 0$ nicht erfüllt sein kann. Also ist ϱ die obere Grenze der Werte von $|x|$, für welche die betrachtete Reihe konvergiert. Man bemerke schließlich, daß es, um $\varrho = \infty$ zu haben, notwendig und hinreichend ist, daß der größte Grenzwert (und folglich auch der kleinste Grenzwert) von $\sqrt[n]{|a_n|}$ null ist. Also ist $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

für alle Werte von x konvergiert.

329. Derivation. Wir gehen jetzt dazu über, die aus den Derivierten der Glieder der Reihe (5) gebildete Reihe zu betrachten:

$$g(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots. \tag{6}$$

Der Konvergenzradius ϱ' dieser Reihe kann nicht größer sein als der Radius ϱ der Reihe (5), da mit unendlich zunehmendem n das allgemeine Glied $n a_n x^{n-1}$ der Reihe (6) schließlich absolut genommen immer größer ist als das Glied $a_n x^n$ der Reihe (5). Andererseits lege man x irgend einen positiven Wert ξ bei, der kleiner ist als ϱ, aber beliebig nahe an ϱ liegt, und man wähle eine Zahl α zwischen ξ und ϱ. Da die Reihe (5) für $x = \alpha$ konvergent ist, so hat man $\lim a_n \alpha^n = 0$, mithin (§ 318) konvergiert die Reihe (6) in $(-\xi, \xi)$ absolut und gleichmäßig, da man sich denken kann, daß sie aus der Reihe $1 + 2\frac{x}{\alpha} + 3\frac{x^2}{\alpha^2} + \cdots$, deren Konvergenz (§ 320, a) für $|x| < \alpha$ absolut und gleichmäßig ist, durch Multiplikation mit den Größen $a_1, a_2\alpha, a_3\alpha^2, \ldots$ entstanden ist, welche eine endliche Wertmenge bilden. Also kann ϱ' nicht kleiner sein als ϱ. Daraus folgt, daß die Reihe (6) dasselbe Konvergenzintervall wie (5) zuläßt, höchstens mit Ausschluß der Grenzen, in welchen die Derivation begreiflicherweise Divergenz oder Unbestimmtheit hervorrufen kann, während im Innern unverändert die absolute und gleichmäßige Konvergenz bestehen bleibt. Auf Grund dieser Gleichmäßigkeit können wir behaupten (§ 323), daß $g(x)$ die Derivierte von $f(x)$ ist; und da dieser Schluß für jede Potenzreihe gilt, so wird es erlaubt sein, ihn auf die Reihen anzuwenden, die man durch successive gliedweise Derivation der Reihe (6) erhält, sodaß man hat

$$f'(x) = \sum_1^\infty n a_n x^{n-1}, \quad f''(x) = \sum_2^\infty n(n-1) a_n x^{n-2},$$

$$f'''(x) = \sum_3^\infty n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3}, \ \ldots$$

Aus diesen Relationen und aus (5) ergibt sich sofort für $x = 0$

$$f(0) = a_0, \quad f'(0) = a_1, \quad f''(0) = 2a_2, \quad f'''(0) = 6a_3, \ \ldots,$$

und man gelangt auf diese Weise zu dem wichtigen Schluß: Wenn eine Funktion $f(x)$ durch eine Potenzreihe darstellbar ist, so ist diese notwendig

$$(7) \qquad f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(0) + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(0) + \cdots.$$

Wir besitzen somit bereits eine Regel zur Entwickelung einer gegebenen Funktion in eine Potenzreihe. Aber wir haben noch nicht das Recht sie anzuwenden, da uns ein Kriterium fehlt, welches uns jedesmal der Legitimität einer solchen Entwickelung versichert. Diese Lücke wird sofort ausgefüllt werden.

330. Formeln von Taylor und Mac-Laurin. Man kann (7) eine allgemeinere Form geben, indem man zunächst $f(x)$ in $f(x + a)$ und dann x in $x - a$ verwandelt. Auf solche Weise erhält man die Entwickelung von $f(x)$ in eine Reihe, die nach den Potenzen von $x - a$ fortschreitet:

$$(8) \qquad f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(a) + \cdots.$$

Um über die Legitimität einer solchen Entwickelung entscheiden zu können, ist man immer berechtigt zu setzen

$$(9) \quad f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n$$

und dem Rest R_n die Form zu geben

$$R_n = \frac{(x-a)^\nu \varphi(x)}{(n-1)!\, \nu},$$

wo ν eine beliebige positive Zahl ist und φ eine gewisse Funktion von x, die auch von n und von ν abhängt. Wir wollen die Existenz der n-ten Derivierten von $f(x)$ in einem ganzen Intervall, in welches a fällt, zulassen und in diesem Intervall für den Augenblick eine andere Zahl b fixieren, um dann die Funktion

$$F(x) = f(x) + \frac{b-x}{1} f'(x) + \frac{(b-x)^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \cdots + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + \frac{(b-x)^{\nu}}{(n-1)!\,\nu} \varphi(b)$$

zu betrachten. Nach (9) hat man $F(a) = f(b)$, und es ist ferner ersichtlich, daß $F(b) = f(b)$ ist. Also nimmt die Funktion $F(x)$ an den Grenzen von (a, b) gleiche Werte an, und ihre Derivierte muß daher (§ 303) für einen Wert ξ, der in diesem Intervall liegt, verschwinden. Nun gibt eine leichte Rechnung

$$F'(x) = \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) - \frac{(b-x)^{\nu-1}}{(n-1)!} \varphi(b).$$

Drückt man daher aus, daß diese Funktion für $x = \xi$ den Wert 0 annimmt, so findet man den Wert von $\varphi(b)$; und endlich erhält man, nachdem man wieder x an die Stelle von b gesetzt hat,

$$\varphi(x) = (x-\xi)^{n-\nu} f^{(n)}(\xi), \quad R_n = \frac{(x-a)^{\nu}(x-\xi)^{n-\nu}}{(n-1)!\,\nu} f^{(n)}(\xi),$$

wo ξ zwischen a und x enthalten ist. Setzt man $\xi = (1-\theta)a + \theta x$, wobei θ zwischen 0 und 1 enthalten ist, so kann man auch schreiben

$$R_n = \frac{(x-a)^n}{(n-1)!\,\nu} (1-\theta)^{n-\nu} f^{(n)}(\xi).$$

Die Formel (9), vervollständigt durch diesen Ausdruck des Restes, heißt die Taylorsche Formel. Im besondern findet man für $\nu = n$ und $\nu = 1$ die folgenden Ausdrücke für den Rest, welche bezüglich von Lagrange und von Cauchy herrühren:

$$R_n = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi), \quad R_n = \frac{(x-a)^n}{(n-1)!} (1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(\xi).$$

Die Form von Lagrange ist unzweifelhaft die einfachste, gestattet aber nicht immer sich von dem Verhalten von R_n Rechenschaft zu geben, wenn n unendlich zunimmt. Man greift alsdann zu der Form von Cauchy. Aber auch diese ist in manchen Fällen nicht hinreichend, und man ist dann gezwungen, sich der allgemeinen Form zu bedienen. Jedenfalls hat man, wenn eine Funktion $f(x)$ gegeben und der eine oder andere Ausdruck von R_n gebildet ist, und wenn man erkennt, daß derselbe für unendliches n nach Null konvergiert, das Recht, $f(x)$ in eine Reihe nach der Formel (8) zu entwickeln. Im besondern gelangt man für $a = 0$ wieder zu der Entwickelung (7).

Wir können aber jetzt, indem wir in (9) $a = 0$ setzen, mit größerer Genauigkeit und Allgemeinheit schreiben, auch wenn $f(x)$ nicht durch eine Potenzreihe darstellbar ist,

$$(10)\quad f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1\cdot 2} f''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + R_n,$$

wo

$$R_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x) \quad \text{oder} \quad R_n = \frac{x^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(\theta x)$$

oder allgemeiner

$$R_n = \frac{x^n}{(n-1)!\,\nu}(1-\theta)^{n-\nu} f^{(n)}(\theta x)$$

ist. Die Formel (10), vervollständigt durch einen von diesen Ausdrücken des Restes, ist die Mac-Laurinsche Formel. Wenn wir nun auf das am Ende des vorigen Paragraphen Gesagte Bezug nehmen, so erkennen wir, daß wir dahin gelangt sind, in der Untersuchung von R_n für unendliches n ein Mittel zu besitzen, um gegebenen Falles zu beurteilen, ob die Entwickelung (7) legitim ist.

331. Bemerkungen. a) Man glaube nicht, daß die Konvergenz der Reihen von Taylor oder von Mac-Laurin genügt, damit die entsprechenden Entwickelungen legitim seien. Es kann z. B. sehr wohl vorkommen, daß die Reihe (7) konvergent ist, aber nicht $f(x)$ darstellt. Man muß in der Tat beachten, daß R_n nicht der Rest der Reihe ist, sondern einfach die Differenz zwischen $f(x)$ und der Summe der n ersten Glieder der Reihe (7), und daß daher nichts hindert, daß R_n für unendliches n einem Grenzwert $g(x)$ zustrebt, der nicht beständig gleich Null ist, in welchem Falle die Reihe nicht $f(x)$, sondern $f(x) - g(x)$ darstellen würde. Da die Entwickelung von $f(x) - g(x)$ nur in der einen durch (7) angegebenen Weise statthaben kann, so ist $g(x)$ keine beliebige Funktion, sondern so beschaffen, daß sie für $x = 0$ mit allen ihren Derivierten verschwinden muß; und gerade diese Verpflichtung, unendlich vielen Bedingungen zu genügen, macht die Existenz derartiger Funktionen g äußerst schwierig. Man hat jedoch ein einfaches Beispiel in der stetigen Funktion $g(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, welche für $x = 0$ notwendig gleich Null ist. Zunächst bemerke man unter Berufung auf ein früheres Resultat (§ 312, a), daß

$$g'(0) = \lim_{x=0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x=0} x^{-1} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{z=\infty} z^{\frac{1}{2}} e^{-z} = 0$$

ist. Es ist ferner leicht zu zeigen, daß, wenn für $x = 0$ die Funktion $g^{(n)}$ null ist, auch $g^{(n+1)}$ verschwindet. In der Tat führen die successiven Derivationen von g für $x \gtrless 0$ zu Resultaten von der Form

$$g^{(n)}(x) = \sum A x^{-\alpha} e^{-\frac{1}{x^2}},$$

und es ist daher

$$g^{(n+1)}(0) = \lim_{x=0} \sum A x^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{x^2}} = \sum A \lim_{z=\infty} z^{\frac{\alpha+1}{2}} e^{-z} = 0.$$

b) Eine andere Bemerkung erweist sich in verschiedenen Fällen als nützlich, insofern sie die direkte Prüfung des Verhaltens von R_n für unendliches n überflüssig macht. Wir haben gesagt, daß es, um über die Legitimität der Entwickelung (7) sicher zu sein, unerläßlich ist zu konstatieren, nicht daß die Reihe konvergiert, sondern daß R_n der Null zustrebt. So oft es nun aber gelingt, sich zu vergewissern, daß die n-te Derivierte, mag auch n unendlich zunehmen, in dem Intervalle $(0, x)$ endlich bleibt, ist jene Bedingung erfüllt und die Entwickelung legitim. Um dies zu beweisen, braucht man sich, da der absolute Betrag von $f^{(n)}(\theta x)$ bei zunehmendem n eine feste Zahl nicht übertreffen kann, nur daran zu erinnern (§ 147), daß $\frac{x^n}{n!}$ nach Null konvergiert.

332. Übungen. a) Die n-te Derivierte von $f(x) = e^x$ ist $f^{(n)}(x) = e^x$, eine in jedem Intervalle und für jedes n endliche Funktion (da sie von n nicht abhängt). Es ist also unnötig den Ausdruck von R_n zu untersuchen, da wir auf Grund der letzten Bemerkung a priori sicher sind, daß R_n nach Null konvergiert, wenn n ins Unendliche zunimmt. Nun hat man $f^{(n)}(0) = 1$ und folglich (vgl. § 184)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$$

für jeden Wert von x. In analoger Weise erhält man die folgenden Entwickelungen:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots, \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots.$$

b) Für $f(x) = e^{x \cos a} \cos(x \sin a)$ oder $f(x) = e^{x \cos a} \sin(x \sin a)$ ist, wie wir wissen (§ 292, e), bezüglich

$$f^{(n)}(x) = e^{x \cos a} \cos(na + x \sin a), \quad f^{(n)}(x) = e^{x \cos a} \sin(na + x \sin a),$$

sodaß $f^{(n)}(0) = \cos na$ bezw. $f^{(n)}(0) = \sin na$ ist, mithin

$$e^{x \cos a} \cos(x \sin a) = 1 + \frac{x}{1} \cos a + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \cos 2a + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos 3a + \cdots,$$

$$e^{x \cos a} \sin(x \sin a) = \frac{x}{1} \sin a + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \sin 2a + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin 3a + \cdots.$$

Diese Formeln schließen die früheren ein für $a = 0$ und $a = \frac{\pi}{2}$. Man findet ferner die Entwickelungen von $e^x \cos x$ und $e^x \sin x$, wenn man $a = \frac{\pi}{4}$ setzt und x in $x\sqrt{2}$ verwandelt, u. s. w.

c) Für $f(x) = \log(1+x)$ erhält man

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n!}.$$

Mithin ist

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} + R_n,$$

wo

$$R_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n \text{ oder } R_n = \frac{(-1)^{n-1}x^n}{1+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}$$

ist. Für $x > 1$, wie für $x \leqq -1$, können wir uns die Untersuchung der Ausdrücke des Restes ersparen, da man direkt sieht (§ 218, a), daß in diesen Fällen die Reihe nicht konvergiert. Nimmt man an, daß x nicht größer als 1, aber positiv ist, so ist das Verhältnis $\frac{x}{1+\theta x}$ kleiner als $x \leqq 1$, mithin bleibt seine n-te Potenz endlich, während $\frac{1}{n}$ nach Null konvergiert. Daraus folgt bei Anwendung der ersten Form des Restes $\lim R_n = 0$. Dagegen muß man für ein x, welches größer als -1, aber negativ ist, zu der zweiten Form des Restes greifen, da die erste nicht erkennen läßt, wie sich R_n für unendliches n verhält. Da nun aber die Verhältnisse $\frac{1}{1+\theta x}$ und $\frac{1-\theta}{1+\theta x}$ bezüglich kleiner als $\frac{1}{1+x}$ und als 1 bleiben, während x^n nach Null konvergiert, so ist auch in diesem Falle offenbar $\lim R_n = 0$. Also ist (vgl. § 186) in dem Intervalle $(-1, 1)$ mit Ausschluß der unteren Grenze

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots.$$

d) Um die Funktion $y = \operatorname{arc\,tg} x$ in eine Reihe zu entwickeln, wollen wir uns daran erinnern (§ 292, e), daß die n-te Derivierte

$$(n-1)!\cos^n y \cdot \sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right)$$

ist. Der Rest der Mac-Laurinschen Reihe in der Form von Lagrange ist das Produkt von $\frac{x^n}{n}$ mit einer Größe, die endlich bleibt ohne nach Null zu konvergieren, folglich konvergiert R_n nach Null nur in dem Falle, wo der absolute Betrag von x die Einheit nicht übertrifft. Unter dieser Voraussetzung liefert die Formel von Mac-Laurin

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \cdots.$$

Diese Formel ist benutzt worden, um π zu berechnen. An den Grenzen des Konvergenzintervalls liefert sie

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$$

kann aber so nicht zu der genannten Berechnung dienen, da die Reihe sehr langsam konvergiert. Es würden 24000 Glieder nötig sein (§ 196, c), um vier Decimalstellen genau zu erhalten. Eine sehr vorteilhafte Formel ist von Machin angegeben worden. Es sei $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{5}$, mithin

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \frac{5}{12}, \quad \operatorname{tg} 4\alpha = \frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{25}{144}} = \frac{120}{119} = 1 + \frac{1}{119}.$$

Wenn man bemerkt, daß $\operatorname{tg} 4\alpha$ die Einheit etwas übertrifft, wird man dazu geführt zu setzen $4\alpha = \frac{\pi}{4} + \beta$, wo β sehr klein ist. Übrigens ist

$$\beta = 4\alpha - \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg} 4\alpha - 1}{\operatorname{tg} 4\alpha + 1} = \frac{\frac{1}{119}}{2+\frac{1}{119}} = \frac{1}{239}.$$

Da also $\frac{\pi}{4} = 4\alpha - \beta = 4 \operatorname{arc tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc tg} \frac{1}{239}$ ist, so hat man

$$\pi = \frac{16}{5}\left(1 - \frac{4}{3 \cdot 100} + \frac{4^2}{5 \cdot 100^2} - \frac{4^3}{7 \cdot 100^3} + \cdots\right)$$
$$- \frac{4}{239}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 57121} + \frac{1}{5 \cdot 57121^2} - \frac{1}{7 \cdot 57121^3} + \cdots\right).$$

Unter Benutzung dieser Formel gelang es W. Shanks π bis auf 707 Decimalstellen zu berechnen. Die ersten 30 kann man sich leicht mit Hilfe der folgenden Verse merken:

Que j' aime à faire apprendre un nombre utile aux sages!
Immortel Archimède, artiste ingénieur,
Qui de ton jugement peut priser la valeur?
Pour moi ton problème eut de pareils avantages.

Wenn man jedes Wort durch die Anzahl der Buchstaben ersetzt, welche es bilden, so findet man

$$\pi = 3{,}141592653589793238462643383279\ldots$$

Zwei weitere Ziffern kann man hinschreiben, wenn man sich an die Bemerkung von Catalan[1]) erinnert, daß eine solche poetische Arbeit nicht fortgesetzt werden könnte, weil nach einer weiteren 5 eine Null auftritt. Viel nützlicher ist es aber, einen Näherungswert von π zu kennen, den man geometrisch verwerten kann. So findet man, wenn man sich in $\pi^2 = 9{,}8696044\ldots$ auf die vier ersten Decimalstellen beschränkt, für π den Wert $0{,}26 \cdot \sqrt{146} = 3{,}141591953\ldots$, dessen geometrische Deutung (unter Benutzung der Bemerkung, daß $146 = 5^2 + 11^2$ ist) eine durchaus genügende Rektifikation des Kreises[2]) gibt, insofern man sich bei ihrer Anwendung um ungefähr ein Millimeter irren würde auf einem Kreise von einem Kilometer Durchmesser.

e) Wir stellen uns schließlich noch die Aufgabe, $(1+x)^m$ in eine Potenzreihe zu entwickeln. Die n-te Derivierte dieser Funktion ist

---

1) „Nouvelle Correspondance mathématique", t. V, p. 44.

2) Sie wurde vorgeschlagen von Specht in „Crelles Journal", Bd. III, S. 83. Eine andere Konstruktion, welche für π den weniger angenäherten Wert $4 - 2\sqrt{2} + \frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{3}\sqrt{6} = 3{,}14277\ldots$ liefert, ist kürzlich vorgeschlagen worden von G. Peirce im „Bulletin of the American Math. Society" (July, 1901, p. 427).

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

mithin gibt die Formel (7)

$$(11) \quad (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots,$$

so oft, die Reihe auf der rechten Seite als konvergent vorausgesetzt, außerdem für unendliches n ist $\lim R_n = 0$. Wir werden sogleich sehen, daß diese Bedingung immer erfüllt ist, wenn die Reihe konvergiert, vorausgesetzt, daß die linke Seite eine Bedeutung hat, zu welchem Zwecke man ausschließen muß, daß $m = 0$ und gleichzeitig $x = -1$ ist. Wir werden auch ein für allemal beiseite lassen den trivialen Fall $m = 0$, da man sofort sieht, daß (11) in diesem Falle besteht, welches auch $x \gtrless -1$ sein mag. Dies vorausgeschickt nehmen wir den Rest in der Form von Cauchy an:

$$R_{n+1} = mx(1+\theta x)^{m-1}\cdot\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\cdot\frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}x^n.$$

Man beachte, daß R_{n+1} auf diese Weise in drei Faktoren zerlegt ist, deren letzter das allgemeine Glied der zu dem Exponenten $m-1$ gehörigen Binomialreihe ist, einer Reihe, die (§ 322) für $|x| < 1$ bei beliebigem m konvergiert, ferner auch für $x = -1$ und $m \geqq 1$, sowie für $x = 1$ und $m > 0$. In allen diesen Fällen bleiben die beiden ersten Faktoren endlich, während der dritte als allgemeines Glied einer konvergenten Reihe der Null zustrebt, und es ist daher $\lim R_{n+1} = 0$. Wir haben also nur noch die Fälle zu untersuchen, in welchen die zweite Reihe nicht konvergent ist, während die erste konvergiert. Es sind dies zwei Fälle, die den Annahmen $x = -1$ mit $0 < m < 1$ und $x = 1$ mit $-1 < m < 0$ entsprechen. Im ersten Falle enthält der Ausdruck von R_{n+1} im ersten Faktor $(1-\theta)^{m-1}$, und man kann nicht mehr sicher sein, daß derselbe endlich bleiben wird, da der Exponent $m-1$ negativ ist und θ, wenn es auch kleiner als 1 bleibt, sich der 1 unbegrenzt nähern könnte, wenn n unendlich zunimmt. Im zweiten Falle ist es der dritte Faktor, der nicht mehr nach Null konvergiert, da sein absoluter Betrag

$$\left(1-\frac{m}{1}\right)\left(1-\frac{m}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{m}{n}\right) > 1 - m\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

mit n ins Unendliche wächst. In diesem letzten Falle ($x = 1$) hilft man sich sofort, indem man R_n in der Form von Lagrange annimmt:

$$R_n = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}(1+\theta)^{m-n}.$$

Der Faktor $(1+\theta)^{m-n}$ bleibt, wie auch θ mit n variieren mag, zwischen 0 und 1 enthalten, während der andere Faktor als allgemeines Glied der betrachteten Reihe nach Null konvergiert. Also ist $\lim R_n = 0$. In dem andern Falle ($x = -1$) endlich kann keine von den beiden speziellen Formen des Restes dazu dienen, zu erkennen, daß derselbe nach Null konvergiert. Nimmt man in der Tat den allgemeinen Ausdruck

$$R_{n+1} = (-1)^{n+1}(1-\theta)^{m-\nu} \cdot \frac{m}{\nu} \cdot \frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-n)}{1\cdot 2\cdots n},$$

so sieht man sofort, daß man nicht sicher sein kann, daß der Faktor $(1-\theta)^{m-\nu}$ endlich bleibt, außer wenn $\nu \leqq m < 1$ ist. Setzt man $\nu = m$, so fällt θ heraus, und man gelangt zur genauen Kenntnis des Restes:

$$R_{n+1} = -\left(1-\frac{m}{1}\right)\left(1-\frac{m}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{m}{n}\right).$$

Offenbar hat man, da m positiv und kleiner als 1 ist,

$$-\frac{1}{R_{n+1}} > \left(1+\frac{m}{1}\right)\left(1+\frac{m}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{m}{n}\right) > 1 + m\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right),$$

und es ist daher $\lim R_{n+1} = 0$. Wir haben also nicht nur das Recht, als Spezialfall von (11) für $x = -1$ zu schreiben

$$1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots = 0,$$

was auch $m > 0$ sein mag, sondern wir erkennen auch, daß diese Gleichung sozusagen der Grenzwert der Identität

$$1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{2} - \cdots \pm \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}$$
$$= \left(1-\frac{m}{1}\right)\left(1-\frac{m}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{m}{n}\right)$$

für unendliches n ist.

333. Andere nützliche Anwendungen lassen sich von der Taylorschen Formel in der Theorie der numerischen Reihen machen. Es sei die Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ mit abnehmenden positiven Gliedern gegeben, und wir wollen uns eine Funktion $f(x)$ denken, die bei wachsendem x beständig abnimmt und dabei für $x = 1, 2, 3, \ldots$ die Werte $u_1, u_2, u_3, \ldots$ erhält. Wir wollen ferner annehmen, daß man von $f(x)$ eine primitive Funktion $F(x)$ kennt. Diese nimmt mit x beständig zu, da (§ 300) ihre Derivierte positiv ist, und konvergiert daher (§ 263) für unendliches x nach einem endlichen oder unendlichen Grenzwert. Wenn wir nun mit α und β zwei bestimmte Zahlen der Intervalle $(n-1, n)$ und $(n, n+1)$ bezeichnen, so hat man

$$F(n) - F(n-1) = f(\alpha),\ \ F(n+1) - F(n) = f(\beta),\ \ f(\alpha) > u_n > f(\beta),$$

mithin

$$F(n+1) - F(1) < u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n < F(n) - F(0).$$

Daraus folgt, daß die Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ konvergent oder divergent ist, je nachdem $F(x)$ für unendliches x nach einem endlichen Grenzwert oder nach Unendlich konvergiert. In der Tat, im ersten Falle bleibt die Summe ihrer n ersten Glieder, während sie wächst, kleiner als $F(n) - F(0)$, welches der Voraussetzung nach einen endlichen Grenzwert zuläßt. Im zweiten Falle muß die genannte Summe, da sie größer als $F(n+1)-F(1)$ ist, welches gleichzeitig mit n unendlich zunimmt, a fortiori über alle Grenzen wachsen. Dieses bemerkenswerte Konvergenzkriterium verdanken wir Cauchy.

334. Die Formel von Taylor bietet uns jetzt ein Mittel, immer mehr in das Studium der gegebenen Reihe einzudringen, auch wenn die Glieder nicht abnehmend aufeinanderfolgen. Vor allem wollen wir folgendes Theorem von Franel[1]) beweisen: Wenn mit unendlich zunehmendem x die als einzig vorausgesetzte Derivierte von $f(x)$ nach Null konvergiert, indem sie ein bestimmtes Vorzeichen bewahrt und dem absoluten Betrage nach abnimmt, so hat der Ausdruck

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + \tfrac{1}{2} u_n - F(n) \tag{12}$$

für unendliches n einen endlichen Grenzwert l. In der Tat kann man diesem Ausdruck die Form $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n$ geben, indem man setzt

$$v_n = F(n-1) - F(n) + \tfrac{1}{2}\{f(n-1) + f(n)\};$$

und andererseits erhält man, wenn man die Formel (9) anwendet und dabei die erste Form des Restes benutzt,

$$F(n-\tfrac{1}{2}) = F(n-1) + \tfrac{1}{2} f(n-1) + \tfrac{1}{8} f'(\alpha),$$
$$F(n-\tfrac{1}{2}) = F(n) - \tfrac{1}{2} f(n) + \tfrac{1}{8} f'(\beta),$$

wo α und β zwei bestimmte Zahlen sind, die bezüglich in der unteren und in der oberen Hälfte des Intervalles $(n-1, n)$ gewählt sind. Daraus folgt sofort, wenn man die beiden obigen Werte von $F(n-\frac{1}{2})$ einander gleich setzt,

$$v_n = -\tfrac{1}{8} f'(\alpha) + \tfrac{1}{8} f'(\beta).$$

Auf diese Weise bietet sich uns $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$, wenigstens von einem bestimmten Gliede ab, in Form einer Reihe mit abwechselnd positiven und negativen Gliedern dar, die dem absoluten Betrage nach beständig abnehmen und nach Null konvergieren. Daraus folgt (§ 195), daß $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$ eine konvergente Reihe ist, und ihre Summe l stellt gerade den Grenzwert des Ausdruckes (12) dar. Bemerkt man nunmehr, daß die Summe $v_{n+1} + v_{n+2} + \cdots$ immer zwischen 0 und $-\frac{1}{8} f'(n)$ bleibt, so kann man schreiben

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = F(n) + \tfrac{1}{2} f(n) + \frac{\theta}{8} f'(n) + l, \tag{13}$$

wo θ zwischen 0 und 1 enthalten ist. Diese Formel ist sehr nützlich für die angenäherte Auswertung mancher Summen. Aber in jedem Falle wird es nötig sein $v_{n+1} + v_{n+2} + \cdots$ direkt zu untersuchen,

1) „Intermédiaire des Mathématiciens", t. I, p. 234.

um eine größere Annäherung zu erhalten. Wir werden in der Tat sehen, daß es, wenn man in (13) ϱ_n an Stelle von $\frac{\theta}{8} f'(n)$ setzt, sehr leicht gelingt, jedesmal einen befriedigenderen Näherungsausdruck für ϱ_n aus der direkten Betrachtung des äquivalenten Ausdruckes $-(v_{n+1} + v_{n+2} + \cdots)$ herzuleiten. Übrigens kann in dem allgemeinen Falle die Taylorsche Formel analoge Gleichungen wie (13) liefern, die immer genauer sind. In der Tat braucht man nur in der genannten Formel zwei Glieder mehr zu nehmen, um dazu geführt zu werden in (13) $\frac{\theta}{8} f'(n)$ durch $\frac{1}{12} f'(n) \pm \frac{\theta}{192} f'''(n)$ zu ersetzen, vorausgesetzt, daß die bereits für f' gemachten Voraussetzungen sich auf f''' übertragen.

335. Beispiele. a) Mit Hilfe des in § 333 bewiesenen Kriteriums von Cauchy gelingt es sehr rasch (vgl. § 204), die Divergenz der Reihen zu konstatieren, die durch die allgemeinen Glieder

$$\frac{1}{n}, \quad \frac{1}{n \log n}, \quad \frac{1}{n \log n \log\log n}, \ldots$$

definiert sind. Man braucht nur zu bemerken, daß diese Funktionen für unendliches n abnehmend nach Null konvergieren, und daß sie die primitiven Funktionen

$$\log n, \quad \log\log n, \quad \log\log\log n, \ldots$$

zulassen, die mit n unbegrenzt zunehmen. Aus dem Franelschen Theorem kann man noch weitere Angaben über die genannten Reihen erhalten. So kann man z. B. sicher sein, daß die Zahl

$$\lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right)$$

existiert; und in der Tat wissen wir bereits (§ 183), daß diese Zahl nichts anderes als die Eulersche Konstante $\mathbf{C} = 0{,}577215664901\ldots$ ist. Ebenso existiert die Zahl

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \cdots + \frac{1}{n\log n} - \log\log n\right),$$

deren Wert sich auf anderem Wege berechnen läßt und $0{,}794678645453\ldots$ ist[1]).

b) Mit Hilfe der Formel (13), wenn man sie in der allgemeineren Form

$$(14) \qquad u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = F(n) + \tfrac{1}{2} f(n) + \varrho_n + l$$

nimmt, kann man in der angenäherten Auswertung der linken Seite noch weiter gehen. Für $u_n = \frac{1}{n}$ hat man z. B. $f(n) = \frac{1}{n}$, $F(n) = \log n$, $l = \mathbf{C}$, und es bleibt nur noch die Summe $\varrho_n = -(v_{n+1} + v_{n+2} + \cdots)$ aus-

1) „Intermédiaire des Mathématiciens", t. V, p. 101.

zuwerten, von der wir vorläufig nur wissen, daß sie nach Null konvergiert, wenn n unendlich zunimmt. Im vorliegenden Falle ist

$$v_n = -\log\frac{n}{n-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right),$$

und da (§ 219)

$$\log\frac{n}{n-1} = 2\left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{3(2n-1)^3} + \frac{1}{5(2n-1)^5} + \cdots\right),$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) = 2\left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{(2n-1)^3} + \frac{1}{(2n-1)^5} + \cdots\right)$$

ist, so sieht man sofort, daß

$$v_n = 4\left(\frac{1}{3(2n-1)^3} + \frac{2}{5(3n-1)^5} + \frac{3}{7(2n-1)^7} + \cdots\right)$$

ist, mithin

$$0 < v_n < \frac{4}{3(2n-1)}\left(\frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{2}{(2n-1)^4} + \frac{3}{(2n-1)^6} + \cdots\right)$$

und endlich (§ 247, a)

$$0 < v_n < \frac{2n-1}{12n^2(n-1)^2} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Also ist $0 < -\varrho_n < \frac{1}{12n^2}$, und man sieht daher, wenn man mit θ eine zwischen 0 und 1 enthaltene Zahl bezeichnet, daß die Summe der n ersten Glieder der harmonischen Reihe

$$H_n = \log n + \frac{1}{2n} - \frac{\theta}{12n^2} + \mathbf{C} \tag{15}$$

ist. Auf diese Weise sind wir z. B., wenn wir nach der Summe der ersten 100000 Glieder gefragt werden, jetzt imstande zu antworten, daß die gesuchte Summe 12,090146 ... ist. Wir brauchen nämlich nur in (15) auf der rechten Seite $n = 10^5$ zu setzen. Für $n = 10$ dagegen, in welchem Falle man die linke Seite direkt berechnen kann, liefert die Formel (15), wenn man überdies $\theta = 1$ setzt, $\mathbf{C}$ mit fünf genauen Decimalstellen.

c) Wenn $u_n = \log n$ ist, so kann man $F(n) = n\log n - n$ setzen, da die Derivierte von $x\log x - x$ gleich $\log x$ ist. Die Zahl

$$\lim_{n=\infty}\left(\log(n!) - (n+\tfrac{1}{2})\log n + n\right)$$

existiert auf Grund des Theorems von Franel, und wir werden im folgenden ihren Wert l berechnen und finden $l = \log\sqrt{2\pi}$. Um inzwischen die Formel (14) anzuwenden, bemerken wir, daß

$$-v_n = -1 + \left(n - \frac{1}{2}\right)\log\frac{n}{n-1} = \frac{1}{3(2n-1)^2} + \frac{1}{5(2n-1)^4} + \frac{1}{7(2n-1)^6} + \cdots$$

ist, woraus sich ergibt

$$0 < -v_n < \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n-1)^4} + \cdots\right) = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

und folglich $0 < \varrho_n < \frac{1}{12n}$. Jetzt wird die Formel (14)

$$(16) \qquad \log(n!) = (n + \tfrac{1}{2}) \log n - n + \frac{\theta}{12n} + \log \sqrt{2\pi},$$

und daraus leitet man durch Übergang von den Logarithmen zu den Zahlen die bekannte Formel von Stirling (§ 221) ab.

Asymptotische Auswertung der Potenzreihen.

336. Konvergiert das Verhältnis von zwei Funktionen nach 1, wenn die unabhängige Veränderliche ins Unendliche wächst oder wenn die Funktionen bei der Annäherung derselben an einen endlichen Grenzwert über alle Grenzen wachsen, so sagt man, daß eine der Funktionen asymptotisch zur andern ist. Hat man eine Funktion φ_0 gefunden, die zu einer gegebenen Funktion f asymptotisch ist, und gelingt es eine andere φ_1 zu finden, die zu $f - \varphi_0$ asymptotisch ist, darauf eine weitere φ_2, die zu $f - \varphi_0 - \varphi_1$ asymptotisch ist, und so fort, so erhält man eine asymptotische Darstellung der gegebenen Funktion:

$$f(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots.$$

Diese Gleichung ist in einem konventionellen Sinne zu verstehen als die Zusammenfassung der folgenden, deren Bedeutung uns bekannt ist:

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi_0(x)} = 1, \quad \lim \frac{f(x) - \varphi_0(x)}{\varphi_1(x)} = 1, \quad \lim \frac{f(x) - \varphi_0(x) - \varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = 1, \cdots.$$

Offenbar sind die Funktionen $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ so beschaffen, daß das Verhältnis einer jeden zu der vorhergehenden den Grenzwert 0 hat. Gelangt man also bei der successiven Bildung der Funktionen φ zu einer Konstanten, so haben die folgenden Funktionen alle den Grenzwert 0. Dies alles ist anwendbar auf den Fall einer Veränderlichen, die durch ganzzahlige Werte ins Unendliche wächst, und dies ist sogar, wie wir sogleich sehen werden, ein besonders wichtiger Fall.

337. Beispiele. a) Früher (§ 314, j) haben wir gesehen, daß $x\Gamma(x)$ der Einheit zustrebt, wenn x von rechts nach Null konvergiert. Dies läßt sich auch so ausdrücken: Auf der rechten Seite von Null ist $\Gamma(x)$ asymptotisch zu $\frac{1}{x}$. Bemerkt man ferner, daß

$$\lim \left(\Gamma(x) - \frac{1}{x}\right) = \lim \frac{\Gamma(x+1) - 1}{x} = \Gamma'(1) = -\mathbf{C}$$

ist, so kann man die asymptotische Gleichung schreiben $\Gamma(x) = \frac{1}{x} - \mathbf{C}$. Man stellt dieselbe aber einfacher auf, indem man $\Gamma(x+1)$ in eine Potenzreihe entwickelt und dann alles durch x dividiert.

b) Um Beispiele für asymptotische Entwickelungen von Funktionen einer ganzzahligen Veränderlichen zu haben, braucht man nur zu den Gleichungen (15) und (16) zurückzukehren, indem man sie in folgender Weise schreibt:

$$H_n = \log n + \mathbf{C} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \cdots,$$

$$\log(n!) = n \log n - n + \frac{1}{2}\log n + \log\sqrt{2\pi} + \frac{1}{12n} + \cdots.$$

Wie man sieht, konvergiert das Verhältnis jedes Gliedes auf den rechten Seiten zu dem vorhergehenden Gliede nach Null, wenn die Veränderliche unbegrenzt zunimmt. Die Entwickelungen könnten ins Unendliche fortgesetzt werden, ohne daß man sich irgendwie mit ihrer Konvergenz zu beschäftigen braucht; denn sie sind nicht, wie die gewöhnlichen Reihenentwickelungen[1]), das Resultat eines einzigen Grenzüberganges, sondern sie implizieren unendlich viele derartige Übergänge, die nacheinander ausgeführt werden.

c) Aus der Formel von Stirling läßt sich leicht eine Eigenschaft herleiten, die es nützlich ist sich zu merken wegen des häufigen Gebrauchs, den wir von ihr machen werden: Der Koeffizient von x^n in der Entwickelung von $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ ist asymptotisch zu $\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\cdot$ In der Tat hat man

$$\frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6...2n} = \frac{1.2.3...2n}{(2.4.6...2n)^2} = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} = \frac{e^{\frac{\theta-4\theta'}{24n}}}{\sqrt{\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} + \cdots,$$

d. h.

$$\lim_{n=\infty} \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n}\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot$$

d) Zu einer anderen interessanten Gleichung, die wir in kurzem benutzen werden, gelangt man, indem man versucht die Gesamtzahl der Divisoren der n ersten ganzen Zahlen asymptotisch auszuwerten oder, wenn man mit $\theta(n)$ die Anzahl der Divisoren von n bezeichnet, die Summe $\theta(1) + \theta(2) + \cdots + \theta(n)$. Wir gehen von folgender Bemerkung aus:

$$\left[\frac{n}{p}\right] - \left[\frac{n-1}{p}\right] = \left|\begin{array}{l} 0 \text{ im allgemeinen} \\ 1, \text{ wenn } n \text{ durch } p \text{ teilbar ist.} \end{array}\right.$$

Summiert man alle diese Ausdrücke, während p die Reihe der ganzen Zahlen bis zu $\nu = [\sqrt{n}]$ durchläuft, so erhält man die Anzahl der Divisoren von n, die nicht größer als $\sqrt{n}$ sind, d. h. im allgemeinen $\frac{1}{2}\theta(n)$ und wenn n ein vollständiges Quadrat ist, $\frac{1}{2}\theta(n) + \frac{1}{2}$. Daraus folgt:

$$\theta(1) + \theta(2) + \cdots + \theta(n) = 2\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{p=1}^{p=[\sqrt{k}]}\left(\left[\frac{k}{p}\right] - \left[\frac{k-1}{p}\right]\right) - \nu.$$

---

1) Auch für diese ist eine allgemeinere Betrachtungsweise von Peano angegeben worden in den „Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino", 1891.

Inzwischen reduziert sich die Doppelsumme, die auf der rechten Seite auftritt, leicht auf

$$\sum_{p=1}^{p=\nu}\left[\frac{n}{p}\right]-\sum_{p=1}^{p=\nu}\left[\frac{p^2-1}{p}\right]=\sum_{p=1}^{p=\nu}\left[\frac{n}{p}\right]-\tfrac{1}{2}\nu(\nu-1).$$

Also ist

$$\theta(1)+\theta(2)+\cdots+\theta(n)=2\sum_{p=1}^{p=\nu}\left[\frac{n}{p}\right]-\nu^2$$

und folglich

$$\frac{\theta(1)+\theta(2)+\cdots+\theta(n)}{n}-\log n$$

$$=2\left(H_\nu-\log\nu\right)-\frac{\nu^2}{n}+\log\frac{\nu^2}{n}-\frac{2}{n}\sum_{p=1}^{p=\nu}\left(\frac{n}{p}-\left[\frac{n}{p}\right]\right).$$

Da man andererseits hat

$$\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2<\frac{\nu^2}{n}\leqq 1,\quad 0\leqq\frac{n}{p}-\left[\frac{n}{p}\right]<1,$$

so ist klar, daß für unendliches n

$$\lim\frac{\nu^2}{n}=1,\quad \lim\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{p=\nu}\left(\frac{n}{p}-\left[\frac{n}{p}\right]\right)=0$$

ist. Also ist

$$\lim\left(\frac{\theta(1)+\theta(2)+\cdots+\theta(n)}{n}-\log n\right)=2\,\mathbf{C}-1=0{,}15443132\ldots$$

Wir sind auf diese Weise dazu gelangt, die wichtige asymptotische Formel von Dirichlet[1]) aufzustellen:

$$\theta(1)+\theta(2)+\cdots+\theta(n)=n\log n+(2\,\mathbf{C}-1)\,n+\cdots.$$

338. Wir wollen uns jetzt speziell mit denjenigen Funktionen beschäftigen, die in einem endlichen Intervall $(-\varrho,\varrho)$ durch eine Potenzreihe darstellbar sind. Wir wissen bereits, daß diese Funktionen stetig und sogar derivierbar sind, solange $|x|<\varrho$ ist. Dagegen wissen wir noch nicht, was für $x=\pm\varrho$ eintritt, und doch kann man gerade aus dem Verhalten einer Reihe an den Grenzen des Konvergenzintervalles häufig Nutzen ziehen für die asymptotische Auswertung ihrer Summe in der Nähe dieser Grenzen. Andererseits werden wir sehen, daß bei gewissen Fragen die Kenntnis solcher asymptotischen Ausdrücke die Stelle derjenigen der genauen Summe vertreten kann, die fast immer unzugänglich ist. Wir schicken das

---

1) „Journal de Liouville", 1856, p. 359. Siehe auch eine Mitteilung von Stieltjes an die Akademie der Wissenschaften zu Paris (Comptes rendus, t. XCVI, p. 764).

folgende Theorem voraus: Wenn an einer Grenze des Konvergenzintervalles eine Potenzreihe divergent ist, so wächst die durch die Reihe dargestellte Funktion unbegrenzt, wenn die unabhängige Veränderliche vom Innern des Intervalles aus sich der betrachteten Grenze nähert. Um einen bestimmten Fall vor uns zu haben und die Beweise zu vereinfachen, werden wir immer die obere Grenze ϱ betrachten und $\varrho = 1$ annehmen. Dies ist erlaubt, da man in der gegebenen Reihe nur x in ϱx zu verwandeln braucht, um den Konvergenzradius auf 1 zu reduzieren. Es sei

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots, \quad a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = \infty,$$

indem wir nötigenfalls die Vorzeichen aller Koeffizienten umkehren. Es handelt sich darum zu zeigen, daß, wenn eine beliebig große Zahl l gegeben ist, $f(x)$ größer wird und bleibt als l, sobald x eine bestimmte Zahl übertrifft, die genügend nahe an 1 liegt. Man wähle $l' > l$, benutze die Divergenz der Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$, um ν derart zu bestimmen, daß für $n > \nu$ die Summe $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ größer als l' ist, und bemerke dann, daß für ein zwischen 0 und 1 enthaltenes x

$$(a_0 + a_1 + \cdots + a_{\nu+1}) + (a_0 + a_1 + \cdots + a_{\nu+2})\, x$$
$$+ (a_0 + a_1 + \cdots + a_{\nu+3})\, x^2 + \cdots > \frac{l'}{1-x}$$

ist oder

$$(a_0 + a_1 + \cdots + a_\nu) + a_{\nu+1} + a_{\nu+2}\, x + a_{\nu+3}\, x^2 + \cdots > l'.$$

Nun unterscheidet sich die mit $x^{\nu+1}$ multiplizierte linke Seite nicht von

$$(a_0 + a_1 + \cdots + a_\nu) x^{\nu+1} - (a_0 + a_1 x + \cdots + a_\nu x^\nu) + f(x).$$

Also ist

$$f(x) > a_0(1 - x^{\nu+1}) + a_1(x - x^{\nu+1}) + \cdots + a_\nu(x^\nu - x^{\nu+1}) + l' x^{\nu+1}.$$

Läßt man jetzt x unter Festhaltung von ν nach 1 konvergieren, so konvergiert die rechte Seite nach dem Grenzwert l' und bleibt daher schließlich größer als die gegebene Zahl $l < l'$. A fortiori wird dann sein $f(x) > l$. Mithin ist $\lim\limits_{x=1} f(x) = \infty$.

339. Theorem. Zwei Potenzreihen mit positiven Koeffizienten seien für einen und denselben Wert $x = \varrho$, der an der Grenze des gemeinsamen Konvergenzintervalles liegt, divergent, und es konvergiere für unbegrenzt zunehmendes n das Verhältnis der Koeffizienten von x^n nach einem Grenzwert. Dann konvergiert auch das Verhältnis der durch die beiden Reihen dargestellten Funktionen nach demselben Grenzwert, wenn x nach ϱ konvergiert.

Dies ist das Theorem, auf welches sich die asymptotische Bestimmung der Potenzreihen stützt. Man reduziere den Konvergenzradius auf 1 und bemerke, daß die Funktionen

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots, \quad \psi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

auf Grund des vorigen Theorems unendlich werden müssen, wenn x nach 1 konvergiert. Dann erkennt man, daß der ausgesprochene Satz sozusagen das Theorem von L'Hospital (§ 310, b) für Potenzreihen ist. Übrigens beachte man, daß im vorliegenden Falle die Anwendung des Theorems von L'Hospital zu nichts führen würde, da sich die Derivierten von φ und ψ wieder in der Form von Potenzreihen darbieten, die für $x = 1$ divergent sind. Dies vorausgeschickt nehmen wir an, daß, wenigstens von einem bestimmten Werte von n ab, die Koeffizienten a_n und b_n positiv sind, und lassen die Existenz des Grenzwertes l ihres Verhältnisses für unendliches n zu, so daß man, wenn die positive Zahl ε beliebig gegeben ist, eine Zahl ν finden kann derart, daß für $n > \nu$ immer

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - l \right| < \varepsilon$$

ist, d. h. a_n zwischen $(l - \varepsilon) b_n$ und $(l + \varepsilon) b_n$ liegt. Daraus folgt auch (für $x > 0$)

$$\left| \frac{a_{\nu+1} + a_{\nu+2} x + a_{\nu+3} x^2 + \cdots}{b_{\nu+1} + b_{\nu+2} x + b_{\nu+3} x^2 + \cdots} - l \right| < \varepsilon.$$

Andererseits hat aber bei Festhaltung von ν, da $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, wenn x nach 1 konvergiert, über alle Grenzen wachsen, das Verhältnis

$$\frac{1 - \frac{1}{\psi(x)} (b_0 + b_1 x + \cdots + b_\nu x^\nu)}{1 - \frac{1}{\varphi(x)} (a_0 + a_1 x + \cdots + a_\nu x^\nu)} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \cdot \frac{b_{\nu+1} + b_{\nu+2} x + b_{\nu+3} x^2 + \cdots}{a_{\nu+1} + a_{\nu+2} x + a_{\nu+3} x^2 + \cdots}$$

den Grenzwert 1. Man wird also für jede positive Zahl ε links von 1 ein hinreichend kleines Intervall finden können, damit man hat

$$(l - \varepsilon)(1 - \varepsilon') < \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} < (l + \varepsilon)(1 + \varepsilon')$$

für alle Werte von x, die in dem genannten Intervalle gewählt sind. Daraus folgt, daß man, wenn die positive Zahl η beliebig gegeben wird, für diese Werte von x, indem man z. B. $\varepsilon = l\varepsilon' = \frac{1}{3}\eta < l$ nimmt, haben kann

$$\left| \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} - l \right| < \eta, \quad \text{so daß } \lim \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = l$$

ist.

340. Wir sind jetzt in der Lage, das zu ergänzen, was wir über die Stetigkeit der Potenzreihen in dem Konvergenzintervall gesagt haben, da wir hinzufügen können, daß auch an den Grenzen, wenn sie in ihnen konvergiert, die Reihe eine stetige Funktion darstellt. Mit andern Worten: Wenn an einer Grenze des Konvergenzintervalles eine Potenzreihe die Summe l hat, so konvergiert die durch die Reihe dargestellte Funktion nach l, wenn die unabhängige Veränderliche vom Innern des Intervalles aus nach der betrachteten Grenze konvergiert. Dieses wichtige Theorem, welches wir Abel verdanken, ist bereits vervollständigt durch das Theorem des § 338. Es sei

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots, \qquad a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = l,$$

und man nehme an $l > 0$. Dies ist immer erlaubt, da man im entgegengesetzten Falle a_0 in geeigneter Weise vergrößern könnte. Man betrachte jetzt die Reihe

$$\varphi(x) = a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + \cdots$$

und bemerke zunächst, daß ihr Konvergenzradius (§ 327) gleich 1 ist. Dagegen ist sie für $x = 1$ divergent, da ihr allgemeines Glied nach $l > 0$ konvergiert. Da die Koeffizienten, wenigstens von einem bestimmten Gliede ab, alle positiv sind, so kann man das Theorem des vorigen Paragraphen auf die Funktion φ und auf die andere $\psi = 1 + x + x^2 + \cdots$ anwenden. Man erhält

$$\lim_{x=1} (1 - x)\varphi(x) = \lim_{n=\infty} (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n), \quad \text{d. h.} \quad \lim_{x=1} f(x) = l.$$

341. Bemerkung. Man halte das Theorem von Abel nicht für evident. Man beachte in der Tat, daß in demselben die Gleichheit zwischen den Werten zweier Größen behauptet wird, die in ihrer Bedeutung wesentlich verschieden sind:

$$\lim_{x=1} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty} (a_0 + a_1 + \cdots + a_n).$$

Überdies gibt uns das genannte Theorem Sicherheit von der Existenz des ersten von diesen Grenzwerten, wenn der zweite existiert. Es kann aber sehr wohl vorkommen, daß dieser nicht existiert, wenn der erste existiert. Ein einfaches Beispiel dafür ist folgendes:

$$\lim_{x=1} (1 - x + x^2 - \cdots) = \tfrac{1}{2}$$

bei nicht existierendem

$$\lim_{n=\infty} (1 - 1 + \cdots \pm 1).$$

Übrigens gilt bei andern Reihen das Theorem nicht, da die Zahlen

$$\lim_{x=a} (u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots), \qquad \lim_{n=\infty} (u_0(a) + u_1(a) + \cdots + u_n(a))$$

beide existieren können ohne gleich zu sein. Z. B. ist

$$\lim_{x=1} ((x - x^2) + (x^2 - x^3) + (x^3 - x^4) + \cdots) = 1, \quad \lim_{n=\infty} (0 + 0 + \cdots + 0) = 0.$$

342. Übungen. a) Mit dem Theorem von Abel haben wir gewonnen, was uns noch dazu fehlte, um in viel rascherer Weise zur vollständigen Kenntnis gewisser Reihenentwickelungen zu gelangen unter Vermeidung der Mac-Laurinschen Formel, deren Anwendung oft unbequem ist. Um z. B. $\log(1+x)$ und $\operatorname{arctg} x$ in eine Potenzreihe zu entwickeln, genügt die Bemerkung, daß die Derivierten dieser Funktionen

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots, \quad \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots$$

sind, und daß die Funktionen selbst für $x = 0$ verschwinden. Man kann dann schon auf Grund der Angaben in § 329 schreiben

$$\log(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \cdots, \quad \operatorname{arctg} x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \cdots$$

in jedem Intervalle $(-\alpha, \alpha)$, wobei α beliebig nahe an 1 liegt (aber kleiner als 1 ist). Jetzt berechtigt uns das Theorem von Abel die letzten Resultate auch auf den Fall $\alpha = 1$ auszudehnen unter Beachtung der einzigen Bedingung, daß die Reihen konvergent bleiben. Dies ist bei der ersten Reihe für $x = 1$ der Fall und bei der zweiten für $x = \pm 1$. Also ist

$$\log 2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \cdots, \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \cdots.$$

b) In analoger Weise kann man die Summe der Binomialreihe

$$f(x) = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots$$

bestimmen für alle Werte von x und von m, für welche diese Reihe konvergiert, vorausgesetzt, daß nicht gleichzeitig $x = -1$ und $m = 0$ ist. In der Tat hat man

$$f'(x) = m\left(1 + \frac{m-1}{1}x + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots\right),$$

ferner erhält man nach Multiplikation mit $1 + x$ und unter Benutzung der Bemerkung, daß

$$\frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!} + \frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-n)}{n!}$$
$$= \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$$

ist,

$$(1+x)f'(x) = mf(x),$$

d. h.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{m}{1+x}.$$

Die linke Seite ist augenscheinlich die Derivierte von $\log f(x)$, die rechte die Derivierte von $m\log(1+x)$, und diese Funktionen können sich daher nur um eine Konstante unterscheiden (§ 307, b), die übrigens gleich Null ist, da für $x = 0$ die Funktionen beide verschwinden. Mithin ist $f(x) = (1+x)^m$.

c) Wir wollen jetzt das Theorem in § 339 dazu benutzen, die Reihe $f(x) = x + x^4 + x^9 + \cdots$ asymptotisch auszuwerten, die offenbar für $x = 1$ divergent, aber links von 1 konvergent ist. Zunächst betrachten wir die Funktion

$$\varphi(x) = [\sqrt{1}]\,x + [\sqrt{2}]\,x^2 + [\sqrt{3}]\,x^3 + \cdots + [\sqrt{n}]\,x^n + \cdots,$$

die mit $f(x)$ durch die evidente Relation $(1-x)\,\varphi(x) = f(x)$ zusammenhängt, und vergleichen sie mit der folgenden

$$(1-x)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}x^2 + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots,$$

in welcher der Koeffizient von x^n lautet (§ 337, c)

$$\frac{3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdots 2n} = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}(2n+1) = \frac{2n+1}{\sqrt{\pi n}} + \cdots = 2\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} + \cdots.$$

Der Grenzwert dts Verhältnisses der Koeffizienten von x^n in den beiden Reihen ist also

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\lim_{n=\infty}\frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Daraus folgt auf Grund des angezogenen Theorems

$$\lim_{x=1}(1-x)^{\frac{3}{2}}\,\varphi(x) = \lim_{x=1}(1-x)^{\frac{1}{2}}f(x) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

und man kann daher die Gleichung schreiben

$$x + x^4 + x^9 + \cdots = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}},$$

die links von 1 asymptotisch richtig ist. Durch Fortsetzung der Rechnung gelangt man ohne große Schwierigkeit dazu, auf der rechten Seite den mehr angenäherten Ausdruck zu erhalten

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\sqrt{\pi(1-x)} + \cdots.$$

Zu demselben Ausdruck gelangt man direkt, wenn man eine gewisse Eigenschaft[1]) von $f(x)$ kennt, die wir hier dem Leser zur Übung vorschlagen, obwohl sie sich nicht mit so elementaren Hilfsmitteln nachweisen läßt, wie wir sie jetzt zur Verfügung haben:

$$\left(\frac{1}{2} + x + x^4 + x^9 + \cdots\right)\left(\log\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{2} + x' + x'^4 + x'^9 + \cdots\right)\left(\log\frac{1}{x'}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Die Zahlen x und x', welche zwischen 0 und 1 gewählt sind, werden durch die Relation $\log\frac{1}{x}\cdot\log\frac{1}{x'} = \pi^2$ gebunden vorausgesetzt. Auf Grund

---

1) Cauchy: „Mémoire sur la théorie des nombres“ (1830, p. 614).

derselben konvergiert x' nach Null, wenn x nach 1 konvergiert, und unter dieser Voraussetzung erhält man sofort

$$\lim (x + x^4 + x^9 + \cdots) \sqrt{1-x} = \frac{1}{2} \lim \left(\frac{\log x'}{\log x}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{1-x}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \lim \sqrt{\frac{1-x}{\log \frac{1}{x}}} = \tfrac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

d) Die Reihe $f(x) = x - x^4 + x^9 - \cdots$ konvergiert nicht für $x = 1$, aber dies hindert nicht, daß ihre Summe einem Grenzwert zustreben kann, wenn x wachsend nach 1 konvergiert. Um diesen Grenzwert zu finden bemerke man, daß in der Reihe

$$\frac{f(x)}{1-x} = x + x^2 + x^3 + x^9 + x^{10} + \cdots + x^{15} + x^{25} + x^{26} + \cdots$$

der Koeffizient von x^n bezüglich $a_n = 1$ oder $a_n = 0$ ist, je nachdem das größte in $\sqrt{n}$ enthaltene Ganze, d. h. $\nu = [\sqrt{n}]$, ungerade oder gerade ist. Eine leichte Rechnung gibt

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \frac{1-(-1)^\nu}{2}(n+1) + \frac{(-1)^\nu}{2} \nu(\nu+1).$$

Ferner erhält man, wenn man bemerkt, daß $0 \leqq n - \nu^2 \leqq 2\nu$ ist,

$$\lim \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n+1} = \tfrac{1}{2} \pm \lim \frac{n - \nu^2}{2n} = \tfrac{1}{2}.$$

Dies vorausgeschickt genügt es die Reihe

$$\varphi(x) = a_1 x + (a_1 + a_2) x^2 + (a_1 + a_2 + a_3) x^3 + \cdots$$

mit

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$$

zu vergleichen, um zu sehen, daß man hat $\lim\limits_{x=1} (1-x)^2 \varphi(x) = \frac{1}{2}$. Übrigens ist $(1-x)^2 \varphi(x) = f(x)$. Mithin wird

$$\lim_{x=1} (x - x^4 + x^9 - x^{16} + \cdots) = \tfrac{1}{2}.$$

e) Wenn verlangt wird die Funktion $f(x) = x + \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{3} x^9 + \cdots$ auszuwerten, so ist es zweckmäßig, die Reihen

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{1-x}, \quad \psi(x) = \frac{1}{1-x} \log \frac{1}{1-x}$$

zu betrachten, in welchen die Koeffizienten von x^n bezüglich H_ν und H_n sind, wenn wir wieder mit ν das größte in $\sqrt{n}$ enthaltene Ganze bezeichnen. Der Grenzwert des Verhältnisses dieser Koeffizienten ist

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log \nu}{\log n} = \frac{1}{2},$$

und $f(x)$ ist daher asymptotisch zu $\frac{1}{2} \log \frac{1}{1-x}$. Um weiter zu gelangen, betrachte man die Funktion

$$f(x) - \frac{1}{2} \log \frac{1}{1-x} = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots,$$

in welcher

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = H_\nu - \frac{1}{2} H_n = \frac{1}{2} \mathrm{C} + \log \frac{\nu}{\sqrt{n}} + \cdots$$

und folglich $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \frac{1}{2}\mathrm{C}$ ist. Mithin wird auf Grund des Theorems von Abel

$$\lim_{x=1} \left(f(x) - \frac{1}{2} \log \frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{2} \mathrm{C}.$$

Der linken Seite läßt sich eine andere Form geben, wenn man bemerkt, daß für nach 1 konvergierendes x

$$\lim \log \frac{\log \frac{1}{x}}{1-x} = \log \lim \frac{\log \frac{1}{x}}{1-x} = 0, \text{ d. h. } \lim \left(\log \log \frac{1}{x} + \log \frac{1}{1-x} \right) = 0$$

ist. Wir können also links von der Einheit die asymptotische Gleichung[1]) schreiben

$$x + \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{3} x^9 + \cdots = -\frac{1}{2} \log \log \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \mathrm{C}.$$

f) Die Funktion $f(x) = 1^{\mu-1} x + 2^{\mu-1} x^2 + 3^{\mu-1} x^3 + \cdots$ nimmt für $x = 1$ den Wert $1^{\mu-1} + 2^{\mu-1} + 3^{\mu-1} + \cdots$ an, der endlich ist (§ 212, a), wenn μ negativ ist. Sie wächst dagegen links von 1 über alle Grenzen im entgegengesetzten Falle, d. h. für $\mu \geqq 0$. Da man weiß, daß, für $\mu = 0$, $f(x) = -\log(1-x)$ ist, so bleibt nur zu untersuchen, was im Falle eines positiven μ eintritt, und zu diesem Zweck genügt es $f(x)$ mit

$$(1-x)^{-\mu} = 1 + \frac{\mu}{1} x + \frac{\mu(\mu+1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \cdots$$

zu vergleichen, indem man sich an die Definition der Gammafunktion erinnert (§ 252, c):

$$\Gamma(x+1) = \lim_{n=\infty} \frac{n!\, n^x}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}.$$

Man sieht sofort, daß das Verhältnis der Koeffizienten von x^n gerade nach $\Gamma(\mu)$ konvergiert, wenn n ins Unendliche wächst, und es ist daher[2]):

$$\lim_{x=1} \left(1^{\mu-1} x + 2^{\mu-1} x^2 + 3^{\mu-1} x^3 + \cdots\right)(1-x)^\mu = \Gamma(\mu).$$

Diese Formel führt zu einer andern Betrachtungsweise der Funktion Γ.

---

1) Sonin: „Sur les polynômes de Bernoulli" (Crelles Journal, Bd. 116, S. 147).

2) Appell: „Sur certaines séries ordonnées par rapport aux puissances croissantes d'une variable" (Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 1878).

Dem Ausdruck, der auf der linken Seite erscheint, läßt sich die Form $a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ geben, wenn man setzt

$$a_n = n^{\mu-1} - \frac{\mu}{1}(n-1)^{\mu-1} + \frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}(n-2)^{\mu-1} - \cdots.$$

Das Theorem von Abel gestattet uns dann $\Gamma(\mu)$ als Summe der Reihe $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ auszudrücken, und da man hat

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^{\mu-1} - \frac{\mu-1}{1}(n-1)^{\mu-1} + \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1\cdot 2}(n-2)^{\mu-1} - \cdots,$$

so sieht man, daß man nach Verwandlung von μ in $x+1$ auch schreiben kann[1]):

$$\Gamma(x+1) = \lim_{n=\infty}\left(n^x - \frac{x}{1}(n-1)^x + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}(n-2)^x - \cdots\right)\cdot$$

g) Zum Schluß wollen wir die Formel von Dirichlet, die in § 337 bewiesen worden ist, auf die asymptotische Auswertung der Lambertschen Reihe (§ 247, c)

$$f(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^3}{1-x^3} + \cdots$$

anwenden. Wir wissen bereits, daß man diese Reihe in

$$x\theta(1) + x^2\theta(2) + x^3\theta(3) + \cdots$$

umformen kann. Andererseits legt es uns die zitierte Formel nahe, die Funktion

$$f(x) - \frac{1}{1-x}\log\frac{1}{1-x} = \sum_1^\infty (\theta(n) - H_n)\,x^n$$

für den Fall zu untersuchen, daß x von links nach 1 konvergiert. Die Summe der n ersten Koeffizienten ist

$$\theta(1) + \theta(2) + \cdots + \theta(n) - (n+1)H_n + n = \mathbf{C}n + \cdots,$$

mithin ist die Funktion selbst, dividiert durch $\mathbf{C}(1-x)$, asymptotisch zu $x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots$, d. h. zu $\frac{x}{(1-x)^2}\cdot$ Man hat also

$$f(x) = \frac{1}{1-x}\log\frac{1}{1-x} + \frac{\mathbf{C}x}{1-x} + \cdots.$$

Diesen Ausdruck verwandelt man leicht mit Hilfe einer Bemerkung, die wir bei der Reihe von Sonin gemacht haben, in

$$f(x) = \frac{\mathbf{C} - \log\log\frac{1}{x}}{\log\frac{1}{x}} + \cdots.$$

Man findet auf diese Weise den unendlich großen Teil der Entwickelung von Schloemilch, auf die wir früher (§ 247, d) hingewiesen haben, und

1) „Intermédiaire des Mathématiciens", t. VI, p. 148.

derselbe genügt, um uns Rechenschaft zu geben von dem Verhalten der Lambertschen Reihe links von der Einheit. Will man jedoch die Summe dieser Reihe mit einer gewissen Annäherung berechnen, so muß man die vollständige Entwickelung kennen:

$$\frac{C - \log\log\frac{1}{x}}{\log\frac{1}{x}} + \frac{1}{4} - \frac{\log\frac{1}{x}}{144} - \frac{\left(\log\frac{1}{x}\right)^3}{86400} - \cdots.$$

Interpolationsformeln.

343. Eine Funktion $y = f(x)$ zu konstruieren von der Beschaffenheit, daß den Werten $x_1, x_2, x_3, \ldots$ der unabhängigen Veränderlichen gegebene Werte $y_1, y_2, y_3, \ldots$ der Funktion entsprechen, daß man also hat $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, $f(x_3) = y_3, \ldots$: dies ist das Problem der Interpolation, ein Problem, welches natürlich im allgemeinen unbestimmt ist. Wünscht man jedoch, daß y eine ganze Funktion sei, deren Grad kleiner als n ist, so wird es genügen n Paare entsprechender Werte vorzuschreiben, damit die Funktion vollkommen bestimmt sei. Und in der Tat ist bereits aus den Elementen bekannt[1]) die notwendige Identität zwischen zwei Polynomen, die für Werte der Veränderlichen gleich sind, deren Anzahl den Grad der Polynome übertrifft. Übrigens reduziert sich dieses spezielle Interpolationsproblem, wenn man will, darauf, aus dem Gleichungensystem

$$a_0 x_i^{n-1} + a_1 x_i^{n-2} + a_2 x_i^{n-3} + \cdots + a_{n-2} x_i + a_{n-1} = y_i$$
$$(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

die Werte der unbekannten Koeffizienten zu ermitteln, und da die Determinante des Systems von Null verschieden ist (§ 27, d), so sieht man sofort (§ 50), daß die Lösung einzig ist. Ebenso ist, wenn $\lim\limits_{n=\infty} x_n = 0$ ist, das Problem bestimmt, sobald man wünscht, daß die Funktion in eine Potenzreihe entwickelbar sei; es kann aber auch vorkommen, daß es in dieser Form keine Lösung gestattet. Setzt man in der Tat voraus, daß zwei solche Funktionen existieren, so muß ihre Differenz $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ für unendlich viele Werte von x verschwinden, die nach Null konvergieren, und muß folglich wegen der Stetigkeit für $x = 0$ verschwinden. Daraus folgt $a_0 = 0$, und wenn man bemerkt, daß auch $a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots$ durch dieselben Werte von x zum Verschwinden gebracht wird, so findet man analog $a_1 = 0$, darauf $a_2 = 0$ und so fort, d. h. die beiden Funktionen

1) Baltzer: „Elemente der Mathematik“, 3. Teil, § 10.

fallen zusammen. Es ist ferner evident, daß, wenn die Zahlen $y_1, y_2, y_3, \ldots$ gesetzlos gegeben sind, die Existenz der gesuchten Funktion ganz in Frage gestellt ist, da es vor allen Dingen nötig ist, daß die genannten Zahlen mit unendlich zunehmendem n nach einem endlichen Grenzwert konvergieren.

344. Interpolierende Funktionen[1]). Der Ausdruck

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

heißt die erste interpolierende Funktion von $f(x)$ und ist also das zu einem gegebenen Intervall (x_1, x_2) gehörige Zuwachsverhältnis (vgl. § 281). Die zweite interpolierende Funktion von $f(x)$ ist

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_1, x_3)}{x_2 - x_3},$$

d. h. sie stellt bei festgehaltenem x_1 für das Intervall (x_2, x_3) die erste interpolierende Funktion von $f(x_1, x)$ dar. Fährt man so fort, so gelangt man zu der $(n-2)$-ten interpolierenden Funktion, und man definiert die $(n-1)$-te als die erste interpolierende Funktion von $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x)$ für das Intervall (x_{n-1}, x_n), d. h. man setzt

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}) - f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_n)}{x_{n-1} - x_n}.$$

Alle diese Funktionen lassen sich direkt ausdrücken mit Hilfe der gegebenen Zahlen $y_1, y_2, y_3, \ldots$ In der Tat hat man

$$f(x_1, x_2) = \frac{y_1}{x_1 - x_2} + \frac{y_2}{x_2 - x_1}, \quad f(x_1, x_3) = \frac{y_1}{x_1 - x_3} + \frac{y_3}{x_3 - x_1}$$

und, wenn man subtrahiert und durch $x_2 - x_3$ dividiert,

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{y_1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{y_2}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + \frac{y_3}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Es ist leicht das allgemeine Resultat vorauszusehen

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{y_1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_n)} + \cdots$$
$$+ \frac{y_n}{(x_n - x_1)(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1})},$$

und man verifiziert dasselbe in der üblichen Weise. Diese von Ampère herrührende Formel zeigt, daß jede interpolierende Funktion von $f(x)$ in Bezug auf die Werte von x, von denen sie abhängt, symmetrisch ist.

---

1) Siehe die Atti dell' Accademia delle Scienze di Torino (1881, 82, 83). Im Jahrg. 1878 findet man eine erste Abhandlung von Genocchi „Über die interpolierenden Funktionen" mit zahlreichen Hinweisen auf frühere Untersuchungen.

345. Formel von Newton. Aus der Definition der ersten interpolierenden Funktion von $f(x)$ in Bezug auf ein beliebiges Intervall (x, x_1) ergibt sich

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1) f(x_1, x),$$

und da analog

$$f(x_1, x) = f(x_1, x_2) + (x - x_2) f(x_1, x_2, x)$$

ist, so sieht man, daß

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1) f(x_1, x_2) + (x - x_1)(x - x_2) f(x_1, x_2, x)$$

wird. Fährt man in dieser Weise fort, so gelangt man offenbar zu der folgenden Formel:

$$(17)\quad f(x) = f(x_1) + (x - x_1) f(x_1, x_2) + (x - x_1)(x - x_2) f(x_1, x_2, x_3) + \cdots \\ + (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1}) f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x).$$

Wünscht man jetzt, daß $f(x)$ ein Polynom vom Grade $n - 1$ (oder eventuell von einem niedrigeren Grade) sei, so bemerke man, daß unter dieser Voraussetzung $f(x) - f(x_1)$ durch $x - x_1$ teilbar ist, so daß $f(x_1, x)$ ein Polynom vom Grade $n - 2$ wird. Daraus folgt, daß $f(x_1, x_2, x)$, betrachtet als erste interpolierende Funktion von $f(x_1, x)$, ein Polynom vom Grade $n - 3$ ist, und so geht es fort bis zu $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x)$, welches sich auf eine Konstante reduzieren muß. Also ist

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$$

und, wenn man dies in (17) einsetzt,

$$(18)\quad f(x) = f(x_1) + (x - x_1) f(x_1, x_2) + (x - x_1)(x - x_2) f(x_1, x_2, x_3) + \cdots \\ + (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1}) f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

Dies ist die Formel von Newton, mit deren Hilfe man immer das einzige Polynom, von einem Grade kleiner als n, konstruieren kann, welches für die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von x die vorgeschriebenen Werte $y_1, y_2, \ldots, y_n$ annimmt. Der Grad des Polynoms, der im allgemeinen gleich $n - 1$ ist, kann niedriger ausfallen, und tatsächlich findet dies statt, so oft die Zahlen y derart gegeben sind, daß $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gleich Null wird.

346. Formel von Lagrange. Um auf der rechten Seite von (18) die Zahlen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ explicite hervortreten zu lassen, braucht man nur die Ampèresche Formel anzuwenden, die in § 344 bewiesen worden ist. Zunächst bemerke man, daß jede interpolierende Funktion sich in linearer und homogener Form durch die y ausdrücken läßt und daher auch $f(x)$ diese Form hat, d. h. daß man schreiben kann

$$(19)\qquad f(x) = y_1 f_1(x) + y_2 f_2(x) + y_3 f_3(x) + \cdots + y_n f_n(x).$$

Dies vorausgeschickt bestimmt sich die Funktion $f_n(x)$ mit Hilfe der Ampèreschen Formel sofort, nachdem man bemerkt hat, daß nur das letzte Glied von (18) y_n enthält. Es wird ferner genügen, x_n in irgend ein x_i zu verwandeln, um auf Grund der Symmetrie den Ausdruck von $f(x)$ zu erhalten:

$$(20)\qquad f_i(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}.$$

Die Formel (19), in welcher die f_i die Bedeutung (20) haben, ist die Formel von Lagrange. Sie läßt sich übrigens auch direkt aufstellen, wenn man folgendes bemerkt: Will man die Lösung des Problems mit einem Ausdruck von der Form (19) versuchen, so muß notwendig $f_i(x)$ ein Polynom von einem Grad kleiner als n sein, welches für $x = x_i$ gleich 1 wird, während es für jedes $x = x_j \gtrless x_i$ verschwindet. Diesen Bedingungen genügt man augenscheinlich, indem man $f_i(x)$ den Ausdruck (20) beilegt. Ist auf diese Weise eine ganze Funktion $f(x)$ gefunden, die der Forderung entspricht, so wissen wir bereits, daß es keine andere geben kann, wenn nicht ihr Grad n erreicht oder übertrifft.

347. Die rechte Seite von (18) stellt eine Funktion dar, die die vorgeschriebenen Werte $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $\ldots$, $y_n = f(x_n)$ annimmt, wenn man x die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ beilegt. Die Differenz zwischen der linken und der rechten Seite ist eine Funktion $R_n(x)$, welche sich nur dann identisch auf Null reduziert, wenn f diejenige spezielle ganze Funktion von einem Grad kleiner als n ist, welche durch die genannten Bedingungen charakterisiert ist. Im allgemeinen kann man dagegen von $R_n(x)$ nur sagen, daß es die Wurzeln x_1, $x_2, \ldots, x_n$ zuläßt. Wir wollen diese Zahlen bereits in zunehmender Reihenfolge geordnet voraussetzen und bemerken, daß die Derivierte $R_n'(x)$ für $n-1$ Werte von x verschwinden muß (§ 303), die bezüglich in den Intervallen (x_1, x_2), (x_2, x_3), $\ldots$, (x_{n-1}, x_n) liegen. Ebenso verschwindet $R_n''(x)$ für $n-2$ Werte von x, die sicher zwischen x_1 und x_n liegen, und so fort. Endlich muß $R_n^{(n-1)}(x)$ für eine dem Intervall (x_1, x_n) angehörende Zahl ξ verschwinden. Nun hat man

$$R_n^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - (n-1)!\, f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Also ist

$$(21)\qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}.$$

Dieses Theorem ist sehr nützlich bei verschiedenen geometrischen Fragen. Man bemerke, daß, wenn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gleichzeitig nach a konvergieren, auch ξ nach a konvergiert. Mithin ist, wenn man die Stetigkeit von $f^{(n-1)}(x)$ für $x = a$ zuläßt,

(22) $$\lim f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}.$$

Zu R_n zurückkehrend bemerken wir, daß sich aus (17) nach Verwandlung von n in $n+1$ ergibt

$$R_n = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) f(x_1, x_2, \ldots, x_n, x),$$

und, wenn man mit ξ eine mitten zwischen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und x gelegene Zahl bezeichnet,

(23) $$R_n = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

So stellt sich die Formel von Newton, wenn man darin auf der rechten Seite diesen Ausdruck von R_n hinzufügt, als eine Ausdehnung der Formel von Taylor (§ 330), vervollständigt durch den Rest von Lagrange, dar und reduziert sich auf Grund von (22) tatsächlich auf diese letzte Formel, wenn man $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gleichzeitig nach einem Grenzwert a konvergieren läßt.

348. Anwendungen. a) Die Eigenschaft (22) setzt uns in den Stand, auf eine am Schlusse von § 343 angedeutete Frage zu antworten, sie gestattet uns nämlich diejenige in eine Potenzreihe entwickelbare Funktion $f(x)$ zu finden, welche für die nach Null konvergierenden Werte $x_1, x_2, x_3, \ldots$ von x a priori vorgeschriebene Werte annimmt. Es seien $n', n'', n''', \ldots$ beliebige Zahlen, die voneinander verschieden und größer als n sind. Wenn die Zahlen

$$\lim_{n=\infty} f(x_n) = a_0, \quad \lim_{n=\infty} f(x_n, x_{n'}) = a_1, \quad \lim_{n=\infty} f(x_n, x_{n'}, x_{n''}) = a_2, \quad \ldots$$

existieren, so ist die gesuchte Funktion $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$.

b) Die Berechnung des gemeinen Logarithmus (mit der Basis 10) von irgend einer Zahl läßt sich immer reduzieren auf die Berechnung des Logarithmus einer beliebig großen Zahl, indem man, wenn es nötig ist, die gegebene Zahl mit einer Potenz von 10 multipliziert. Wir wollen zeigen, daß man, wenn die zur Verfügung stehenden Tafeln ν-stellig sind, die Zahl x (von der man den Logarithmus berechnen will) nur größer als $10^{\left[\frac{\nu}{2}\right]}$ zu machen braucht, um von der bekannten Regel

$$\operatorname{Log} x = \operatorname{Log} n + (x - n) \operatorname{Log} \frac{n+1}{n}$$

Gebrauch machen zu können, in welcher n das größte in x enthaltene Ganze darstellt. In der Tat, wenn man die Formel von Newton, vervollständigt durch den Rest (23), auf die Funktion $\operatorname{Log} x$ anwendet und dabei $x_1 = n$, $x_2 = n + 1$ setzt, so erhält man gerade die obige Gleichung, wo aber auf der rechten Seite hinzukommt

$$R = (x - n)(n + 1 - x) \frac{M}{2\xi^2}.$$

Bemerken wir jetzt, daß $(x - n)(n + 1 - x)$ als Produkt von zwei

Faktoren, deren Summe gleich 1 ist, nicht größer sein kann als $\frac{1}{4}$ (§ 314, a), und erinnern wir uns daran (§ 220), daß $M < \frac{1}{2}$ ist. Dann folgt sofort, daß innerhalb der Genauigkeitsgrenzen, in denen die Rechnungen ausgeführt sind, R zu vernachlässigen ist, da man hat

$$R < \frac{1}{16\,\xi^2} < \frac{1}{16 \cdot 10^{2\left[\frac{\nu}{2}\right]}} < \frac{1}{10^\nu}.$$

c) Wenn die x und die zugehörigen y als Koordinaten von Punkten einer Kurve betrachtet werden, so stellt die erste interpolierende Funktion den Neigungskoeffizienten einer Sehne $M_1 M_2$ dar. Denken wir uns M_1 und M_2 in der Nähe des Punktes M gewählt, der der Abscisse a entspricht, und lassen wir sie nach M hinrücken. Wenn die Derivierte y' für $x = a$ stetig ist, so gibt die Gleichung (22)[1])

$$\lim \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = f'(a)$$

und sagt uns, daß die Tangente in M die Grenzlage aller Sekanten $M_1 M_2$ ist, während die Definition der Tangente uns diese Behauptung nur dann erlaubt, wenn ein Endpunkt der Sehne bereits in M fixiert ist.

d) Auch die zweite interpolierende Funktion hat eine einfache geometrische Bedeutung. Man weiß in der Tat aus der analytischen Geometrie, daß der Inhalt des Dreiecks $M_1 M_2 M_3$

$$\sigma = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)(x_1 - x_2) f(x_1, x_2, x_3)$$

ist unter der Voraussetzung, daß die Ecken in der angegebenen Reihenfolge von einem Punkte getroffen werden, der den Umfang durchläuft und dabei das Innere zur Linken läßt. Wir wollen nun, wenn die Kurve $y = f(x)$ gegeben ist, für $x = a$ die zweite Derivierte $f''(x)$ als stetig und von Null verschieden voraussetzen und in der Umgebung von a ein Intervall bestimmen (§ 273), in welchem $f''(x)$ das Vorzeichen von $f''(a)$ bewahrt. Den Grenzen eines solchen Intervalles entsprechen auf der Kurve zwei Punkte P und Q, und auf Grund von (21) hat für drei auf dem Bogen PQ gewählte Punkte M_1, M_2, M_3 die Funktion $f(x_1, x_2, x_3)$ offenbar das Vorzeichen von $f''(a)$. Dies vorausgeschickt nehme man nach Fixierung von M_1 den Punkt M_2 rechts von M_1 an, d. h. so, daß $x_2 > x_1$ ist, und wähle M_3 derart, daß ein beweglicher Punkt, der von M_1 nach M_2 gelangt ist, sich nach links wenden muß, wenn er nach M_3 weitergehen will. Unter diesen Bedingungen wird σ positiv sein, und es wird daher $(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$ das Zeichen von $f''(a)$ haben, woraus

---

1) Diese Gleichung könnte man als Definition der Derivierten wählen und würde damit gewisse Vorteile haben, die von Peano in der Mathesis (1892, p. 12) angegeben worden sind.

folgt, daß $f''(a)$ positiv oder negativ ist, je nachdem x_3 außerhalb oder innerhalb des Intervalles (x_1, x_2) liegt. Nun ist leicht zu erkennen, daß der Punkt M_3 außerhalb des Bogens $M_1 M_2$ liegen oder aber ins Innere dieses Bogens fallen muß, je nachdem derselbe konvex oder konkav gegen den unteren Teil der Figur ist. Daraus folgt, daß $f''(a)$ im ersten Falle positiv, im zweiten negativ ist. Zu diesem Schlusse gelangt man einfacher, wenn man auf der Kurve einen beliebigen Punkt M zwischen M_1 und M_2 annimmt und auf der Sehne $M_1 M_2$ den Punkt M' betrachtet, welcher dieselbe Abscisse x hat. Die Gleichung der Geraden $M_1 M_2$ ist

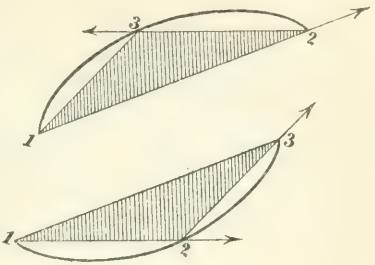

Fig. 11.

$$y = f(x_1) + (x - x_1) f(x_1, x_2),$$

und die Differenz zwischen der Ordinate von M und derjenigen von M' ist daher nach den Formeln (17) und (21)

$$(x - x_1)(x - x_2) f(x_1, x_2, x) = \tfrac{1}{2}(x - x_1)(x - x_2) f''(\xi),$$

wo ξ wie x zwischen x_1 und x_2 enthalten ist. Die genannte Differenz hat also das entgegengesetzte Zeichen wie $f''(\xi)$ oder $f''(a)$, so daß die Punkte M alle unterhalb oder alle oberhalb der Sehne $M_1 M_2$ liegen, je nachdem $f''(a)$ positiv oder negativ ist; und dies gilt für jeden in $M_1 M_2$ enthaltenen Bogen und die entsprechende Sehne. So kann also das Vorzeichen von $f''(x)$ dazu dienen, um längs der Kurve zu erkennen, welche Bogen (von hinreichender Kleinheit) ihre konkave Seite nach oben ($f'' > 0$) und welche sie nach unten kehren ($f'' < 0$).

e) Wenn unter den oben angegebenen Umständen die Punkte M_1, M_2, M_3 gleichzeitig nach einem festen Punkte $M\,(x = a)$ hinrücken, so geht auch der dem Dreieck $M_1 M_2 M_3$ umbeschriebene Kreis nach und nach in einen festen Kreis über, welcher der oskulierende Kreis der Kurve in M heißt, und zwar aus Gründen, die im folgenden klarer hervortreten werden. Um die Existenz eines solchen Grenzkreises nachzuweisen, braucht man nur zu zeigen, daß der Mittelpunkt des Kreises $M_1 M_2 M_3$ der Lage auf einer festen Geraden zustrebt und der Radius nach einem Grenzwert ϱ konvergiert. Nun ist aus den Elementen der Geometrie bekannt, daß man die Länge dieses Radius erhält, indem man das Produkt $l_1 l_2 l_3$ der Seitenlängen des Dreiecks $M_1 M_2 M_3$ durch 4σ dividiert. Werden andererseits mit φ_1, φ_2, φ_3 die Neigungen der Seiten gegen die x-Axe bezeichnet, so hat man

$$\pm (x_2 - x_3)(x_3 - x_1)(x_1 - x_2) = l_1 l_2 l_3 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3.$$

Daraus folgt, wenn man beachtet, daß diese drei Winkel nach dem analogen Winkel φ konvergieren, der zu dem festen Punkte M gehört, und wenn man sich an die Eigenschaft (22) erinnert,

$$\pm \frac{1}{\varrho} = 2 \lim f(x_1, x_2, x_3) \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 = f''(a) \cos^3\varphi,$$

wobei $\operatorname{tg}\varphi = f'(a)$ ist. Es ist also

$$\varrho = \pm \frac{\left(1 + f'^2(a)\right)^{\frac{3}{2}}}{f''(a)}.$$

Diese Länge, die für das Studium der Kurven äußerst wichtig ist, heißt der Krümmungsradius. Man bemerke endlich, daß der Mittelpunkt des Kreises $M_1 M_2 M_3$ sich beständig auf der Mittelsenkrechten von $M_1 M_2$ befindet. Da nun, wenn M_1 und M_2 nach M hinrücken, die Gerade $M_1 M_2$ in die Tangente im Punkte M übergeht, so ist klar, daß die genannte Senkrechte ihrerseits mit der Normale zusammenzufallen strebt, woraus folgt, daß der oskulierende Kreis in jedem Punkte einer Kurve zu den Kreisen gehört, die die Kurve in dem betrachteten Punkte berühren.

Bernoullische und Eulersche Zahlen.

349. Verschiedene wichtige Funktionen lassen sich nicht mit Hilfe der Formel (10), d. h. der Mac-Laurinschen Formel, in eine Potenzreihe entwickeln, weil es nicht gelingt, den allgemeinen Ausdruck der n-ten Derivierten zu finden. Zieht man auf der andern Seite in Betracht, daß in der genannten Formel eigentlich nicht die successiven Derivierten der Funktion auftreten, sondern nur ihre Werte für $x = 0$, so begreift man, daß mit der Berechnung der n-ten Derivierten von $f(x)$ mehr geschieht als für die Entwickelung von $f(x)$ in eine Potenzreihe genau genommen erforderlich ist, und daß sich folglich doch andere Wege darbieten müssen, um schlechthin zu der Kenntnis einer solchen Entwickelung zu gelangen. In dieser Hinsicht erweisen sich als sehr nützlich gewisse spezielle Zahlenfolgen, mit deren Eigenschaften wir uns in erster Linie beschäftigen wollen. Ihre Anwendung führt, wie wir bemerken wollen, häufig zu nicht konvergenten Reihen, die aber trotzdem brauchbar sind, insofern die Summe der n ersten Glieder sich rasch einer bestimmten Größe nähert, von der sie sich dann wieder mit wachsendem n entfernt, so daß Divergenz oder Unbestimmtheit herauskommt. Wegen dieser Eigenschaft heißen derartige Reihen pseudokonvergent.

350. Die Theorie der erwähnten Zahlenfolgen gründet sich auf die folgende Bemerkung: Die Identität

$$(24) \qquad f(a + (h + x)) = f((a + h) + x),$$

in welcher die beiden Seiten als nach der Taylorschen Formel entwickelt vorausgesetzt werden, bleibt bestehen, wenn man die Potenzen der Veränderlichen x durch beliebige Zahlen ersetzt. Wendet man in der Tat die Taylorsche Formel auf die Entwickelung von $f(a + h + x)$ an, so kann man in zwei verschiedenen Weisen schreiben:

$$f((a+h)+x) = f(a+h) + \frac{x}{1} f'(a+h) + \frac{x^2}{1.2} f''(a+h) + \cdots,$$

$$f(a+(h+x)) = f(a) + \frac{h+x}{1} f'(a) + \frac{(h+x)^2}{1.2} f''(a) + \cdots.$$

Wenn wir nun in der zweiten Reihe alle Glieder zusammenfassen, welche x^n enthalten, so müssen wir notwendig (§ 329) den Koeffizienten wiederfinden, den x^n in der ersten Reihe hat. Daraus geht hervor, daß die beiden betrachteten Ausdrücke miteinander identisch bleiben, wenn man die Folge $1, x, x^2, x^3, \ldots$ durch eine andere $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ ersetzt. So hat man z. B., wenn man $(a+h+x)^2$ entwickelt,

$$a^2 + 2a(h+x) + (h^2 + 2hx + x^2) = (a+h)^2 + 2(a+h)x + x^2,$$

kann aber auch schreiben

$$a^2\alpha_0 + 2a(h\alpha_0 + \alpha_1) + (h^2\alpha_0 + 2h\alpha_1 + \alpha_2) = (a+h)^2\alpha_0 + 2(a+h)\alpha_1 + \alpha_2,$$

welches auch die Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ sein mögen. Den Ausdruck

$$\alpha_0 f(x) + \frac{\alpha_1 h}{1} f'(x) + \frac{\alpha_2 h^2}{1.2} f''(x) + \frac{\alpha_3 h^3}{1.2.3} f'''(x) + \cdots$$

pflegt man symbolisch mit $f(x+\alpha h)$ zu bezeichnen. Besonders bemerkenswert ist die Funktion $e^{\alpha x}$, d. h.

$$\alpha_0 + \frac{\alpha_1 x}{1} + \frac{\alpha_2 x^2}{1.2} + \frac{\alpha_3 x^3}{1.2.3} + \cdots,$$

welche die erzeugende Funktion der Folge $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ heißt. Es ist hier nützlich zu bemerken, daß die Regel für die Multiplikation der Reihen (§ 234) sich in folgender symbolischen Gleichung ausspricht

(25) $$e^{\alpha x} \cdot e^{\beta x} = e^{(\alpha+\beta)x},$$

die wir im folgenden häufig anwenden werden.

351. Bernoullische Zahlen. Bernoullische Zahlen heißen die durch die symbolische Gleichung

(26) $$(B+1)^p - B^p = p$$

definierten Zahlen, wobei p successiv die Werte $1, 2, 3, \ldots$ annehmen muß. Überdies wird angenommen $B_0 = 1$. So findet man für $p=2$ $2B_1 + 1 = 2$, woraus man entnimmt $B_1 = \frac{1}{2}$. Ferner ist für $p=3$

$$3B_2 + 3B_1 + 1 = 3,$$

woraus man entnimmt $B_2 = \frac{1}{6}$, und in derselben Weise erhält man weiter folgendes:

$$B_3 = 0, \quad B_4 = -\tfrac{1}{30}, \quad B_5 = 0, \quad B_6 = \tfrac{1}{42}, \quad B_7 = 0, \quad B_8 = -\tfrac{1}{30},$$
$$B_9 = 0, \quad B_{10} = \tfrac{5}{66}, \quad B_{11} = 0, \quad B_{12} = -\tfrac{691}{2730}, \quad B_{13} = 0, \quad B_{14} = \tfrac{7}{6},$$
$$B_{15} = 0, \quad B_{16} = -\tfrac{3617}{510}, \quad B_{17} = 0, \quad B_{18} = \tfrac{43867}{798}, \quad B_{19} = 0, \cdots.$$

Dies vorausgeschickt hat man identisch

$$f(x+(B+1)h) - f(x+Bh) = \sum_{p=1}^{p=\infty} ((B+1)^p - B^p) \frac{h^p f^{(p)}(x)}{p!},$$

und die rechte Seite reduziert sich auf Grund von (26) auf

$$hf'(x) + \frac{h^2}{1} f''(x) + \frac{h^3}{1 \,.\, 2} f'''(x) + \cdots = hf'(x+h).$$

Folglich kann man, wenn man die Identität (24) berücksichtigt, schreiben

(27) $$f((x+h)+Bh) - f(x+Bh) = hf'(x+h).$$

Dies ist die Fundamentalformel in der Theorie der Bernoullischen Zahlen. Setzt man $x = -h$ und verwandelt dann h in x, so erhält man

(28) $$f(Bx) - f(Bx - x) = xf'(0).$$

352. Die Bernoullischen Zahlen mit ungeradem Index sind null außer $B_1 = \frac{1}{2}$. In der Tat gibt für $f(x) = x^p$ die Formel (28)

(29) $$B^p - (B-1)^p = 0,$$

vorausgesetzt, daß nicht $p = 1$ ist, in welchem Falle die rechte Seite 1 ist. Für $p > 1$ hat man also $(B+1)^p - (B-1)^p = p$ oder nach Verwandlung von p in $2p$

$$B_{2p-1} + \tfrac{1}{6}(2p-1)(2p-2) B_{2p-3} + \cdots + \tfrac{1}{6}(2p-1)(2p-2) B_3 = 0.$$

Setzt man nacheinander $p = 2, 3, 4, \ldots$, so sieht man, daß B_3, B_5, $B_7, \ldots$ alle null sind.

353. Für $f(x) = e^x$ liefert die Formel (28) die erzeugende Funktion der Bernoullischen Zahlen. In der Tat kann man unter Beachtung von (25) successiv schreiben

$$e^{Bx} - e^{Bx} \cdot e^{-x} = x, \quad e^{Bx} = \frac{x e^x}{e^x - 1}$$

oder

$$\frac{x e^x}{e^x - 1} = 1 + B_1 x + \frac{B_2 x^2}{1 \,.\, 2} + \frac{B_3 x^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \cdots = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + \cdots.$$

Für andere Formen von $f(x)$ liefert die Formel (28) andere interessante Reihenentwickelungen. Z. B. erhält man, wenn $f(x) = \cos x$ ist,

$$\cos Bx - \cos Bx \cdot \cos x - \sin Bx \cdot \sin x = 0.$$

Nun bemerke man, daß wegen $B_3 = B_5 = B_7 = \cdots = 0$

$$\sin Bx = B_1 x - \frac{B_3 x^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \frac{B_5 x^5}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} - \cdots = \frac{x}{2}$$

ist. Also kommt, wenn man x in $2x$ verwandelt,

$$\cos 2Bx = \frac{x \sin 2x}{1 - \cos 2x} = x \cot x,$$

d. h.

$$x \cot x = 1 - \frac{4 B_2 x^2}{1 \,.\, 2} + \frac{4^2 B_4 x^4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} - \frac{4^3 B_6 x^6}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6} + \cdots.$$

Aus dieser Entwickelung lassen sich ferner sofort diejenigen von $\frac{x}{\sin x}$, $\operatorname{tg} x$ u. s. w. ableiten, wenn man bemerkt, daß

$$\cot \frac{x}{2} - \cot x = \frac{1}{\sin x}, \quad \cot x - 2 \cot 2x = \operatorname{tg} x$$

u. s. w. ist. Man erhält auf diese Weise

$$x \cot x = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \frac{2x^6}{945} - \frac{x^8}{4725} - \cdots,$$

$$\frac{x}{\sin x} = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + \frac{31 x^6}{15120} + \frac{127 x^8}{604800} + \cdots,$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17 x^7}{315} + \frac{62 x^9}{2835} + \cdots.$$

354. Eulersche Zahlen. Eulersche Zahlen heißen die durch die symbolische Relation

$$(E+1)^p + (E-1)^p = 0$$

definierten Zahlen, wo p nacheinander die Werte 1, 2, 3, ... beigelegt werden. Man erhält so die Folge

$$1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 5,\ 0,\ -61,\ 0,\ 1365,\ 0,\ -50521,\ 0,\ 2702765, \ldots.$$

Es ist eine evidente Folge der Definition, daß die Eulerschen Zahlen mit ungeradem Index alle null sind. Inzwischen hat man identisch auf Grund der Definition

$$f(x + (E+1)h) + f(x + (E-1)h) = 2f(x),$$

mithin unter Erinnerung an die Identität (24)

$$f((x+h) + Eh) + f((x-h) + Eh) = 2f(x).$$

Dies ist die Fundamentalformel in der Theorie der Eulerschen Zahlen. Setzt man $x = 0$ und verwandelt dann h in x, so erhält man

$$f(Ex + x) + f(Ex - x) = 2f(0).$$

Insbesondere findet man für $f(x) = e^x$ unter Beachtung von (25)

$$e^{Ex} \cdot e^x + e^{Ex} \cdot e^{-x} = 2, \quad e^{Ex} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}.$$

Mit andern Worten, die erzeugende Funktion der Eulerschen Zahlen ist

$$\frac{2}{e^x + e^{-x}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} - \frac{61 x^6}{720} + \frac{277 x^8}{8064} - \cdots.$$

Andere interessante Entwickelungen erhält man für andere Formen von $f(x)$. Für $f(x) = \cos x$ findet man z. B. $\cos Ex = \sec x$, d. h.

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61 x^6}{720} + \frac{277 x^8}{8064} + \cdots.$$

355. Die Eulerschen Zahlen genießen verschiedene interessante Eigenschaften. Betrachtet man z. B. nur die nicht verschwindenden Zahlen mit Ausschluß von E_0, so ist leicht zu bemerken, daß sie alle von der Form $6k-1$ sind, und daß die an gerader Stelle befindlichen mit einer 5 endigen, die andern mit einer 1, u. s. w. Diese Eigenschaften sind in folgendem Theorem von Sylvester[1]) enthalten, welches wir hier nur aussprechen wollen: Wenn $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die Divisoren von $p-p'$ sind, so ist die Differenz $E_{2p}-E_{2p'}$ teilbar durch diejenigen von den Zahlen $2\alpha+1, 2\beta+1, 2\gamma+1, \ldots$, welche Primzahlen sind. Im folgenden werden wir uns jetzt ausschließlich mit den Bernoullischen Zahlen beschäftigen. Wir wollen aber zuvor bemerken, daß dieselben in einer sehr einfachen Beziehung zu den Eulerschen stehen. In der Tat hat man

$$e^{(4B-1)x} - e^{(4B-3)x} = \frac{4xe^{4x}}{e^{4x}-1}\left(e^{-x}-e^{-3x}\right) = \frac{4x}{e^x+e^{-x}} = 2xe^{Ex},$$

und die Vergleichung der Koeffizienten von x^p liefert uns sofort die symbolische Gleichung

$$E_{p-1} = \frac{(4B-1)^p - (4B-3)^p}{2p}.$$

Umgekehrt läßt sich aus der Identität

$$e^{4Bx} - e^{2Bx} = \frac{4xe^{4x}}{e^{4x}-1} - \frac{2xe^{2x}}{e^{2x}-1} = \frac{2xe^x}{e^x+e^{-x}} = xe^{(E+1)x}$$

entnehmen

$$B_p = \frac{p(E+1)^{p-1}}{2^p\left(2^p-1\right)}.$$

356. Eulersche Summenformel. Um die vorhin erhaltenen Entwickelungen zu rechtfertigen, ist es notwendig den Fehler zu kennen, den man macht, wenn man bei irgend einem Gliede abschließt, und dann zu beweisen, daß dieser Fehler nach Null konvergiert, wenn die Zahl der benutzten Glieder unbegrenzt zunimmt. Wenn wir die Fundamentalformel (27) schreiben, indem wir nur $n+1$ Glieder in der Entwickelung jedes Bestandteiles der linken Seite nehmen und den Rest mit R_n bezeichnen, so finden wir die Eulersche Summenformel[2])

$$(30)\qquad hf'(x+h) = \delta f(x) + \frac{B_1 h}{1}\,\delta f'(x) + \frac{B_2 h^2}{1\,.\,2}\,\delta f''(x) + \cdots$$
$$+ \frac{B_n h^n}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots n}\,\delta f^{(n)}(x) + R_n,$$

in welcher wir noch die Grenzen zu suchen haben, zwischen welchen

1) „Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris" (t. 52, p. 212). Der Beweis, der von Stern herrührt, steht in „Crelles Journal" (Bd. 79, S. 67).

2) „Institutiones calculi differentialis" (cap. V).

R_n variieren kann. Diese Bestimmung ist von Malmstén[1]) ausgeführt worden, der für gerades n folgende beiden Ausdrücke gefunden hat:

$$R_n = \frac{B_{n+2}}{(n+2)!} h^{n+3} f^{(n+3)}(x+\theta h), \quad R_n = \frac{\theta B_{n+2}}{(n+2)!} \frac{2^{n+2}-1}{2^{n+1}} h^{n+2} \delta f^{(n+2)}(x).$$

Da der Beweis dieser Formeln die Kenntnis der Integralrechnung[2]) erfordert, so werden wir uns mit einem weniger befriedigenden Ausdruck begnügen, der aber für die gewöhnlichen Anwendungen genügt und sich in sehr einfacher Weise aufstellen läßt. Auf die Funktion

$$F(z) = f(z) + \frac{x-z+Bh}{1} f'(z) + \cdots + \frac{(x-z+Bh)^n}{n!} f^{(n)}(z)$$

wende man das Theorem von Lagrange an

$$F(x+h) - F(x) = hF'(x+\theta h). \tag{31}$$

Ferner bemerke man, daß

$$F(x) = f(x) + \frac{B_1 h}{1} f'(x) + \frac{B_2 h^2}{2!} f''(x) + \cdots + \frac{B_n h^n}{n!} f^{(n)}(x)$$

ist, während man auf Grund von (29) hat

$$F(x+h) = f(x+h) + \frac{B_1 h}{1} f'(x+h) + \frac{B_2 h^2}{2!} f''(x+h) + \cdots$$
$$+ \frac{B_n h^n}{n!} f^{(n)}(x+h) - hf'(x+h).$$

Setzt man daher in (31) ein und berücksichtigt die Formel (30), so kommt

$$R_n = -hF'(x+\theta h).$$

Inzwischen ist leicht zu sehen, daß

$$F'(z) = \frac{(x-z+Bh)^n}{n!} f^{(n+1)}(z)$$

ist. Es wird also

$$R_n = -\frac{(B-\theta)^n}{n!} h^{n+1} f^{(n+1)}(x+\theta h).$$

Um diese Formel anwenden zu können, ist es vor allen Dingen nötig die Grenzen zu kennen, innerhalb deren der symbolische Ausdruck $(B-\theta)^n$ variiert, wenn θ von 0 bis 1 variiert; und wir werden sehen, daß man auch wissen muß, wie B_n variiert, wenn n jede Grenze überschreitet. Am Ende dieses Kapitels werden wir in der Lage sein, auf diese Fragen zu antworten, und werden uns dann von der Legi-

1) „Crelles Journal" (1847, S. 55). Eine andere Form von R_n ist angegeben worden von Sonin in den „Annales de l'École normale supérieure" (1889, p. 257).

2) Tannery: „Fonctions d'une variable", p. 353. Darboux: „Sur les développements en série" (Journal von Liouville, 3. Serie, Bd. II).

timität der Entwickelungen von $\frac{xe^x}{e^x-1}$, $\frac{x}{\sin x}$, $x\cot x$, $\operatorname{tg} x$ u. s. w. überzeugen und ermitteln, mit welcher Annäherung sich andere wichtige nicht konvergente Entwickelungen anwenden lassen, die wir in kurzem antreffen werden.

357. Summenformel von Mac-Laurin. Verwandelt man in der Formel (27) x in $x+h$, $x+2h$, ... und summiert dann, so erhält man

$$h\{f'(x+h)+f'(x+2h)+\cdots+f'(x+nh)\}=f(x+nh+Bh)-f(x+Bh).$$

Im besondern ist für $x=0$ und $h=1$

$$(32)\qquad f'(1)+f'(2)+f'(3)+\cdots+f'(n)=f(n+B)-f(B).$$

Dies ist die Summenformel von Mac-Laurin. Man bemerke, daß die rechte Seite nichts anderes ist als die symbolische Darstellung von

$$l+f(n)+\frac{B_1}{1}f'(n)+\frac{B_2}{1\,.\,2}f''(n)+\frac{B_3}{1\,.\,2\,.\,3}f'''(n)+\cdots,$$

wo l eine in jedem Falle zu bestimmende Konstante ist. So erläutert und vervollständigt die Formel (32) gewisse in § 334 mit größerer Strenge erhaltene Resultate. Es versteht sich aber, daß man diese Formel nicht ohne Vorsicht anwenden darf, wenn man darin nicht zuvor den Ausdruck des Restes eingeführt hat.

358. Anwendungen. a) Summe gleicher Potenzen der n ersten ganzen Zahlen. Für $f(x)=x^{p+1}$ gibt die Formel (32) sofort

$$1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p=\frac{(n+B)^{p+1}-B^{p+1}}{p+1},$$

d. h.

$$1^p+2^p+\cdots+n^p=\frac{n^{p+1}}{p+1}+\frac{1}{2}n^p+\frac{p}{12}n^{p-1}$$
$$-\frac{p(p-1)(p-2)}{720}n^{p-3}+\cdots+B_pn.$$

Z. B. ist

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}=\frac{1}{2}n(n+1),$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2,$$

$$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}$$
$$=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1),$$

$$1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5=\frac{n^6}{6}+\frac{n^5}{2}+\frac{5n^4}{12}-\frac{n^2}{12}$$
$$=\frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1),$$

$$1^6 + 2^6 + 3^6 + \cdots + n^6 = \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42}$$

$$= \frac{1}{42} n(n+1)(2n+1)(3n^4 + 6n^3 - 3n + 1),$$

$$1^7 + 2^7 + 3^7 + \cdots + n^7 = \frac{n^8}{8} + \frac{n^7}{2} + \frac{7n^6}{12} - \frac{7n^4}{24} + \frac{n^2}{12}$$

$$= \frac{1}{24} n^2(n+1)^2(3n^4 + 6n^3 - n^2 - 4n + 2),$$

. . . .

b) Harmonische Reihe (vgl. § 335, b). Für $f(x) = \log x$ gibt die Formel (32)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \log(n + B) - \log B = \mathbf{C} + \log n + \log\left(1 + \frac{B}{n}\right),$$

d. h. in pseudokonvergenter Reihe

$$H_n = \mathbf{C} + \log n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} - \frac{1}{252n^6} + \frac{1}{240n^8} - \frac{1}{132n^{10}} + \cdots.$$

c) Formel von Stirling (vgl. § 335, c). Ebenso erhält man für $f(x) = x \log x - x$

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{1260n^5} - \frac{1}{1680n^7} + \frac{1}{1188n^9} - \cdots},$$

darf aber nicht vergessen, daß die im Exponenten stehende Reihe nicht konvergiert. Zur Übung kann der Leser den vorstehenden Ausdruck in

$$n! = \sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{e}\sqrt{n^2 + n + \frac{1}{6} + \frac{1}{120n^2} + \cdots}\right)^{n+\frac{1}{2}}$$

transformieren. Vernachlässigt man unter dem Wurzelzeichen die Glieder mit $\frac{1}{n}$, so findet man die von Forsyth[1]) zur Berechnung von $n!$ angegebene Formel.

359. Bernoullische Polynome. Man nennt so die Polynome

$$(33) \qquad \varphi_p(x) = \frac{(x - 1 + B)^{p+1} - B^{p+1}}{p+1},$$

die für ganzzahliges x, wie wir gesehen haben, die Summen $1^p + 2^p + \cdots + (x-1)^p$ darstellen. Offenbar ist $\varphi_p(1) = 0$, und man sieht auch unter Beachtung von (29), daß $\varphi_p(0) = 0$ ist. Welches ist der Wert von $\varphi_p(\frac{1}{2})$? Man hat

$$e^{\left(B - \frac{1}{2}\right)x} = e^{Bx} \cdot e^{-\frac{x}{2}} = \frac{xe^{\frac{x}{2}}}{e^x - 1} = \frac{xe^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - 1} - \frac{xe^x}{e^x - 1}$$

---

1) In den „Reports“ der „British Association“ (Rep. of the 53rd meeting, 1884, p. 407).

und leitet daraus, indem man die Koeffizienten von $\frac{x^p}{p!}$ auf beiden Seiten einander gleich setzt, ab

$$\left(B-\frac{1}{2}\right)^p = 2\,\frac{B_p}{2^p} - B_p = -\left(1-\frac{1}{2^{p-1}}\right)B_p.$$

Also ist

$$\varphi_p\left(\frac{1}{2}\right) = -\,2\left(1-\frac{1}{2^{p+1}}\right)\frac{B_{p+1}}{p+1}. \tag{34}$$

Daraus folgt, wenn p gerade ist, $\varphi_p(\frac{1}{2}) = 0$. Übrigens ist es leicht dem Ausdruck von $\varphi_p(x)$ eine Form zu geben, die die Wurzeln 0, 1, $\frac{1}{2}$ in Evidenz setzt. Wenn man die rechte Seite von (33), nachdem man an Stelle von $x-1+B$ geschrieben hat $(x-\frac{1}{2})+(B-\frac{1}{2})$, nach Potenzen von $x-\frac{1}{2}$ entwickelt, so erhält man für $\varphi_p(x)$ den Ausdruck

$$\frac{(x-\frac{1}{2})^{p+1}}{p+1} - \frac{p}{24}(x-\tfrac{1}{2})^{p-1} + \frac{7p(p-1)(p-2)}{5760}(x-\tfrac{1}{2})^{p-3} - \cdots,$$

in welchem das letzte Glied

$$\frac{B_{p+1}}{(p+1)2^p} \quad \text{oder} \quad -\left(1-\frac{1}{2^{p-1}}\right)B_p\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

ist, je nachdem p ungerade oder gerade ist. Man bemerke hier, daß $x-\frac{1}{2}$ nur sein Zeichen wechselt, wenn man x in $1-x$ verwandelt, und daß man daher hat

$$\varphi_p(1-x) = (-1)^{p+1}\varphi_p(x). \tag{35}$$

Im Falle eines ungeraden p kann man die obige Entwickelung nach Potenzen von $x(x-1)$ ordnen, indem man bemerkt, daß $(x-\frac{1}{2})^2 = x(x-1)+\frac{1}{4}$ ist. Das Gleiche läßt sich in dem andern Falle machen, nachdem man $x-\frac{1}{2}$ in Evidenz gesetzt hat. Auf diese Weise gelangt man, wenn man den Fall eines ungeraden Index von dem eines geraden Index unterscheidet, zu den folgenden bemerkenswerten Ausdrücken:

$$\begin{aligned}2p\varphi_{2p-1}(x) = x^2(x-1)^2\Big\{&x^{p-2}(x-1)^{p-2} - \frac{p(p-2)}{6}x^{p-3}(x-1)^{p-3}\\ &+\frac{p(p-1)(p-3)(7p-8)}{360}x^{p-4}(x-1)^{p-4} - \cdots + p(2p-1)B_{2p-2}\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4p+2)\varphi_{2p}(x) = x(x-1)(2x-1)\Big\{&x^{p-1}(x-1)^{p-1} - \frac{p(p-1)}{6}x^{p-2}(x-1)^{p-2}\\ &+\frac{p(p-1)(p-2)(7p-1)}{360}x^{p-3}(x-1)^{p-3} - \cdots + (4p+2)B_{2p}\Big\}.\end{aligned}$$

360. Wir wollen jetzt beweisen, daß in dem Intervall (0, 1) die Bernoullischen Polynome mit geradem Index nur an den Grenzen verschwinden und im Mittelpunkte, wo sie ihr Zeichen wechseln, daß ferner die Polynome mit ungeradem Index nur an den Grenzen verschwinden und ihren größten absoluten Betrag im Mittelpunkte des Intervalles erreichen. Wir wissen bereits, daß $\varphi_{2p}(x)$ für $x = 0, \frac{1}{2}, 1$ verschwindet, und daß es nach (35) sein Zeichen ändert, wenn x von einer Seite von $\frac{1}{2}$ auf die andere übergeht. Es bleibt uns also nur übrig, zu zeigen, daß φ_{2p} nicht zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ und auch nicht zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 verschwindet. Nehmen wir an, dies sei richtig für $\varphi_{2p-2}(x)$, so daß also diese Funktion zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ ein bestimmtes Vorzeichen und zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 das entgegengesetzte Vorzeichen bewahrt, und wenden wir auf die Funktion $f = \varphi_{2p}$ die bekannte Interpolationsformel (§ 347)

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1) f(x_1, x_2) + \tfrac{1}{2}(x - x_1)(x - x_2) f''(\xi)$$

an, indem wir $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$ setzen und beachten, daß

$$\varphi''_{2p}(x) = 2p(x - 1 + B)^{2p-1} = 2p(2p-1)\,\varphi_{2p-2}(x)$$

ist. Dann ergibt sich

$$\varphi_{2p}(x) = p(2p-1)\,x(x - \tfrac{1}{2})\,\varphi_{2p-2}(\xi),$$

wo ξ wie x zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ enthalten ist. Diese Formel setzt in Evidenz nicht nur, daß die Funktion $\varphi_{2p}(x)$ in dem Intervalle $(0, 1)$, abgesehen von den Grenzen und vom Mittelpunkt, nicht verschwinden kann, sondern auch, daß ihr Vorzeichen zu demjenigen von $\varphi_{2p-2}(x)$ beständig entgegengesetzt ist. Da man nun direkt sieht, daß die Funktion $\varphi_2(x)$ oder $\frac{1}{6}x(x-1)(2x-1)$ links von $\frac{1}{2}$ positiv und rechts davon negativ ist, so darf man den ausgesprochenen Satz für jeden Wert von p behaupten und kann hinzufügen, daß $\varphi_{2p}(x)$ links von $\frac{1}{2}$ das Zeichen von $(-1)^{p+1}$ hat und rechts das entgegengesetzte Zeichen. Ferner ist die Funktion $\varphi_{2p-1}(x)$, deren Derivierte

$$\varphi'_{2p-1}(x) = (x - 1 + B)^{2p-1} = (2p-1)\,\varphi_{2p-2}(x)$$

lautet, zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ wachsend oder abnehmend, zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 dagegen abnehmend oder wachsend, je nachdem p gerade oder ungerade ist. Sie bewahrt also im Innern von $(0, 1)$ das Vorzeichen von $(-1)^p$ und erreicht für $x = \frac{1}{2}$ den größten absoluten Betrag.

361. Die obigen Eigenschaften haben Konsequenzen, die für die Bernoullischen Zahlen von Wichtigkeit sind. In der Tat haben wir in § 352 zwar bewiesen, daß die Zahlen $B_3, B_5, \ldots$ alle null sind. Es ist aber noch zweifelhaft, ob nicht in der Reihe $B_2, B_4, \ldots$ ebenfalls Zahlen vorkommen, die verschwinden. Die Formel (34) beseitigt diesen Zweifel sofort und sagt uns überdies, daß das Zeichen von B_{2p} demjenigen von $\varphi_{2p-1}(\frac{1}{2})$ entgegengesetzt und folglich das Zeichen von $(-1)^{p+1}$ ist. Also haben die Bernoullischen Zahlen mit geradem Index alternierende Vorzeichen. Das Gleiche läßt sich von den Eulerschen Zahlen behaupten. In der Tat liefert die Formel (33)

$$(2p+1)\varphi_{2p}(\tfrac{1}{4}) = (B-\tfrac{3}{4})^{2p+1}, \quad (2p+1)\varphi_{2p}(\tfrac{3}{4}) = (B-\tfrac{1}{4})^{2p+1},$$

woraus unter Berücksichtigung von (35) folgt (§ 355)

$$E_{2p} = 2^{4p+1}(\varphi_{2p}(\tfrac{3}{4}) - \varphi_{2p}(\tfrac{1}{4})) = -4^{2p+1}\varphi_{2p}(\tfrac{1}{4}).$$

Also hat E_{2p} das Zeichen von $(-1)^p$.

362. Es folgt noch aus dem in § 360 Gesagten, daß man, wenn n eine gerade Zahl ist, in dem Intervall (0, 1) hat

$$|\varphi_n(x)| \leqq 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\frac{|B_n|}{n}.$$

Es ist mit andern Worten

$$|(B-\theta)^n - B^n| \leqq 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)|B_n|$$

für jeden Wert von θ zwischen 0 und 1. Da ferner φ_{n-1} in dem genannten Intervalle das zu dem von B_n entgegengesetzte Zeichen bewahrt, so hat man

$$|(B-\theta)^n - B^n| = \left(1-\frac{(B-\theta)^n}{B^n}\right)|B_n|,$$

folglich

$$-1+\frac{1}{2^{n-1}} \leqq \frac{(B-\theta)^n}{B^n} \leqq 1.$$

Wir sehen auf diese Weise, daß der absolute Betrag von $(B-\theta)^n$ niemals den von B_n übertrifft, und der in § 356 gefundene Ausdruck des Restes R_{n+2} ist daher dem absoluten Betrage nach nicht größer als der erste der von Malmstén gegebenen Ausdrücke von R_n. Dies beweist, daß beide Ausdrücke gleich vorteilhaft sind, wenn es sich darum handelt, zu beweisen, daß für unendliches n der Rest nach Null konvergiert. So etwas kann man aber nicht mehr sagen, wenn man $|R_n|$ zwischen Grenzen einzuschließen sucht bei den pseudokonvergenten Reihen, die der symbolische Kalkül liefert.

363. Die in § 360 bewiesenen Eigenschaften der Bernoullischen Polynome finden eine leichte und interessante Aufklärung in der Möglichkeit, diese Polynome durch die eine oder die andre der Reihen

$$(36) \qquad \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin nx}{n^p}, \quad \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\cos nx}{n^p}$$

darzustellen, je nachdem ihr Index gerade oder ungerade ist. Vorher müssen wir aber die Summe der Reihe

$$(37) \qquad f(x) = \sin x + \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x + \cdots$$

auswerten, indem wir eine wichtige Formel beweisen, die wir bereits bei zwei Gelegenheiten (§§ 254, g; 277, f) in Anspruch genommen haben. Wenn man bemerkt, daß

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos mx = \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(m - \frac{1}{2}\right)x$$

ist, so findet man leicht, daß die Derivierte der Summe der n ersten Glieder in der betrachteten Reihe

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots + \cos nx = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

ist. Daraus folgt, daß die Funktion

$$F(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \cdots + \frac{1}{n} \sin nx + \frac{x}{2} + \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{(2n+1) \sin \frac{x}{2}},$$

die in jedem Intervall, welches kein Vielfaches von 2π enthält, definiert ist, die Derivierte

$$F'(x) = -\frac{\cos \frac{x}{2} \cdot \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{4(n+2) \sin^2 \frac{x}{2}}$$

hat, und man sieht, daß $\lim\limits_{n=\infty} F'(x) = 0$ ist. Wenn nun k die größte in $\frac{x}{2\pi}$ enthaltene ganze Zahl ist, so kann man das Theorem von Lagrange (§ 306) auf die Funktion $F(x)$ anwenden für jedes Paar von Werten (z. B. x und $\pi + 2k\pi$), die in dem Intervall $(2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$ mit Ausschluß der Grenzen gewählt sind. Auf solche Weise erhält man, wenn man mit ξ eine zwischen x und $\pi + 2k\pi$ enthaltene Zahl bezeichnet,

$$\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \cdots + \frac{1}{n} \sin nx$$

$$= \frac{\pi - x}{2} + k\pi - \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{(2n+1) \sin \frac{x}{2}} + (x - \pi - 2k\pi) F'(\xi).$$

Mithin ist für unendliches n

$$(38) \qquad f(x) = \frac{\pi - x}{2} + \left[\frac{x}{2\pi}\right]\pi.$$

364. Wir sind jetzt imstande, die Summe $\Phi_p(x)$ der ersten oder der zweiten Reihe (36) auszuwerten, je nachdem p ungerade oder gerade ist. Bekanntlich ist (§ 320, b, c) die Konvergenz der Reihen (36) für $p > 1$ in jedem Intervalle gleichmäßig, und das Gleiche läßt sich für $p = 1$, d. h. von der Reihe (37), behaupten, vorausgesetzt, daß man die Werte von x ausschließt, welche Vielfache von 2π sind. Man kann also behaupten (§ 323), daß man hat

$$\Phi_p'(x) = (-1)^{p-1}\Phi_{p-1}(x). \tag{39}$$

Wir kennen bereits $\Phi_1(x) = f(x)$, welches durch die Formel (38) gegeben ist. Diese schreiben wir jetzt zweckmäßig $\Phi_1(x) = \pi(B - \varrho)$, indem wir setzen

$$\varrho = \frac{x}{2\pi} - \left[\frac{x}{2\pi}\right].$$

Da $\pi(B-\varrho)$ die Derivierte von $-\pi^2(B-\varrho)^2$ ist, so hat man (§ 307, b)

$$\Phi_2(x) = \pi^2(B-\varrho)^2 + \alpha,$$

wo α eine Konstante ist, wenigstens in jedem Intervalle $(2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$ mit Ausschluß der Grenzen. Übrigens hängt α nicht von k ab, da Φ_2 und $(B-\varrho)^2$ nicht variieren, wenn man x um ein Vielfaches von 2π variieren läßt. Um den Wert von α zu erfahren, bemerke man, daß

$$\Phi_p(\pi) = \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^p} = -\sum_1^\infty \frac{1}{n^p} + 2\sum_1^\infty \frac{1}{(2n)^p} = -\left(1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right)\sum_1^\infty \frac{1}{n^p}$$

oder $\Phi_p(\pi) = -\left(1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right)\Phi_p(0)$ ist für jeden geraden Wert von p, und man erinnere sich an die Gleichheit $\left(B - \frac{1}{2}\right)^p = -\left(1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right)B_p$, die in § 359 bewiesen ist. Für $p = 2$ ist

$$\Phi_2(\pi) = \pi^2\left(B - \frac{1}{2}\right)^2 + \alpha = -\frac{\pi^2}{2}B_2 + \alpha$$

und auch

$$\Phi_2(\pi) = -\frac{1}{2}\Phi_2(0) = -\frac{\pi^2}{2}B_2 - \frac{1}{2}\alpha.$$

Also ist $\alpha = 0$. Um nun $\Phi_3(x)$ zu bestimmen, hat man

$$\Phi_3'(x) = \Phi_2(x) = \pi^2(B-\varrho)^2,$$

und da $\pi^2(B-\varrho)^2$ die Derivierte von $-\frac{2}{3}\pi^3(B-\varrho)^3$ ist, so kann man schreiben

$$\Phi_3(x) = -\tfrac{2}{3}\pi^3(B-\varrho)^3 + \beta,$$

wo die Konstante β sich sofort durch die Bemerkung bestimmt, daß auf Grund der Stetigkeit von $\Phi_3(x)$ (§ 322) die rechte Seite nach $\Phi_3(2k\pi) = 0$ konvergieren muß, wenn ϱ nach Null konvergiert. Daraus folgt $\beta = 0$. Um $\Phi_4(x)$ zu bestimmen hat man

$$\Phi_4'(x) = -\Phi_3(x) = \tfrac{2}{3}\pi^3(B-\varrho)^3,$$

mithin

$$\Phi_4(x) = -\frac{\pi^4}{3}(B-\varrho)^4 + \gamma,$$

und um γ zu berechnen braucht man nur zu bemerken, daß man hat

$$\Phi_4(\pi) = -\frac{\pi^4}{3}\left(B - \frac{1}{2}\right)^4 + \gamma = \frac{\pi^4}{3}\left(1 - \frac{1}{2^3}\right) B_4 + \gamma$$

und auch

$$\Phi_4(\pi) = -\left(1 - \frac{1}{2^3}\right)\Phi_4(0) = \frac{\pi^4}{3}\left(1 - \frac{1}{2^3}\right) B_4 - \left(1 - \frac{1}{2^3}\right)\gamma,$$

sodaß $\gamma = 0$ ist. Fährt man so fort, so sieht man, daß allgemein $\Phi_p = \lambda_p(B - \varrho)^p$ ist. Um λ_p zu bestimmen liefert uns (39)

$$\lambda_p = \frac{(-1)^p}{p}\cdot 2\pi\lambda_{p-1} = \frac{(-1)^{2+3+\cdots+p}}{2\,.\,3\ldots p}(2\pi)^{p-1}\cdot\pi.$$

Also ist

$$(40)\qquad \Phi_p(x) = (-1)^{\left[\frac{p-1}{2}\right]}\cdot 2^{p-1}\frac{\pi^p}{p!}(B - \varrho)^p.$$

Diese Formel sagt uns, in welcher Beziehung die Summen Φ_p zu den Bernoullischen Polynomen stehen. In der Tat gelangt man unter Benutzung der Gleichungen (33) und (35) für ein zwischen 0 und 1 enthaltenes x zu der Formel

$$\varphi_{p-1}(x) = (-1)^{\left[\frac{p}{2}\right]}\frac{(p-1)!}{2^{p-1}\pi^p}\cdot\{\Phi_p(0) - \Phi_p(2\pi x)\},$$

welche die in § 360 bewiesenen Eigenschaften in volle Evidenz setzt.

365. Anwendungen. a) Eine der interessantesten Anwendungen der Formel (40) besteht in der Berechnung der Summen

$$s_p = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots$$

für alle geraden Werte von p. Wenn man in (40) p in $2p$ verwandelt, so erhält man

$$\frac{\cos x}{1^{2p}} + \frac{\cos 2x}{2^{2p}} + \frac{\cos 3x}{3^{2p}} + \cdots = (-1)^{p-1}\cdot 2^{2p-1}\frac{\pi^{2p}}{(2p)!}(B - \varrho)^{2p}$$

und insbesondere für $x = 0$

$$1 + \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{3^{2p}} + \frac{1}{4^{2p}} + \cdots = \frac{(-1)^{p-1}2^{2p-1}B_{2p}\pi^{2p}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 2p}.$$

Z. B. ist

$$s_2 = \frac{\pi^2}{6},\quad s_4 = \frac{\pi^4}{90},\quad s_6 = \frac{\pi^6}{945},\quad s_8 = \frac{\pi^8}{9450},\quad\ldots.$$

Wenn p ins Unendliche wächst, so konvergiert die linke Seite nach 1, und man hat daher, wenn man sich an die Formel von Stirling (§ 221) erinnert, als Antwort auf eine am Schlusse von § 356 gestellte Frage

$$\lim_{p=\infty}|B_{2p}|\cdot\left(\frac{\pi e}{p}\right)^{2p+\frac{1}{2}} = 4\pi\sqrt{e}.$$

Es ist bis jetzt noch nicht gelungen, die Summe s_p für die ungeraden Werte von p zu bestimmen. Man kennt nur Umformungen in stärker konvergierende Reihen, die eine schnelle numerische Berechnung gestatten. So hat man z. B. gefunden

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots = 1{,}2020569031595942854\dot{0} \ldots$$

durch Anwendung von wenigen Gliedern einer andern Reihe[1]).

b) In ähnlicher Weise gibt die Formel (40), wenn man darin p in $2p+1$ verwandelt,

$$\frac{\sin x}{1^{2p+1}} + \frac{\sin 2x}{2^{2p+1}} + \frac{\sin 3x}{3^{2p+1}} + \cdots = (-1)^p \cdot 2^{2p} \frac{\pi^{2p+1}}{(2p+1)!} (B - \varrho)^{2p+1}.$$

Für $x = \frac{\pi}{2}$ hat man nun $\varrho = \frac{1}{4}$, und in § 361 haben wir gesehen, daß

$$\left(B - \frac{1}{4}\right)^{2p+1} = \frac{2p+1}{4^{2p+1}} E_{2p}$$

ist. Folglich wird

$$1 - \frac{1}{3^{2p+1}} + \frac{1}{5^{2p+1}} - \frac{1}{7^{2p+1}} + \cdots = \frac{(-1)^p E_{2p} \pi^{2p+1}}{4^{p+1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2p}.$$

Z. B. ist

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \frac{\pi}{4}, \quad 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \cdots = \frac{\pi^3}{32}, \quad \cdots$$

Während man nun die Summen $1 - \frac{1}{3^p} + \frac{1}{5^p} - \cdots$ für alle ungeraden Werte von p kennt, kann man im Falle eines geraden p nicht einmal die einfachste von diesen Summen, nämlich

$$G = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots$$

ausdrücken, über die es eine lange Untersuchung von Catalan[2]) gibt.

---

1) Dieselbe lautet

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1} \cdot 1^3 \cdot 2^3 \cdot 3^3 \cdots (n-1)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (3n-2)} \left(\frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{5}{12n(3n-1)}\right).$$

Siehe eine Mitteilung von Markoff an die Pariser Akademie (Comptes rendus, 16 Décembre, 1889). Bis zu $p = 70$ sind die Summen s_p bis auf 32 Decimalstellen berechnet worden von Stieltjes (Acta mathematica, 1887).

2) Abhandlungen der Petersburger Akademie (7. Serie, Bd. XXXI). In den Comptes rendus (t. LXIV, p. 1139) hat Bresse gefunden

$$G = 0{,}9159655941772190546035\dot{7} \ldots$$

Funktionen von mehreren Veränderlichen.

Grundbegriffe und Derivation.

366. Denken wir uns n Veränderliche $x, y, z, \ldots$, die voneinander unabhängig, d. h. so beschaffen sind, daß der Wert, den wir einer von ihnen erteilt haben, in keiner Weise die Freiheit beschränkt, irgend einer andern einen Wert beizulegen, der bis zu einem gewissen Grade in unserm Belieben steht. Der Inbegriff aller Systeme von Werten, die man den Veränderlichen beilegen kann, bildet ein n-dimensionales Gebiet, wovon ein Spezialfall (für $n = 1$) das ist, was wir früher Intervall genannt haben. Wenn man jedem Wertsystem der n Veränderlichen, welches einem gewissen Gebiet angehört, nach irgend einem Kriterium eine Zahl entsprechen läßt, so bildet der Inbegriff dieser Zahlen eine Funktion der n Veränderlichen, die in jenem Gebiet definiert ist und mit $f(x, y, z, \ldots)$ bezeichnet wird. Man pflegt auch zu sagen, daß die Funktion für jeden Punkt des Gebietes definiert ist, wobei man unter Punkt nichts anderes versteht als irgend ein System von n Werten, die den unabhängigen Veränderlichen beigelegt sind. Die für die Funktionen einer Veränderlichen bewiesenen Eigenschaften lassen sich ohne Schwierigkeit auf die Funktionen von mehreren Veränderlichen ausdehnen[1]).

367. Stetigkeit. Wenn man den unabhängigen Veränderlichen die Inkremente $\delta x, \delta y, \ldots$ erteilt, so ergibt sich daraus für die Funktion das Inkrement

$$\delta f = f(x + \delta x,\ y + \delta y, \cdots) - f(x, y, \cdots).$$

Die Funktion heißt stetig, wenn δf immer nach Null konvergiert, sobald man die Inkremente $\delta x, \delta y, \ldots$ gleichzeitig nach Null konvergieren läßt ohne irgend eine Beziehung zwischen ihnen aufzustellen. Sind die Werte von $n - 1$ Veränderlichen fest, so kann man f als Funktion der übrig bleibenden Veränderlichen betrachten, und es ist klar, daß die Funktion, wenn sie hinsichtlich des Systems der Veränderlichen stetig ist, auch hinsichtlich jeder einzelnen stetig ist. Man darf aber nicht glauben, daß die Umkehrung richtig ist, daß also die Stetigkeit von $f(x, y, \ldots)$ einfach in der Stetigkeit hinsichtlich jeder einzelnen der Veränderlichen $x, y, \ldots$ besteht. Um sich zu überzeugen, daß eine Funktion unstetig sein kann, obwohl sie hinsichtlich einer jeden der Veränderlichen, von denen sie abhängt, stetig ist, braucht man z. B. nur eine Funktion der Cartesischen Koordinaten eines Punktes in der Ebene zu betrachten, die

1) Siehe z. B. den „Calcolo" von Genocchi und Peano (§ 129).

auf den Axen den Wert 1 hat und in jedem andern Punkte verschwindet. Eine solche Funktion ist offenbar im Anfangspunkte unstetig, obwohl sie hinsichtlich jeder Veränderlichen stetig ist, wenn man die andere gleich Null setzt. Es genügt die einfache Verwandlung des Wertes 1 im Anfangspunkte in 0, damit in diesem Punkte die Funktion die Stetigkeit hinsichtlich jeder einzelnen Veränderlichen verliert; und doch kann man sagen, daß die neue Funktion unendlich viel weniger unstetig ist als die alte.

368. Partielle Derivierte. Wenn man f als Funktion von x allein oder von y allein u. s. w. betrachtet, so heißen ihre successiven Derivierten die partiellen Derivierten nach x, nach $y, \ldots$ und werden mit $f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, \ldots$ bezeichnet. Z. B. hat man im Falle von zwei unabhängigen Veränderlichen, nachdem x und y beliebig fixiert sind,

$$f'_x(x, y) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}, \quad f'_y(x, y) = \lim_{h=0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h};$$

ferner leitet man aus f'_x in analoger Weise f''_{xx} und f''_{xy} ab, wie f''_{yx} und f''_{yy} aus f'_y abgeleitet werden, u. s. w. Damit die partiellen Derivierten existieren, ist natürlich notwendig, daß die Funktion hinsichtlich einer jeden Veränderlichen stetig ist, aber nicht nötig ist die Stetigkeit in dem umfassenderen im vorigen Paragraphen erklärten Sinne. Wir wollen jetzt beweisen, daß bei der Aufsuchung der successiven partiellen Derivierten die Ordnung, in welcher die Derivationen aufeinander folgen, das Resultat nicht beeinflußt, vorausgesetzt, daß die Funktionen, die man successiv erhält, stetig sind. Wir können uns offenbar auf den Fall nur zweier Derivationen beschränken und zeigen, daß die Derivierte von f'_x nach y sich nicht von der Derivierten von f'_y nach x unterscheidet, sobald die durch die Derivation gelieferten Funktionen, d. h. f''_{xy} und f''_{yx}, stetig sind. Man erteile x und y die Inkremente $\delta x = h$, $\delta y = k$ und betrachte den Ausdruck

$$\varrho = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y).$$

Schreibt man ihn in folgender Weise

$$\varrho = \{f(x+h, y+k) - f(x+h, y)\} - \{f(x, y+k) - f(x, y)\},$$

so stellt er das Inkrement dar, welches die Funktion $f(x, y+k) - f(x, y)$ erfährt, wenn man y und k konstant läßt und von dem Werte x zu dem Werte $x+h$ übergeht. Man erhält daher, wenn man das Theorem von Lagrange (§ 306) auf die genannte Funktion von x anwendet,

$$\varrho = h\{f'_x(x+\theta h, y+k) - f'_x(x+\theta h, y)\}$$

für eine passende Zahl θ, die zwischen 0 und 1 enthalten ist. Jetzt haben wir vor uns das Inkrement, welches $f'_x(x+\theta h, y)$ erfährt, wenn man unter Festhaltung von $x+\theta h$ der Veränderlichen y das Inkrement k erteilt. Es folgt also auf Grund desselben Theorems, welches wir diesmal auf eine Funktion von y allein anzuwenden haben,

$$\varrho = hk f''_{xy}(x+\theta h,\ y+\theta' k),$$

wo θ' zwischen 0 und 1 enthalten ist. Wenn daher die Funktion f''_{xy} im Punkte (x, y) stetig ist, so stellt ihr Wert in diesem Punkte für nach Null konvergierende h, k den Grenzwert des Quotienten $\frac{\varrho}{hk}$ dar. Nimmt man dagegen ϱ in der Form

$$\varrho = \{f(x+h, y+k) - f(x, y+k)\} - \{f(x+h, y) - f(x, y)\},$$

so gelingt es zu beweisen, daß der genannte Grenzwert gleich dem Werte von f''_{yx} in dem betrachteten Punkte ist, vorausgesetzt[1]), daß diese Funktion in dem Punkte stetig ist. Es ist also $f''_{xy} = f''_{yx}$.

369. Zusammengesetzte Funktionen. Wenn in $y = f(u, v, w, \ldots)$ die Veränderlichen $u, v, w, \ldots$ nicht unabhängig sind, sondern vielmehr Funktionen einer und derselben unabhängigen Veränderlichen x sind, so ist auch y eine Funktion von x allein, obwohl sie als eine Funktion von mehreren Veränderlichen erscheint. In einem solchen Falle pflegt man zu sagen, y sei eine zusammengesetzte Funktion und $u, v, w, \ldots$ die zusammensetzenden Funktionen. Wir wollen beweisen, daß, wenn die ersten partiellen Derivierten von f stetig sind und die ersten Derivierten der zusammensetzenden Funktionen existieren, die Derivierte der Funktion gleich der Summe derjenigen Teilderivierten ist, die man durch Anwendung der Regel für die Derivation der Funktionen von Funktionen erhält, indem man f der Reihe nach als Funktion von u allein, v allein u. s. f. betrachtet. Selbstverständlich werden die partiellen Derivierten von f nach den Veränderlichen $u, v, w, \ldots$ berechnet, indem man diese als unabhängig behandelt. Wir können uns der Einfachheit wegen darauf beschränken, das Theorem im Falle von zwei zusammensetzenden Funktionen zu beweisen. Entsprechend dem Inkrement δx seien h und k die Inkremente der Funktionen u und v. Das Inkrement von y ist $\delta y = f(u+h, v+k) - f(u, v)$. Nun hat man nach dem Theorem von Lagrange

$$f(u+h, v) - f(u, v) = h f'_u(u+\theta h, v),$$
$$f(u+h, v+k) - f(u+h, v) = k f'_v(u+h, v+\theta' k).$$

1) In Wirklichkeit setzen wir hier zuviel voraus. Die Bedingungen dafür, daß man die Gleichheit $f''_{xy} = f''_{yx}$ behaupten kann, sind von Peano auf ein Minimum reduziert worden. Siehe Mathesis, 1890, p. 153.

Daraus folgt durch Addition und Division mit δx

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta u}{\delta x} f_u'(u + \theta h, v) + \frac{\delta v}{\delta x} f_v'(u + h, v + \theta' h),$$

ferner durch Übergang zur Grenze und unter Beachtung der gemachten Voraussetzungen

$$(1) \qquad y' = u' f_u'(u, v) + v' f_v'(u, v).$$

370. Bemerkungen. a) Das Theorem besteht offenbar auch, wenn nur eine der beiden partiellen Derivierten stetig ist, vorausgesetzt, daß die andere hinsichtlich der entsprechenden Veränderlichen stetig ist.

b) Die Regel (1) schließt als Spezialfälle alle früher (§ 285 u. s. w.) bewiesenen Derivationsregeln ein. Wenn man z. B. hat $y = u + v$, uv, $-\frac{u}{v}$ u. s. w., so ist bezüglich

$$f_u' = 1, \ v, \ \frac{1}{v}, \cdots; \quad f_v' = 1, \ u, \ -\frac{u}{v^2}, \cdots,$$

und (1) gibt

$$y' = u' + v', \quad vu' + uv', \ \frac{u'}{v} - \frac{uv'}{v^2}, \cdots.$$

c) Ferner gestattet die Regel (1) die Derivierten gewisser Funktionen direkt zu erhalten, bei denen wir früher (§ 292, d) auf besondere Kunstgriffe rekurrieren mußten. Um z. B. die Derivierte von $y = x^x$ zu berechnen, genügt es nacheinander als einzige Veränderliche die Basis x und den Exponenten x zu betrachten, zu derivieren und die Resultate zu summieren, sodaß man sofort hat

$$y' = x \cdot x^{x-1} + x^x \log x = x^x (1 + \log x).$$

Allgemeiner ist die Derivierte von u^v, wenn u und v Funktionen von x sind,

$$y' = vu^{v-1} \cdot u' + u^v v' \log u = u^v \left(v \frac{u'}{u} + v' \log u\right).$$

371. Homogeneität. Die Funktion $f(x, y, z, \ldots)$ heißt homogen vom Grade m, wenn man identisch hat

$$(2) \qquad f(tx, ty, tz, \ldots) = t^m f(x, y, z, \ldots).$$

Solche Funktionen sind z. B. die im ersten Buche (§ 55) betrachteten algebraischen Formen, und insbesondere die quadratischen, welche homogene Funktionen zweiten Grades sind. Ebenso sind homogen von den bezüglichen Graden $0, \frac{1}{2}, -1$ die Funktionen

$$\frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y}, \quad \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} + \sqrt{x+y}, \quad \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}{x + y + z}\right)^2$$

u. s. w. Man bemerke, daß die ersten partiellen Derivierten einer homogenen Funktion vom Grade m homogene Funktionen vom Grade $m-1$ sind. In der Tat, deriviert man die Gleichung (2) nach x und dividiert darauf durch t, so kommt gerade die Gleichung

$$f_x'(tx,\ ty,\ tz,\ \ldots) = t^{m-1} f_x'(x,\ y,\ z,\ \ldots),$$

welche sich von (2) nur dadurch unterscheidet, daß f in f_x' und m in $m-1$ verwandelt ist.

372. Die homogenen Funktionen sind charakterisiert durch folgende bemerkenswerte Eigenschaft: Die Summe der ersten partiellen Derivierten einer homogenen Funktion vom Grade m, jede multipliziert mit der zugehörigen Veränderlichen, ist identisch gleich dieser Funktion, multipliziert mit m. In der Tat, bringt man (2) auf die Form

$$(3)\qquad \frac{1}{t^m} f(tx,\ ty,\ tz,\ \ldots) = f(x,\ y,\ z,\ \ldots),$$

so leitet man daraus, nachdem man $x, y, z, \ldots$ beliebig fixiert hat, durch Derivation nach t ab

$$(4)\ \frac{1}{t^m}\left\{x f_x'(tx,\ ty,\ \ldots) + y f_y'(tx,\ ty,\ \ldots) + \cdots\right\} - \frac{m}{t^{m+1}} f(tx,\ ty, \ldots) = 0,$$

mithin für $t=1$

$$x f_x'(x,\ y,\ \ldots) + y f_y'(x,\ y,\ \ldots) + \cdots = m f(x,\ y,\ \ldots).$$

Dies ist das Eulersche Theorem. Bemerken wir jetzt folgendes: Wenn in der letzten Gleichung $x, y, z, \ldots$ bezüglich durch tx, ty, $tz, \ldots$ ersetzt werden und alles durch t^{m+1} dividiert wird, so kommt wieder die Gleichung (4) heraus, welche uns sagt, daß die Derivierte der linken Seite von (3) nach t gleich Null, die linke Seite selbst also von t unabhängig und daher immer gleich dem Werte ist, den man erhält, wenn man $t=1$ setzt. Man gelangt auf diese Weise wieder zu (2), d. h. gerade zur Definition der Homogeneität.

373. Derivation der Determinanten. Als Anwendung der Regel (1) betrachten wir die erste der Determinanten

$$y = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

während wir annehmen, daß die zweite die reziproke der ersten ist. Die partielle Derivierte von y nach einem ihrer Elemente ist gleich dem entsprechenden algebraischen Komplement. In der Tat hat man z. B. $y = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3$, und das einzige Glied, welches u_i enthält, ist a_iu_i. Überdies ist a_i unabhängig von u_i. Mithin ist $y'_{u_i} = a_i$. Wenn ferner alle Elemente Funktionen einer und derselben Veränderlichen x sind, so stellt die Determinante y eine Funktion von x dar, deren Derivierte nach (1)

$$y' = a_1 u_1' + a_2 u_2' + a_3 u_3' + b_1 v_1' + b_2 v_2' + b_3 v_3' + c_1 w_1' + c_2 w_2' + c_3 w_3'$$

ist. Außer der Annahme, daß die Elemente der Determinante derivierbare Funktionen sind, ist keine andere erforderlich, da die partiellen Derivierten von y als Summen von Produkten stetiger Funktionen stetig sind. Dem letzten Resultat kann man die folgende Form geben:

$$(5) \qquad y' = \begin{vmatrix} u_1' & v_1 & w_1 \\ u_2' & v_2 & w_2 \\ u_3' & v_3 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & v_1' & w_1 \\ u_2 & v_2' & w_2 \\ u_3 & v_3' & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1' \\ u_2 & v_2 & w_2' \\ u_3 & v_3 & w_3' \end{vmatrix}.$$

Dies ist die Regel für die Derivation einer Funktion von x, die in Form einer Determinante gegeben ist. Sie gilt offenbar für Determinanten von beliebiger Ordnung.

374. Wronskische Determinanten. Besonders wichtig sind bei gewissen Anwendungen die Wronskischen Determinanten. Bei ihnen wird die erste Vertikalreihe gebildet von beliebigen Funktionen einer Veränderlichen x, während die folgenden aus den successiven Derivierten dieser Funktionen bestehen. Die Berechnung der Derivierten solcher Determinanten kann man sehr leicht mit Hilfe der Regel (5) ausführen. Z. B. hat man, wenn

$$y = \begin{vmatrix} u & u' & u'' \\ v & v' & v'' \\ w & w' & w'' \end{vmatrix} \quad \text{ist,} \quad y' = \begin{vmatrix} u & u' & u''' \\ v & v' & v''' \\ w & w' & w''' \end{vmatrix},$$

sodaß man, um irgend eine Wronskische Determinante n-ter Ordnung zu derivieren, nur die $(n-1)$-ten Derivierten der Funktionen durch die n-ten zu ersetzen braucht. Bezeichnet man ferner die Wronskische Determinante der n Funktionen $u, v, w, \ldots$ kurz mit $(u, v, w, \ldots)$, so ist leicht zu sehen, daß man hat

$$(6) \qquad (tu, tv, tw, \ldots) = t^n (u, v, w, \ldots).$$

Diese Eigenschaft, welche in ihrer Form eine so große Analogie mit der charakteristischen Eigenschaft der homogenen Funktionen hat, beweist man sofort, indem man die Wronskische Determinante der Funktionen $tu, tv, tw, \ldots$ bildet und bemerkt, daß in der zweiten Vertikalreihe die Glieder, welche t' enthalten, unterdrückt werden dürfen, da sie proportional zu den Elementen der ersten sind. Darauf darf man in der dritten die Glieder unterdrücken, welche t'' oder t' enthalten, da sie bezüglich proportional zu den Gliedern der ersten oder der zweiten Vertikalreihe sind, u. s. w. Man findet so schließlich die Determinante $(u, v, w, \ldots)$, deren sämtliche Elemente mit t multipliziert sind, d. h. gerade die rechte Seite von (6).

375. Wir wollen jetzt folgende äußerst wichtige Eigenschaft der Wronskischen Determinanten beweisen: Damit zwei oder mehr Funktionen linear unabhängig seien, ist notwendig und hinreichend, daß ihre Wronskische Determinante nicht verschwindet. Zunächst muß man wissen, daß zwei oder mehr Funktionen linear unabhängig heißen, wenn zwischen ihnen keine lineare homogene Relation mit konstanten Koeffizienten besteht. Mit andern Worten, die Funktionen $u, v, w, \ldots$ sind nicht linear unabhängig, wenn es n Konstanten $a, b, c, \ldots$ gibt, die nicht alle null sind, von der Beschaffenheit, daß man identisch hat

$$au + bv + cw + \cdots = 0. \tag{7}$$

Wenn dies stattfindet, so ist, da man auch

$$au' + bv' + cw' + \cdots = 0, \qquad au'' + bv'' + cw'' + \cdots = 0, \ \ldots$$

hat, für die Verträglichkeit dieser Gleichungen, die man als lineare und homogene Gleichungen in den Unbekannten $a, b, c, \ldots$ betrachten kann, erforderlich $(u, v, w, \ldots) = 0$. Worauf es mehr ankommt, ist der Nachweis, daß umgekehrt, wenn diese Determinante identisch null ist, zwischen den Funktionen $u, v, w, \ldots$ eine Beziehung wie (7) besteht. Zunächst bemerke man, daß für $n = 1$ die Gleichung (7) gerade das Verschwinden von $(u) = u$ ausdrückt. Daraus folgt, daß man, um das Theorem zu beweisen[1]), dasselbe für weniger als n Funktionen zulassen und dann zeigen kann, daß es für n Funktionen gilt. Wäre $u = 0$, so würde die Relation (7) offenbar richtig sein für $a = 1$, $b = c = \cdots = 0$. Wir nehmen also an, daß nicht identisch $u = 0$ ist, und bemerken unter Erinnerung an das Theorem (6), daß

$$0 = (u, v, w, \ldots) = u^n \left(1, \frac{v}{u}, \frac{w}{u}, \cdots\right) = u^n \left(\left(\frac{v}{u}\right)', \left(\frac{w}{u}\right)', \ldots\right)$$

ist. Aber die letzte Wronskische Determinante ist von der Ordnung $n - 1$, und aus ihrem Verschwinden kann man daher den Schluß ziehen $b\left(\frac{v}{u}\right)' + c\left(\frac{w}{u}\right)' + \cdots = 0$, wo $b, c, \ldots$ Konstanten sind, die nicht sämtlich verschwinden. Also hat $b\frac{v}{u} + c\frac{w}{u} + \cdots$ einen konstanten Wert, den wir $-a$ nennen können, und auf diese Weise sehen wir schließlich, daß die n Funktionen durch eine Relation wie (7) verbunden sind.

Reihenentwickelungen. Minima und Maxima.

376. Die Formeln von Taylor und Mac-Laurin lassen sich sehr leicht auf Funktionen von mehreren Veränderlichen ausdehnen. Man fixiere einen Punkt $(a, b, c, \ldots)$ und in seiner Nähe einen andern

---

1) Demoulin: „Mathesis" (1897, p. 62).

Punkt $(x, y, z, \ldots)$, beide dem Gebiet angehörend, in welchem die Funktion $f(x, y, z, \ldots)$ definiert ist. Darauf setze man

$$u = a + t(x - a), \quad v = b + t(y - b), \quad w = c + t(z - c), \ldots$$

und betrachte $f(u, v, w, \ldots)$ als Funktion der Veränderlichen t allein. Die erste Derivierte dieser Funktion $F(t)$ läßt sich leicht mit Hilfe der Regel (1) berechnen, wenn man beachtet, daß man in Bezug auf die einzige Veränderliche t hat $u' = x - a$, $v' = y - b$, $w' = z - c, \ldots$. Auf solche Weise erhält man

$$F'(t) = (x-a) f_x'(u, v, \ldots) + (y-b) f_y'(u, v, \ldots) + (z-c) f_z'(u, v, \ldots) + \cdots.$$

Eine weitere Derivation liefert

$$\begin{aligned} F''(t) = {} & (x-a)^2 f''_{xx}(u, v, \ldots) + (y-b)^2 f''_{yy}(u, v, \ldots) + (z-c)^2 f''_{zz}(u, v, \ldots) + \cdots \\ & + 2(x-a)(y-b) f''_{xy}(u, v, \ldots) + 2(x-a)(z-c) f''_{xz}(u, v, \ldots) \\ & + 2(y-b)(z-c) f''_{yz}(u, v, \ldots) + \cdots. \end{aligned}$$

Fährt man in dieser Weise fort, so erkennt man, daß man symbolisch schreiben kann

$$F^{(n)}(t) = \{(x - a) f_x'(u, v, \ldots) + (y - b) f_y'(u, v, \ldots) + \cdots\}^n,$$

wenn man übereinkommt jedes Produkt $f_x' f_y' f_y' \ldots$ in der Entwickelung der n-ten Potenz zu ersetzen durch die Derivierte $f^{(n)}_{xyy\ldots}$, berechnet für den Punkt $(u, v, w, \ldots)$, der mit $(a, b, c, \ldots)$ oder mit $(x, y, z, \ldots)$ zusammenfällt, je nachdem man $t = 0$ oder $t = 1$ setzt. Dies vorausgeschickt braucht man nur die Ausdrücke von $F, F', F'', \ldots$ in die Mac-Laurinsche Formel

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2} F''(0) + \frac{1}{6} F'''(0) + \cdots + \frac{1}{n!} F^{(n)}(\theta)$$

einzusetzen, um zu finden

$$\begin{aligned} f(x, y, \ldots) = {} & f(a, b, \ldots) + (x-a) f_x'(a, b, \ldots) + (y-b) f_y'(a, b, \ldots) + \cdots \\ & + \tfrac{1}{2}\{(x-a)^2 f''_{xx}(a, b, \ldots) + \cdots + 2(x-a)(y-b) f''_{xy}(a, b, \ldots) + \cdots\} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \frac{1}{n!}\{(x-a)^n f^{(n)}_{xx\ldots x}(\xi, \eta, \ldots) + n(x-a)^{n-1}(y-b) f^{(n)}_{xx\ldots y}(\xi, \eta, \ldots) + \cdots\}, \end{aligned}$$

wo $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ Zahlen sind, die bezüglich zwischen $a, b, c, \ldots$ und $x, y, z, \ldots$ liegen. Dies ist die Taylorsche Formel für die Funktionen von mehreren Veränderlichen. Setzt man darin $a, b, c, \ldots$ gleich Null, so erhält man die Mac-Laurinsche Formel

$$\begin{aligned} f(x, y, \ldots) = {} & f(0, 0, \ldots) + x f_x'(0, 0, \ldots) + y f_y'(0, 0, \ldots) + \cdots \\ & + \tfrac{1}{2}\{x^2 f''_{xx}(0, 0, \ldots) + y^2 f''_{yy}(0, 0, \ldots) + \cdots + 2xy f''_{xy}(0, 0, \ldots) + \cdots\} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \frac{1}{n!}\{x^n f^{(n)}_{xx\ldots x}(\theta x, \theta y, \ldots) + n y x^{n-1} f^{(n)}_{xx\ldots y}(\theta x, \theta y, \ldots) + \cdots\}. \end{aligned}$$

Sie liefert uns, unter der Voraussetzung, daß das letzte Glied mit unendlich zunehmendem n nach Null konvergiert, eine Entwickelung der Funktion $f(x, y, z, \ldots)$ in eine Reihe algebraischer Formen von den Graden 0, 1, 2, 3, ...

377. Wir kommen jetzt zur Diskussion der Minima und der Maxima. Wenn man sagt, daß irgend eine Eigenschaft in der Umgebung eines Punktes $(a, b, c, \ldots)$ stattfindet, so will man die Existenz einer positiven, wenn auch noch so kleinen Zahl h behaupten von der Beschaffenheit, daß jene Eigenschaft für alle Punkte $(x, y, z, \ldots)$, die den Bedingungen

$$(8) \qquad |x-a| \leq h, \quad |y-b| \leq h, \quad |z-c| \leq h, \ \ldots$$

genügen, verwirklicht ist, höchstens $(a, b, c, \ldots)$ selbst ausgenommen Dies vorausgeschickt sagt man, daß die Funktion $f(x, y, z, \ldots)$ in $(a, b, c, \ldots)$ ein Minimum (oder Maximum) wird, wenn in der Umgebung dieses Punktes kein Wert der Funktion kleiner (oder größer) als $f(a, b, c, \ldots)$ ist. Mit andern Worten, man muß eine positive Zahl h von passender Kleinheit finden können derart, daß für alle Wertsysteme $x, y, z, \ldots$, die den Bedingungen (8) genügen, die eine (oder die andere) der folgenden Relationen stattfindet:

$$(9) \quad f(a, b, c, \ldots) \leqq f(x, y, z, \ldots), \quad f(a, b, c, \ldots) \geqq f(x, y, z, \ldots).$$

Ist dies der Fall, so muß offenbar auch die vorhin mit $F(t)$ bezeichnete Funktion für $t = 0$ ein Minimum oder Maximum sein. In der Tat hat man auf Grund von (9)

$$F(0) \leq F(t), \quad \text{oder} \quad F(0) \geq F(t)$$

für alle Werte von t, deren absoluter Betrag nicht größer als 1 ist da für diese Werte die Zahlen $u, v, w, \ldots$ wie $x, y, z, \ldots$ den Bedingungen (8) genügen. Auf diese Weise ist die Aufsuchung der Minima und Maxima von $f(x, y, z, \ldots)$ reduziert auf die Aufsuchung der Minima und Maxima aller Funktionen $F(t)$, die den unendlich vielen Punkten $(x, y, z, \ldots)$ entsprechen, welche man beliebig in der Umgebung jedes Punktes $(a, b, c, \ldots)$ annehmen kann.

378. Wenn die Veränderlichen unabhängig sind, so spaltet sich die bekannte Bedingung $F'(0) = 0$, d. h.

$$(x-a) f_x'(a, b, c, \ldots) + (y-b) f_y'(a, b, c, \ldots) + (z-c) f_z'(a, b, c, \ldots) + \cdots = 0,$$

in

$$f_x'(a, b, c, \ldots) = 0, \quad f_y'(a, b, c, \ldots) = 0, \quad f_z'(a, b, c, \ldots) = 0, \ldots.$$

Also erhält man die Wertsysteme $x, y, z, \ldots$, welche die Funktion f der unabhängigen Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ zu einem Minimum oder Maximum machen können, indem man das Gleichungensystem

(10) $f_x'(x, y, z, \ldots) = 0, \quad f_y'(x, y, z, \ldots) = 0, \quad f_z'(x, y, z, \ldots) = 0, \ldots$

auflöst. Um zu erkennen, ob man ein Minimum oder ein Maximum hat, betrachte man die quadratische Form

$$F''(0) = (x-a)^2 f''_{xx}(a, b, \ldots) + (y-b)^2 f''_{yy}(a, b, \ldots) + (z-c)^2 f''_{zz}(a, b, \ldots) + \cdots$$
$$+ 2(x-a)(y-b) f''_{xy}(a, b, \ldots) + 2(x-a)(z-c) f''_{xz}(a, b, \ldots)$$
$$+ 2(y-b)(z-c) f''_{yz}(a, b, \ldots) + \cdots$$

der n unabhängigen Veränderlichen $x-a$, $y-b$, $z-c$, ..., eine Form, die als Diskriminante (§ 76) die Determinante

$$H = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} & \cdots \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} & \cdots \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

berechnet für $x = a$, $y = b$, $z = c$, ..., besitzt. Diese wichtige Funktion $H(x, y, z, \ldots)$ heißt die Hessesche Form von f. Im folgenden werden wir den Fall $H(a, b, c, \ldots) = 0$ beiseite lassen und uns daran erinnern (§ 100), daß unter der Voraussetzung $H(a, b, c, \ldots) \gtrless 0$ die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß die quadratische Form $F''(0)$ wesentlich positiv ist, folgende sind:

$$(11) \qquad f''_{xx} > 0, \quad \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} > 0, \ \ldots, \ H > 0.$$

für $x = a$, $y = b$, $z = c$, ... Damit dagegen $F''(0)$ für alle Systeme von (nicht sämtlich verschwindenden) Werten, die den Veränderlichen $x-a$, $y-b$, $z-c$, ... erteilt werden, negativ bleibe, ist notwendig und hinreichend, daß man hat

$$(12) \qquad f''_{xx} < 0, \quad \begin{vmatrix} f''_{xy} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} > 0, \ \ldots, \ (-1)^n H > 0$$

Wenn also für ein System von Werten $a, b, c, \ldots$ der Veränderlichen $x, y, z, \ldots$, welches den Gleichungen (10) genügt, auch die Bedingungen (11) erfüllt sind, so ist die Funktion $f(x, y, z, \ldots)$ für $x = a$, $y = b$, $z = c$, ... ein Minimum. Sie ist dagegen ein Maximum, wenn die Bedingungen (12) erfüllt sind. Sie ist aber weder ein Minimum noch ein Maximum, wenn weder die Bedingungen (11) noch die (12) erfüllt sind, während $H \gtrless 0$ ist. Zweifelhaft bleibt der Fall $H = 0$, welcher weitere Untersuchungen erfordert.

379. Wenn man z. B. die Minima und die Maxima einer Funktion $f(x, y)$ von zwei unabhängigen Veränderlichen haben will, so hat man mit der Aufsuchung derjenigen Werte der Veränderlichen zu beginnen, welche die ersten Derivierten zum Verschwinden bringen, um sie dann in die zweiten Derivierten einzusetzen. Es können sich alsdann folgende Umstände darbieten:

$f''_{xx} f''_{yy} - f''^2_{xy} > 0$ (Minimum, wenn $f''_{xx} > 0$, Maximum, wenn $f''_{xx} < 0$),

„ „ < 0 (weder Minimum noch Maximum),

„ „ $= 0$ (Ungewißheit).

Auch bei den Funktionen von drei unabhängigen Veränderlichen x, y, z kann man, wenn $f''_{xx} f''_{yy} - f''^2_{xy} < 0$ ist, kein Minimum oder Maximum haben. Dies ist aber auch dann der Fall, wenn man hat $f''_{xx} f''_{yy} - f''^2_{xy} > 0$, sobald die Hessesche Form

$$H = f''_{xx} f''_{yy} f''_{zz} + 2 f''_{yz} f''_{zx} f''_{xy} - f''_{xx} f''^2_{yz} - f''_{yy} f''^2_{zx} - f''_{zz} f''^2_{xy}$$

nicht das Zeichen von f''_{xx} annimmt. Im entgegengesetzten Falle hat man ein Minimum oder ein Maximum, je nachdem das gemeinsame Vorzeichen $+$ oder $-$ ist. Man bemerke, daß die Minima und die Maxima die Tendenz haben, immer seltener aufzutreten, je zahlreicher die Veränderlichen werden.

380. Um schneller vorwärts zu kommen, haben wir in § 378 eine schwere Lücke bestehen lassen, welche wir jetzt ausfüllen müssen. Wenn man gefunden hat, daß bei Erfüllung der Bedingungen (11) oder (12) immer $F''(0) > 0$ oder $F''(0) < 0$ ist, so kann man nur schließen, daß die unendlich vielen Funktionen $F(t)$ für $t = 0$ alle Minima oder alle Maxima sind. Hieraus darf man aber nicht folgern, daß $f(x, y, z, \ldots)$ im Punkte $(a, b, c, \ldots)$ ein Minimum oder Maximum ist. Es würde in der Tat nötig sein, die Umkehrung des am Schlusse von § 377 ausgesprochenen Satzes zu Hilfe zu nehmen, und diese Umkehrung ist weit davon entfernt, allgemein gültig zu sein. Treten wir also an die direkte Untersuchung des Inkrements

$$f(x, y, z, \ldots) - f(a, b, c, \ldots) = \tfrac{1}{2} F''(\theta),$$

und bemerken wir, daß $F''(\theta)$ als eine quadratische Form betrachtet werden kann, deren Koeffizienten, die mit $x, y, z, \ldots$ veränderlich sind, (wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der zweiten Derivierten) nach den analogen Koeffizienten von $F''(0)$ konvergieren, wenn der Punkt $(x, y, z, \ldots)$ in irgend einer Weise dem Punkte $(a, b, c, \ldots)$ zustrebt, unter welcher Voraussetzung der Zwischenpunkt $(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$, für den die Koeffizienten von $F''(\theta)$ berechnet zu denken sind, das Gleiche tun muß. Dies berechtigt uns offenbar nicht zu behaupten, daß, wenn $F''(0)$ in der Umgebung von $(a, b, c, \ldots)$ ein bestimmtes Zeichen bewahrt, $F''(\theta)$ dieses Zeichen anzunehmen strebt. In der Tat liegen die Werte der einen und der andern quadratischen Form in der Umgebung des genannten Punktes unendlich nahe an Null, und es ist daher, obgleich sie sich voneinander unendlich wenig unterscheiden, nicht ausgeschlossen, daß sie entgegengesetzte Zeichen haben können. Es handelt sich nun gerade darum, zu zeigen, daß dies nicht der Fall ist, und dazu ist es zweckmäßig, die beiden quadratischen Formen durch

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 + \cdots$$

zu dividieren und die Quotienten als zwei quadratische Formen in den Veränderlichen

$$\alpha = \frac{x-a}{r}, \quad \beta = \frac{y-b}{r}, \quad \gamma = \frac{z-c}{r}, \ldots$$

zu betrachten, die durch die Relation $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \cdots = 1$ verbunden sind. Es sei in der Tat k dem absoluten Betrage nach der kleinste unter den Koeffizienten einer kanonischen Form (§ 92) von $\frac{F''(0)}{r^2}$, und man bemerke, daß diese Koeffizienten alle positiv oder alle negativ sind, je nachdem die quadratische Form wesentlich positiv oder wesentlich negativ ist, und daß man daher hat $|F''(0)| > kr^2$. Das Verhältnis von $F''(0)$ zu r^2 konvergiert also nicht nach Null. Dagegen konvergiert nach Null das Verhältnis von $F''(\theta) - F''(0)$ zu r^2, da es eine quadratische Form der Veränderlichen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ist, die alle zwischen -1 und $+1$ enthalten sind, und ihre Koeffizienten nach Null konvergieren. Mithin ist

$$\lim \frac{F''(\theta)}{F''(0)} = 1 + \lim \left(\frac{F''(\theta) - F''(0)}{r^2} : \frac{F''(0)}{r^2} \right) = 1.$$

Daraus folgt, daß man immer eine positive Zahl h finden kann derart, daß für alle Werte von $x, y, z, \ldots$, die den Bedingungen (8) genügen, das vorstehende Verhältnis z. B. größer als $\frac{1}{2}$ ist, und daß man folglich hat

$$F''(\theta) > \tfrac{1}{2} kr^2 \quad \text{oder} \quad F''(\theta) < \tfrac{1}{2} kr^2,$$

je nachdem k positiv oder negativ ist, oder $f(x, y, z, \ldots) > f(a, b, c, \ldots)$ im ersten und $f(x, y, z, \ldots) < f(a, b, c, \ldots)$ im zweiten Falle[1]).

381. Die obigen Betrachtungen sind um so notwendiger, als es in dem allgemeinen Falle sehr wohl passieren kann, daß alle Funktionen $F(t)$ für $t = 0$ Minima oder Maxima sind, ohne daß die Funktion $f(x, y, z, \ldots)$ im Punkte $(a, b, c, \ldots)$ ein Minimum oder Maximum ist. Um die Gründe eines solchen Vorkommnisses wohl zu verstehen, ist es zweckmäßig sich auf die Betrachtung einer Funktion von zwei Veränderlichen $(x = a + r\cos\vartheta,\ y = b + r\sin\vartheta)$ zu beschränken, deren Werte in der Umgebung des Punktes (a, b) also von r und ϑ abhängen. Wenn für einen gegebenen Wert von ϑ die Funktion in (a, b) ein Minimum hat, so bedeutet dies, daß $f(a, b) < f(x, y)$ ist für den betrachteten Wert von ϑ und für alle Werte von r, die in einem gewissen Intervall $(-\varrho, \varrho)$ enthalten sind. Diese

1) Wegen größerer Details sehe man den „Calcolo" von Genocchi und Peano (pp. 186, 197).

positive Zahl ϱ ist für jeden Wert von ϑ vollkommen bestimmt, wenn man übereinkommt ihr den größtmöglichen Wert zu erteilen. Beim Variieren von ϑ zwischen 0 und π (die eine Grenze ausgeschlossen) variiert im allgemeinen auch ϱ, und das entsprechende Punktepaar $(a \pm \varrho \cos\vartheta,\ b \pm \varrho \sin\vartheta)$ beschreibt eine geschlossene Kurve von der Beschaffenheit, daß man in ihrem Innern immer $f(a, b) < f(x, y)$ hat, während außerhalb in Punkten, die beliebig nahe an der Begrenzung liegen, $f(x, y)$ kleiner als $f(a, b)$ wird. Wenn nun die Funktion ϱ, wie es gewöhnlich der Fall ist, einen kleinsten Wert $h\sqrt{2}$ erreicht, so hat man sicher $f(a, b) < f(x, y)$, sobald $|x - a| \leqq h$, $|y - b| \leqq h$ ist. Alsdann hat die Funktion $f(x, y)$ im Punkte (a, b) ein Minimum. Dies ist dagegen nicht der Fall, wenn die Werte von ϱ nur die untere Grenze Null haben; denn wenn h beliebig klein gegeben ist, so braucht man nur ϑ in hinreichender Nähe desjenigen Wertes zu wählen, in dessen Umgebung (§ 259) die untere Grenze von ϱ immer null ist, um $\varrho < h\sqrt{2}$ machen zu können. Dann müssen sich, wenn man $r > \varrho$ nimmt, Werte von x und von y finden lassen derart, daß man

trotz $|x - a| \leqq h$, $|y - b| \leqq h$ hat $f(x, y) < f(a, b)$.

382. Wir wollen jetzt annehmen, daß zwischen den n Veränderlichen $m (< n)$ Relationen

$$\varphi(x, y, z, \ldots) = 0, \quad \psi(x, y, z, \ldots) = 0, \ldots \tag{13}$$

bestehen, welche so beschaffen sind, daß sich m Veränderliche $u, v, w, \ldots$ als Funktionen der übrig bleibenden $n - m$ betrachten lassen[1]). Diese letzteren wollen wir besonders mit $x, y, z, \ldots$ bezeichnen und sie als unabhängige Veränderliche wählen. Die Werte der Veränderlichen, welche die gegebene Funktion

$$f(x, y, z, \ldots, u, v, w, \ldots)$$

zu einem Minimum oder Maximum machen, müssen (§ 378) die ersten partiellen Derivierten, genommen nach den unabhängigen Veränderlichen, zum Verschwinden bringen. Im besondern muß man haben, wenn man die Regel für die Derivation der zusammengesetzten Funktionen anwendet (§ 369),

$$f_x' + u_x' f_u' + v_x' f_v' + \cdots = 0, \tag{14}$$

und die Derivierten $u_x', v_x', w_x', \ldots$ berechnet man, indem man die Relationen (13) nach x deriviert, d. h. man leitet sie mit Hilfe der Cramerschen Regel (§ 50) aus folgendem System ab:

---

1) Von den Bedingungen dieser Möglichkeit, zu denen die Relation (16) gehört, und von der Existenz der ersten Derivierten von $u, v, w, \ldots$ werden wir am Anfang des sechsten Buches handeln.

$$
(15) \qquad \begin{cases} \varphi_x' + u_x'\varphi_u' + v_x'\varphi_v' + \cdots = 0, \\ \psi_x' + u_x'\psi_u' + v_x'\psi_v' + \cdots = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ , \end{cases}
$$

vorausgesetzt, daß man hat

$$
(16) \qquad \begin{vmatrix} \varphi_u' & \varphi_v' & \varphi_w' & \cdots \\ \psi_u' & \psi_v' & \psi_w' & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{vmatrix} \gtrless 0.
$$

Aber anstatt die aus (15) gefundenen Werte von u_x', v_x', w_x', ... in die Gleichung (14) einzusetzen, können wir, indem wir dieselbe dem System (15) anreihen, unmittelbar die Bedingung für die Verträglichkeit schreiben

$$
\begin{vmatrix} f_x' & f_u' & f_v' & \cdots \\ \varphi_x' & \varphi_u' & \varphi_v' & \cdots \\ \psi_x' & \psi_u' & \psi_v' & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{vmatrix} = 0.
$$

Es genügt in der ersten Vertikalreihe successiv die ersten partiellen Derivierten von f, φ, ψ, ... nach den $n-m$ Veränderlichen zu setzen, die wir als unabhängige gewählt haben, um $n-m$ Gleichungen zu erhalten, welche zusammen mit (13) zur Bestimmung von $x, y, z, \ldots$, $u, v, w, \ldots$ ausreichen. Die Wertsysteme $x, y, z, \ldots$ also, die den Gleichungen (13) genügen und die Funktion $f(x, y, z, \ldots)$ zu einem Minimum oder Maximum machen, gehören zu denjenigen, welche alle großen Determinanten der Matrix

$$
(17) \qquad \begin{vmatrix} f_x' & f_y' & f_z' & \cdots \\ \varphi_x' & \varphi_y' & \varphi_z' & \cdots \\ \psi_x' & \psi_y' & \psi_z' & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{vmatrix}
$$

zum Verschwinden bringen.

383. Um den Rechnungen eine größere Symmetrie zu geben, pflegt man in folgender Weise zu verfahren. Aus dem gleichzeitigen Verschwinden der größten Determinanten der Matrix (17) folgert man (§ 58), daß eine und dieselbe lineare Relation die Elemente jeder Vertikalreihe verbindet. Die besagte Relation enthält notwendig die Elemente der ersten Horizontalreihe. Ständen nämlich φ', ψ', ... selbst schon in einer linearen Beziehung, so wäre jede große Determinante derjenigen Matrix gleich Null, die aus (17) durch Unterdrückung der ersten Horizontalreihe entsteht. Das widerspricht aber der Voraussetzung (16). Man kann daher für passende Werte von λ, μ, ... schreiben

$f_x' = \lambda\varphi_x' + \mu\psi_x' + \cdots,\ f_y' = \lambda\varphi_y' + \mu\psi_y' + \cdots,\ f_z' = \lambda\varphi_z' + \mu\psi_z' + \cdots, \cdots$

Mit andern Worten, um die Minima und die Maxima der Funktion f zu finden, wenn die Veränderlichen an die Relationen (13) gebunden sind, setze man gleich Null nicht die ersten Derivierten von f, sondern vielmehr die der Funktion

$$f(x, y, z, \ldots) - \lambda\varphi(x, y, z, \ldots) - \mu\psi(x, y, z, \ldots) - \cdots.$$

Man erhält dabei n Gleichungen, die sich durch Elimination von $\lambda, \mu, \ldots$ auf nur $n-m$ reduzieren. Fügt man dazu die Gleichungen (13), so entsteht ein System von n Gleichungen, welches zur Bestimmung der n Veränderlichen dienen kann.

384. Übungen. a) Nehmen wir eine rechteckige Platte $OABC$, die in der aus der Figur ersichtlichen Weise an der Ecke O abgebrochen ist, und stellen wir uns die Aufgabe, eine andere rechteckige Platte daraus zu gewinnen, deren Flächeninhalt möglichst groß ist. Es ist natürlich, bei der neuen Platte die beiden unversehrt gebliebenen Seiten AC und BC beizubehalten und die neue Ecke O', welche C gegenüberliegt, auf der durch den Bruch geschaffenen Seite PQ passend zu wählen. Sind p und q die Längen der Abschnitte OP und OQ, so genügen die Koordinaten der unbekannten Ecke O' in Bezug auf die Achsen OA und OB der Gleichung $qx + py = pq$, und die Funktion, welche man zu einem Maximum zu machen hat, ist der Inhalt $(a-x)(b-y)$ des neuen Rechtecks. Es müssen also die ersten partiellen Derivierten dieser Funktion, d. h. $y - b$ und $x - a$, proportional zu q und zu p sein. Wenn man daher zu der Geraden, die O mit dem Mittelpunkte von PQ verbindet, durch C die Parallele zieht, so trifft diese PQ in dem gesuchten Punkte O'. Fällt der Punkt O' außerhalb der Strecke PQ, so sieht man leicht, daß man ihn durch den nächst benachbarten Endpunkt derselben ersetzen muß. Allgemeiner kann man, welches auch die Form des Bruches PQ sein mag, beweisen, daß eine Diagonale des neuen Rechtecks parallel werden muß zu der Geraden, die den Rand PQ in O' berührt.

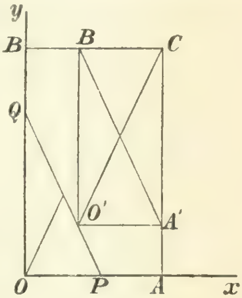

Fig. 12.

b) Wir wollen zeigen, wie man der allgemeinen Gleichung eines Kegelschnitts

$$ax^2 + by^2 + c + 2fy + 2gx + 2hxy = 0 \tag{18}$$

eine bequemere Form geben kann, indem man die Koordinaten x_0, y_0 des Mittelpunktes in Evidenz setzt, die bekanntlich durch die Gleichungen

$$ax_0 + hy_0 + g = 0, \quad hx_0 + by_0 + f = 0 \tag{19}$$

oder $\Phi_x'(x_0, y_0) = 0$, $\Phi_y'(x_0, y_0) = 0$ gegeben sind, wenn man übereinkommt mit $\Phi(x, y)$ die linke Seite von (18) zu bezeichnen. Zunächst bemerke man, daß die Taylorsche Formel dieser Funktion sofort die Form zu geben gestattet

$$\Phi(x_0, y_0) + a(x - x_0)^2 + b(y - y_0)^2 + 2h(x - x_0)(y - y_0).$$

Um ferner $\Phi(x_0, y_0)$ zu berechnen, braucht man nur die Identität zu beachten

$$\Phi(x, y) = (ax + hy + g)x + (hx + by + f)y + (gx + fy + c).$$

Das ist gleichbedeutend mit der Anwendung des Eulerschen Theorems (§ 372) auf die linke Seite von (18), nachdem man dieselbe homogen gemacht hat. Im besondern ist $\Phi(x_0, y_0) = gx_0 + fy_0 + c$, und man erhält also, wenn man aus dieser Gleichung und den Gleichungen (19) x_0 und y_0 eliminiert,

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c - \Phi(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0,$$

woraus sich ergibt $\Phi(x_0, y_0) = \dfrac{D}{ab - h^2}$, wenn man mit D die Diskriminante $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$ bezeichnet.

c) Um die Längen der Achsen des Kegelschnitts (18) zu berechnen, ist es zweckmäßig, zunächst die Gleichung auf die in der vorigen Übung gefundene Form zu bringen

$$a(x - x_0)^2 + b(y - y_0)^2 + 2h(x - x_0)(y - y_0) + \frac{D}{ab - h^2} = 0.$$

Es handelt sich jetzt darum den kleinsten und den größten Wert von $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ zu finden, während man weiß, daß die Veränderlichen x und y an die obige Gleichung gebunden sind. Man hat also nach Anleitung des § 380 zu setzen

$$x - x_0 = \lambda\{a(x - x_0) + h(y - y_0)\}, \quad y - y_0 = \lambda\{h(x - x_0) + b(y - y_0)\}.$$

Multipliziert man hier die erste Gleichung mit $x - x_0$, die zweite mit $y - y_0$, so erhält man durch Addition $(ab - h^2)r^2 = -\lambda D$. Andererseits kann man λ bestimmen, indem man aus denselben Gleichungen $x - x_0$ und $y - y_0$ eliminiert:

$$0 = \begin{vmatrix} a\lambda - 1 & h\lambda \\ h\lambda & b\lambda - 1 \end{vmatrix} = (ab - h^2)\lambda^2 - (a + b)\lambda + 1.$$

Daraus folgt, daß die Quadrate der Halbachsen die Wurzeln der folgenden Gleichung in r^2 sind:

$$r^4 + \frac{(a + b)D}{(ab - h^2)^2} r^2 + \frac{D^2}{(ab - h^2)^3} = 0.$$

d) Wir stellen uns jetzt die Aufgabe die Achsen des ebenen Schnittes zu berechnen, der auf einem Ellipsoid durch eine gegebene Diametralebene hervorgerufen wird. Es seien a, b, c die Längen der Halbachsen und α, β, γ die Kosinus der Winkel, die die Hauptschnitte mit der gegebenen Ebene bilden. Werden als Koordinaten-achsen die Achsen des Ellipsoids gewählt, so sind die Gleichungen dieser Fläche und der gegebenen Ebene bezüglich

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \alpha x+\beta y+\gamma z=0,$$

und es handelt sich darum, den kleinsten und den größten Wert von $r^2=x^2+y^2+z^2$ zu finden. Nach dem in § 380 Gesagten kann man sofort setzen

$$x=\frac{\lambda x}{a^2}+\mu\alpha,\quad y=\frac{\lambda y}{b^2}+\mu\beta,\quad z=\frac{\lambda z}{c^2}+\mu\gamma.$$

Summiert man diese Gleichungen, nachdem man sie bezüglich mit x, y, z multipliziert hat, so erhält man $r^2=\lambda$. Setzt man daher in die Gleichung der Ebene die Werte

$$x=\frac{\mu\alpha a^2}{a^2-r^2},\quad y=\frac{\mu\beta b^2}{b^2-r^2},\quad z=\frac{\mu\gamma c^2}{c^2-r^2}$$

ein, die durch jene Gleichungen geliefert werden, und bemerkt, daß μ nicht verschwinden kann, so gelangt man zu der Gleichung zweiten Grades für r^2

$$\frac{a^2\alpha^2}{r^2-a^2}+\frac{b^2\beta^2}{r^2-b^2}+\frac{c^2\gamma^2}{r^2-c^2}=0.$$

Ihre Wurzeln sind die Quadrate der gesuchten Halbachsen. Errichtet man im Mittelpunkt auf der Ebene jedes Schnittes Lote, die gleich den Halbachsen dieses Schnittes sind, so liegen die Endpunkte dieser Lote auf einer Fläche vierter Ordnung, die für das Studium der Optik [1]) äußerst wichtig ist. Da die Koordinaten der Endpunkte der erwähnten Lote $x=\pm\alpha r$, $y=\pm\beta r$, $z=\pm\gamma r$ sind, so braucht man nur in die letzte Gleichung die Werte von α, β, γ einzusetzen, um die Gleichung der Fläche zu erhalten

$$\frac{a^2x^2}{x^2+y^2+z^2-a^2}+\frac{b^2y^2}{x^2+y^2+z^2-b^2}+\frac{c^2z^2}{x^2+y^2+z^2-c^2}=0.$$

In ganzer Form reduziert sie sich auf

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)-(b^2+c^2)a^2x^2-(c^2+a^2)b^2y^2$$
$$-(a^2+b^2)c^2z^2+a^2b^2c^2=0.$$

Dies ist die Wellenfläche. Durch die Untersuchung gewisser Eigenschaften derselben wurde Hamilton dazu geführt, das eigentümliche Phänomen der konischen Refraktion vorauszusehen, welches später durch das Experiment bestätigt wurde. In solchen theoretischen Entdeckungen [2]) von Naturphänomenen, die jahrhundertelang der direkten Beobachtung entgangen sind, liegt der beste Beweis für die hohe Wichtigkeit der Mathematik.

---

1) Siehe z. B. die „Théorie mathématique de la lumière“ von Poincaré (p. 296).

2) Es gibt dafür andere schöne Beispiele in der Physik und Astronomie. Siehe eine Mitteilung von G. Cesàro an die belgische Akademie (Bulletins, 1891, p. 503).

e) Die Berechnung des kürzesten Abstandes von zwei Geraden führt zu der allgemeineren Aufgabe, den kleinsten Wert von

$$r^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2$$

zu bestimmen, wenn man weiß, daß die $2n$ Veränderlichen den $2n-2$ Bedingungen

$$\frac{x_1 - a_1}{\alpha_1} = \frac{x_2 - a_2}{\alpha_2} = \cdots = \frac{x_n - a_n}{\alpha_n}, \quad \frac{y_1 - b_1}{\beta_1} = \frac{y_2 - b_2}{\beta_2} = \cdots = \frac{y_n - b_n}{\beta_n}$$

genügen, sodaß r^2 in Wirklichkeit eine Funktion von nur zwei unabhängigen Veränderlichen ist. Nehmen wir als solche die Werte u und v der beiden Reihen von Verhältnissen an und bemerken wir, daß der Ausdruck für r^2 durch Einsetzen von

$$x_i = \alpha_i u + a_i, \quad y_i = \beta_i v + b_i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

in

$$r^2 = au^2 + bv^2 + c + 2fv + 2gu + 2huv \tag{20}$$

übergeht, wobei gesetzt worden ist

$$a = \sum_1^n \alpha_i^2, \quad b = \sum_1^n \beta_i^2, \quad h = -\sum_1^n \alpha_i \beta_i,$$

$$-f = \sum_1^n (a_i - b_i)\beta_i, \quad g = \sum_1^n (a_i - b_i)\alpha_i, \quad c = \sum_1^n (a_i - b_i)^2.$$

Man beachte, daß die Determinanten

$$\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

die Quadrate der Matrices

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_2 - b_2 & \cdots & a_n - b_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{vmatrix}$$

darstellen (§ 30). Damit r^2 ein Minimum oder Maximum werde, sind notwendig (§ 375) die Bedingungen

$$au + hv + g = 0, \quad hu + bv + f = 0. \tag{21}$$

Wenn sie erfüllt sind, so reduziert sich der Ausdruck (20) nach dem Eulerschen Theorem auf

$$r^2 = gu + fv + c. \tag{22}$$

Die Hessesche Determinante von r^2 ist $ab - h^2$, und da sowohl a als auch $ab - h^2$ Summen von Quadraten sind, so kann man behaupten

(§ 379), daß tatsächlich ein Minimum eintritt. Inzwischen leitet man aus (21) und (22) durch Elimination von u und v ab

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c-r^2 \end{vmatrix} = 0, \text{ d. h. } \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix} r^2.$$

Das gesuchte Minimum ist also

$$r^2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_2 - b_2 & \dots & a_n - b_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{vmatrix}^2}.$$

f) Andere Berechnungen kleinster Abstände (Punkt und Ebene oder Punkt und Gerade in der Ebene und im Raum) führen zu der Aufgabe, den kleinsten Wert der Summe der Quadrate von n Veränderlichen zu bestimmen, die $m < n$ linearen Gleichungen genügen. Es seien

$$(23) \qquad \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \dots + a_{1n} x_n = k_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \dots + a_{2n} x_n = k_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + a_{m3} x_3 + \dots + a_{mn} x_n = k_m \end{cases}$$

die Gleichungen, und keine von ihnen sei eine Folge der übrigen. Dies erfordert (§ 54, a), daß die großen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

nicht alle null sind, daß folglich (§ 30) das Quadrat dieser Matrix

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mm} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist. Um nun die Minima und die Maxima der Funktion $r^2 = {x_1}^2 + {x_2}^2 + \dots + {x_n}^2$ zu finden, wird man dazu geführt zu setzen

$$(24) \qquad \begin{cases} x_1 = \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \dots + \lambda_m a_{m1}, \\ x_2 = \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \dots + \lambda_m a_{m2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \dots + \lambda_m a_{mn}. \end{cases}$$

Summiert man diese Gleichungen, nachdem man sie mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ multipliziert hat, so erhält man

$$r^2 = \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 + \cdots + \lambda_m k_m, \tag{25}$$

und alles reduziert sich darauf, die Koeffizienten λ zu berechnen. Multipliziert man aber die Gleichungen (24) mit $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ und summiert dann, so ergibt sich

$$k_i = \lambda_1 c_{i1} + \lambda_2 c_{i2} + \cdots + \lambda_m c_{im}.$$

Also sind die Koeffizienten λ bestimmt durch das System

$$\left\{\begin{array}{l} k_1 = \lambda_1 c_{11} + \lambda_2 c_{12} + \cdots + \lambda_m c_{1m}, \\ k_2 = \lambda_1 c_{21} + \lambda_2 c_{22} + \cdots + \lambda_m c_{2m}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_m = \lambda_1 c_{m1} + \lambda_2 c_{m2} + \cdots + \lambda_m c_{mm}, \end{array}\right.$$

welches eine einzige Lösung gestattet. Es ist übrigens unnötig dieses System aufzulösen, da es genügt, die Verträglichkeit mit der Relation (25) auszudrücken, um sofort die Gleichung zu erhalten

$$0 = \begin{vmatrix} r^2 & k_1 & k_2 & \ldots & k_m \\ k_1 & c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1m} \\ k_2 & c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_m & c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mm} \end{vmatrix},$$

aus welcher man den gesuchten kleinsten Wert gewinnt:

$$r^2 = -\frac{1}{C} \begin{vmatrix} 0 & k_1 & k_2 & \ldots & k_m \\ k_1 & c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1m} \\ k_2 & c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_m & c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mm} \end{vmatrix}.$$

g) In den Anwendungen wird man oft dazu geführt, zur Bestimmung einer gewissen Zahl von Größen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ lineare Gleichungen aufzustellen, in denen die Koeffizienten und die bekannten Glieder durch die direkte Beobachtung geliefert werden. Es würden n Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten genügen, wenn sich nicht wegen der unvermeidlichen Unvollkommenheit der Messungen notwendig ungenaue Werte der x daraus ergäben. Führt man mehrere neue Messungen aus, so gelangt man schließlich zur Aufstellung eines Systems (23) mit m Gleichungen, wobei m bei weitem größer ist als die Zahl der Veränderlichen, und das Problem, welches sich uns dann bietet, ist das folgende: In welcher Weise soll man alle erhaltenen Gleichungen teilnehmen lassen an der am wahrscheinlichsten exakten Bestimmung der Werte der Unbekannten? Es ist die Wahrscheinlichkeitsrechnung, einer der interessantesten Zweige der Mathematik, welche die Antwort auf diese Frage gibt. Sie lehrt uns, daß man bei der Unmöglichkeit alle Fehler gleich Null zu machen (d. h. Werte der x zu finden, die die Differenzen zwischen den linken und rechten Seiten aller m Gleichungen zum Verschwinden bringen) die Summe ihrer Quadrate zu einem Minimum machen muß. Aus dieser Angabe folgen für die Bestimmung der x gewisse rechnerische Verfahrungsweisen, welche das sind, was man die Methode der kleinsten Quadrate zu nennen pflegt. Im wesentlichen reduziert sich alles darauf, die Funktion von n unabhängigen Veränderlichen

$$\sum_1^m (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - k_i)^2$$

zu einem Minimum zu machen. Es muß daher, wenn man successiv nach $x_1, x_2, \ldots, x_n$ deriviert, sein

$$\begin{aligned}
c_{11}\,x_1 + c_{21}\,x_2 + \cdots + c_{n1}\,x_n &= k_1a_{11} + k_2a_{21} + \cdots + k_na_{n1}, \\
c_{12}\,x_1 + c_{22}\,x_2 + \cdots + c_{n2}\,x_n &= k_1a_{12} + k_2a_{22} + \cdots + k_na_{n2}, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
c_{1n}x_1 + c_{2n}x_2 + \cdots + c_{nn}x_n &= k_1a_{1n} + k_2a_{2n} + \cdots + k_na_{nn}.
\end{aligned}$$

Dies ist das System, welches für die x die annehmbarsten Werte liefert. Um sich dies alles besser klar zu machen, ist es gut sich auf den Fall einer einzigen Unbekannten x zu beschränken, zu deren Bestimmung der Reihe nach n Messungen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ausgeführt worden sind, die sich sehr wenig voneinander unterscheiden. Hier hat man die Summe

$$(x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \cdots + (x - a_n)^2$$

zu einem Minimum zu machen, zu welchem Zweck man

$$x - a_1 + x - a_2 + \cdots + x - a_n = 0, \text{ d. h. } x = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

nehmen muß. Dies ist gerade das, was man für gewöhnlich zu tun pflegt[1]).

1) Quetelet: „Théorie des probabilités“, p. 47.

Viertes Buch.

Komplexe Zahlen und Quaternionen.

Komplexe Zahlen.

Grundbegriffe.

385. Ist die Maßeinheit OA gegeben, so lassen sich die positiven Zahlen auf einer Geraden darstellen, nachdem man auf derselben in beliebiger Weise den Anfangspunkt O fixiert hat. Dabei wird jeder Punkt der Geraden bestimmt durch die zugehörige Abscisse, und umgekehrt läßt sich die Zahl a, welche diese Abscisse mißt, als dargestellt durch jenen Punkt betrachten, den man kurz den Punkt a nennt. Um ferner den Begriff und die Darstellung der negativen Zahlen einzuführen, kommt man überein eine neue Einheit OA' zu betrachten, die der ersten gleich, aber entgegengesetzt gerichtet ist. Auf diese Weise lassen sich alle reellen Zahlen durch die Punkte der Abscissenachse darstellen. Welches ist der analytische Ausdruck, der zur Darstellung der andern Punkte der Ebene geeignet ist? Wir wollen zunächst die Punkte der y-Achse betrachten und eine neue Einheit OB einführen, die immer noch gleich OA ist, aber im positiven Sinne der y-Achse gerichtet ist. Bezeichnen wir diese neue Einheit mit i, sodaß ia eine Länge a bedeutet, die auf der y-Achse im positiven Sinne abgetragen ist, wie $-a$ eine Länge a bedeutet, die im negativem Sinne der x-Achse abgetragen ist. Mit andern Worten: das Zeichen i dient nur dazu, ebenso wie das Zeichen —, eine neue Richtung festzusetzen, nach welcher man sich von O aus-

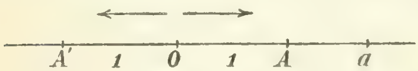

Fig. 13.

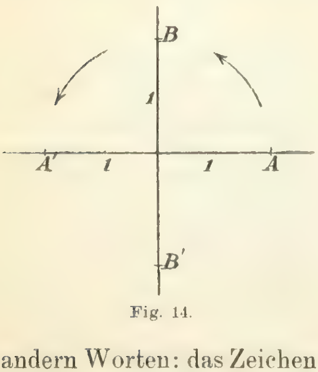

Fig. 14.

gehend bewegen muß, um den darstellenden Punkt der betrachteten Zahl zu finden. Man kommt jedoch der Einfachheit wegen überein i auch zur Darstellung der Zahl $i \cdot 1$ oder des Punktes B zu benutzen.

386. Um den algebraischen Kalkül auf die jetzt eingeführten Zahlen anzuwenden, ist es vor allem notwendig die Grundoperationen in einer von der Natur der ihnen unterworfenen Zahlen unabhängigen Weise zu definieren. Wir wollen sagen, daß die Addition einer Zahl zu einer andern in der Aufsuchung dessen besteht, was aus jener Zahl wird, wenn man die andere als Anfangspunkt wählt. Alsdann stellt $a + ib$ den Punkt ib dar unter der Voraussetzung, daß man den Anfangspunkt nach dem Punkt a verlegt. Die Zahl $a + ib$, welche eine komplexe oder imaginäre Zahl heißt, stellt also den Punkt der Ebene dar, welcher als Koordinaten a und b hat, und umgekehrt stellt dieser Punkt die Zahl $a + ib$ dar, welche das Affix des betrachteten Punktes heißt. Es liegt auf der Hand, daß man denselben Punkt wiederfindet, wenn man umgekehrt a zu ib addiert, so daß man also a und ib in $a + ib$ vertauschen darf. Die Gleichheit zwischen zwei komplexen Zahlen bedeutet das Zusammenfallen zweier Punkte der Ebene und spaltet sich daher notwendig in zwei Gleichheiten, eine zwischen den reellen Teilen der beiden Zahlen, die andere zwischen den mit dem Zeichen i behafteten Teilen, welche man auch die rein imaginären Teile nennt. Insbesondere ist um $a + ib = 0$ zu haben, notwendig und hinreichend, daß $a = 0$, $b = 0$ ist.

387. Ebenso kann man festsetzen, daß die Multiplikation von zwei Zahlen darin bestehe, zuzusehen, was eine von ihnen wird, wenn man die andere als Maßeinheit der positiven Zahlen annimmt. Man bemerke, daß man, um i zu erhalten, die Maßeinheit OA um den Punkt O um $\frac{\pi}{2}$ drehen muß, und zwar im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers. Mithin ist i^2 oder $i \cdot i$ das, was i wird, wenn man OB als Maßeinheit der positiven Zahlen annimmt. Um i^2 zu erhalten, muß man also OB um den Punkt O in dem vorhin definierten Sinne eine Drehung um $\frac{\pi}{2}$ ausführen lassen und bekommt auf diese Weise OA', so daß $i^2 = -1$ ist. Man kann deshalb den komplexen Zahlen die Form $a + b\sqrt{-1}$ geben.

388. Trigonometrische Darstellung. In Polarkoordinaten ist $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$, und man kann daher der komplexen Zahl $a + ib$ die Form $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ geben, wo

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a} + 2k\pi$$

mit beliebigem ganzzahligem k ist. Der Winkel θ heißt das Argument der betrachteten Zahl, und r, welches stets positiv (oder null) ist, ist der Modul dieser Zahl und wird mit $|a+ib|$ bezeichnet. Man beachte, daß zum Verschwinden einer komplexen Zahl notwendig und hinreichend ist das Verschwinden des Moduls.

389. Addition und Subtraktion. Die Definition der Addition zeigt sofort, daß die Summe der Zahlen c und c' das Affix des Punktes ist, den man durch Konstruktion des Parallelogrammes mit den Seiten Oc, Oc' erhält. Die Koordinaten dieses Punktes (der O gegenüberliegenden Ecke des Parallelogramms) sind offenbar $a+a'$, $b+b'$, sodaß $c'+c$ nicht verschieden von $c+c'$ ist. Man hat also

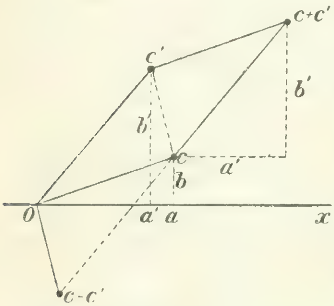

Fig. 15.

$$(a+ib)+(a'+ib')=(a+a')+i(b+b').$$

Ebenso beweist man, daß

$$(a+ib)-(a'+ib')=(a-a')+i(b-b')$$

ist. Der Punkt $c-c'$ liegt in Bezug auf c symmetrisch zu $c+c'$. Er ist der Endpunkt der Strecke, die gleich und parallel $c'c$ ist und von O aus geht. Es ist nützlich zu bemerken, daß die Entfernung zwischen zwei Punkten c und c' durch den Modul der Differenz $c-c'$ gemessen wird. Die Figur zeigt außerdem, daß der Modul der Summe von zwei komplexen Zahlen immer zwischen der Summe und der Differenz der Modulen der beiden Zahlen enthalten ist.

390. Multiplikation. Wenn OA die Maßeinheit ist, so erhält man c', indem man die Achse Ox um den Punkt O eine Drehung um θ' ausführen läßt und dann auf derselben vom Anfangspunkt aus eine Länge nimmt, die zu OA im Verhältnis r' steht. Betrachtet man jetzt Oc als Maßeinheit der positiven Zahlen und läßt diese Gerade um O eine Drehung um θ' ausführen, so erhält man eine Gerade, die mit Ox den Winkel $\theta+\theta'$ bildet, und um cc' zu finden, muß man auf ihr vom Anfangspunkt aus eine Länge abtragen, die zu r in dem Verhältnis r' steht, d. h. eine Länge rr'.

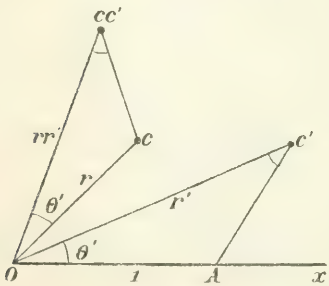

Fig. 16.

Man bemerke, daß man zu demselben Punkt gelangen würde, wenn man $c'c$ darzustellen sucht, so daß $c'c$ nicht verschieden von cc' ist. Aus dem Gesagten folgt nun weiter, daß auch für mehr als zwei Faktoren

a) das Argument eines Produkts gleich der Summe der Argumente der Faktoren,
b) der Modul eines Produkts gleich dem Produkt der Moduln der Faktoren ist.

Mit andern Worten

$$(a + ib)(a' + ib') = rr'[\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')],$$

oder, wenn man die rechte Seite entwickelt,

$$(a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba').$$

Man beachte nunmehr, daß dies gerade das Resultat ist, welches man erhalten hätte, wenn man $a + ib$ mit $a' + ib'$ nach den gewöhnlichen Regeln multiplizierte und dabei die Relation $i^2 = -1$ beachtete. Man bemerke im besondern, daß das Produkt von zwei konjugierten Zahlen $a + ib$ und $a - ib$ gleich dem Quadrat des gemeinsamen Moduls ist.

391. Damit ein Produkt verschwinde, ist notwendig und hinreichend, daß einer der Faktoren verschwindet. Es seien $r, r', r'', \ldots$ die Moduln der komplexen Zahlen $c, c', c'', \ldots$ Wenn $cc'c'' \cdots = 0$ ist, so ist auch $rr'r'' \cdots = 0$. Daher muß mindestens eine der reellen Zahlen $r, r', r'', \ldots$ verschwinden, und es wird also wenigstens eine der komplexen Zahlen $c, c', c'', \ldots$ null sein. Wenn umgekehrt eine von diesen Zahlen, z. B. c, null ist, so wird man nacheinander haben $r = 0$, $rr'r'' \cdots = 0$, $cc'c'' \cdots = 0$.

392. Division. Aus dem, was in § 390 bewiesen worden ist, ergibt sich sofort, daß $\frac{r}{r'}$ der Modul und $\theta - \theta'$ das Argument des Quotienten von $a + ib$ durch $a' + ib'$ ist, so daß man hat

$$\frac{a + ib}{a' + ib'} = \frac{r}{r'}[\cos(\theta - \theta') + i\sin(\theta - \theta')]$$

oder, wenn man die rechte Seite entwickelt,

$$\frac{a + ib}{a' + ib'} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + i\frac{ba' - ab'}{a'^2 + b'^2},$$

vorausgesetzt, daß $r' > 0$ ist. Man beachte, daß man zu dem letzten Resultat auch gelangt wäre, indem man Zähler und Nenner mit $a' - ib'$ multipliziert. Es ist also, um zusammenzufassen, erlaubt, dem algebraischen Kalkül die komplexen Zahlen so zu unterwerfen, als wären sie reelle Zahlen und bedeutete das Zeichen i eine Zahl, die der Gleichung $i^2 = -1$ genügt.

393. Potenzierung. Wendet man die Regel für die Multiplikation der komplexen Zahlen auf n Zahlen $\cos\theta + i\sin\theta$ an, so ergibt sich

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

Dies ist die Formel von Moivre. Sie läßt sich leicht auf den Fall eines beliebigen n ausdehnen. Es sei $n = -m$ und m ganz und positiv. Man hat dann

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \frac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^m} = \frac{1}{\cos m\theta + i\sin m\theta}$$
$$= \cos m\theta - i\sin m\theta = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

Wenn $n = \frac{p}{q}$ mit ganzzahligen und teilerfremden p, q ist, so setze man

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos t + i\sin t.$$

Erhebt man die beiden Seiten zur Potenz q, welche man immer als positiv voraussetzen kann), so erhält man

$$\cos p\theta + i\sin p\theta = \cos qt + i\sin qt.$$

Mithin ist

$$qt = p\theta + 2k\pi, \quad t = n\theta + \frac{2k\pi}{q}.$$

Daraus folgt, daß $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ außer dem Wert $\cos n\theta + i\sin n\theta$, welcher zu $k = 0$ gehört, noch $q - 1$ andere Werte hat, die

$$k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ q-1$$

entsprechen, da für $k = q,\ q+1, \ldots$ sich dieselben Werte unaufhörlich reproduzieren. Es ist ferner leicht zu sehen, daß, wie beschaffen auch n sein mag, $r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ die n-te Potenz von $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ist. Endlich bemerke man, daß für ein ganzzahliges n die Formel von Moivre die trigonometrischen Linien der Vielfachen des Bogens θ als Funktionen von $\cos\theta$ und $\sin\theta$ auszudrücken gestattet. Entwickelt man in der Tat die linke Seite nach der Newtonschen Formel, so erhält man sofort

$$\cos n\theta = \cos^n\theta - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2}\theta\cdot\sin^2\theta + \cdots,$$

$$\sin n\theta = \frac{n}{1}\cos^{n-1}\theta\cdot\sin\theta - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{n-3}\theta\cdot\sin^3\theta + \cdots.$$

394. Einheitswurzeln. Man nennt n-te Einheitswurzeln diejenigen Zahlen, welche zur n-ten Potenz erhoben 1 geben. Nehmen wir an, $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ sei eine solche Zahl, so muß

$$r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = 1$$

sein, folglich $r = 1$, $\cos n\theta = 1$, $\sin n\theta = 0$, d. h. $n\theta = 2k\pi$ mit ganzzahligem k. Die n-ten Einheitswurzeln sind also

$$\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n},\ \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n},\ \cos\frac{6\pi}{n} + i\sin\frac{6\pi}{n},\ \cdots.$$

Bezeichnet man die erste mit ω, so sind die andern (auf Grund der

Moivreschen Formel) $\omega^2, \omega^3, \omega^4, \ldots$ An n-ten Einheitswurzeln gibt es also n, nämlich

$$1, \ \omega, \ \omega^2, \ \ldots, \ \omega^{n-1},$$

da $\omega^n = 1, \omega^{n+1} = \omega, \ldots, \omega^{-1} = \omega^{n-1}, \ldots$ ist. Sie sind die Affixe der Ecken eines regulären Polygons, welches dem Kreise mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkt O einbeschrieben ist. Es ist ferner evident, daß man die n-ten Wurzeln irgend einer Zahl $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ erhält, indem man eine von ihnen mit den n-ten Einheitswurzeln multipliziert. In der Tat ist

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right)\cdot\omega^k.$$

Man bemerke, daß die Ecken irgend eines regulären n-Ecks mit dem Mittelpunkt in O die n-ten Wurzeln einer und derselben Zahl darstellen[1]).

Grenzwerte, Reihen und Funktionen.

395. Die Definitionen und Fundamentalsätze der Theorie der Grenzwerte (§ 122 u. s. w.) bestehen für die komplexen Veränderlichen $z = x + iy$ ebenso wie für die reellen. Nur muß man immer statt des absoluten Betrages den Modul jeder Zahl betrachten. So werden wir sagen, die Folge $z_1, z_2, z_3, \ldots$ konvergiere nach einem Grenzwert z, wenn jeder noch so kleinen positiven Zahl ε eine Zahl ν entspricht derart, daß für $n > \nu$ der Modul von $z_n - z$ kleiner als ε ist. Mit andern Worten, die Punkte, deren Affixe die Zahlen $z_1, z_2, z_3, \ldots$ sind, müssen schließlich in jeden noch so kleinen Kreis hineinkommen, der seinen Mittelpunkt in z hat. Geht man von dieser Definition aus, so erkennt man sofort, daß das Theorem von Cauchy (§ 139) vollkommen erhalten bleibt, und daß es folgenden Sinn hat: Wenn jeder positiven und beliebig kleinen Zahl ε eine Zahl n entspricht derart, daß die gegenseitigen Abstände der Punkte, deren Affixe die Zahlen $z_{n+1}, z_{n+2}, z_{n+3}, \ldots$ sind, alle kleiner sind als ε, so genügt dies, um zu behaupten, daß die Folge $z_1, z_2, z_3, \ldots$ einen endlichen Grenzwert zuläßt.

396. Damit eine komplexe Veränderliche einen Grenzwert zulasse, ist notwendig und hinreichend, daß der reelle Teil der Veränderlichen und der Koeffizient von i Grenzwerte zulassen. In der Tat, wenn ε gegeben und $|z_n - z| < \varepsilon$ ist für $n > \nu$, so sind a fortiori kleiner als ε die absoluten Beträge

1) Über die Theorie der Einheitswurzeln und ihre Beziehungen zur höheren Arithmetik siehe das „Lehrbuch der höheren Algebra“ von Weber (Bd. I, Kap. 12).

von $x_n - x$ und $y_n - y$; und wenn umgekehrt für $n > \nu$ diese letzteren kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ sind, so ist auch a fortiori (§ 389)

$$|z_n - z| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \varepsilon,$$

mithin $\lim z_n = z$ für unendliches n. Diese Bemerkung erlaubt es, sich schnell über das Bestehenbleiben vieler Sätze der Theorie der Grenzwerte zu vergewissern. Außerdem ist noch zu beachten, daß

$$\lim (x_n + i y_n) = \lim x_n + i \lim y_n$$

ist, wenn eine der beiden Seiten existiert, und daß, wenn der Modul und das Argument von z_n für unendliches n nach den Grenzwerten r und θ konvergieren, auch z_n nach einem Grenzwert konvergiert, der den Modul r und das Argument θ hat.

397. Die auf die reellen Reihen bezüglichen Definitionen sind auf die Reihen von komplexen Zahlen anwendbar. Es sei $u_n = a_n + i b_n$ das allgemeine Glied einer Reihe und $S_n = A_n + i B_n$ die Summe der n ersten Glieder. Damit S_n einem Grenzwert sich nähere, ist notwendig und hinreichend, daß dies von A_n und B_n gilt; und wenn A und B die Grenzwerte von A_n und B_n sind, so ist $A + iB$ die Summe S der gegebenen Reihe. Damit also eine Reihe mit komplexen Gliedern konvergent sei, ist notwendig und hinreichend, daß die Reihe der reellen Teile der Glieder und die aus den Koeffizienten von i gebildete beide konvergieren. Da man nun a_n und b_n erhält, indem man $|u_n|$ mit Zahlen multipliziert, die zwischen -1 und $+1$ enthalten sind, so sind (§ 189) die beiden Reihen, um welche es sich handelt, sicher konvergent, wenn die Reihe $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots$ konvergiert. Also ist eine Reihe konvergent, wenn die Reihe der Moduln der Glieder konvergiert. Auf der andern Seite beachte man, daß eine Reihe mit komplexen Gliedern auch konvergieren kann, wenn die Reihe der Moduln ihrer Glieder divergiert. So bilden bei der Reihe, welche als allgemeines Glied $u_n = \frac{1}{n}\left(\cos\frac{n\pi}{2} + i \sin\frac{n\pi}{2}\right)$ hat, die Moduln die divergente (§ 183) harmonische Reihe. Aber die Reihe selbst konvergiert, und ihre Summe ist

$$-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{6} + \cdots + i\left(1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \cdots\right) = -\log\sqrt{2} + \tfrac{1}{4} i\pi.$$

Auch die allgemeinen Sätze der Theorie der Reihen dehnen sich leicht auf Reihen von komplexen Zahlen aus, wobei aber überall wie in diesem Paragraphen das Wort Modul statt absoluter Betrag zu setzen ist. Wir werden uns im nachstehenden darauf beschränken als Beispiele die Beweise nur zweier Theoreme, der von Dirichlet (§ 230) und von Abel (§ 193), auseinanderzusetzen.

398. Damit eine Reihe mit komplexen Gliedern absolut konvergent sei, ist notwendig und hinreichend, daß die aus den Moduln der Glieder gebildete Reihe konvergiert. Wenn die Reihe absolut konvergiert (§ 225), welche als allgemeines Glied $u_n = a_n + ib_n$ hat, so konvergieren auch die Reihen der a_n und der b_n absolut, da jede Umordnung von Gliedern in der ersten Reihe sich in identischer Weise bei den beiden andern wiederholt. Es konvergieren daher die Reihen der $|a_n|$ und der $|b_n|$, und folglich konvergiert die Reihe, welche als allgemeines Glied $|a_n| + |b_n|$ hat. Also konvergiert auch die Reihe der Moduln, da $|u_n|$ nicht größer ist als $|a_n| + |b_n|$. Wenn umgekehrt die Reihe der Moduln konvergent ist, so konvergieren a fortiori die Reihen, welche als allgemeine Glieder $|a_n|$ und $|b_n|$ haben, da diese Zahlen nicht größer sind als $|u_n|$, und es sind daher die Reihen der a_n und der b_n absolut konvergent, folglich auch die Reihe der u_n.

399. Eine Reihe bleibt konvergent, wenn man ihre Glieder mit Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ multipliziert, die so beschaffen sind, daß die Reihe $\alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) + (\alpha_3 - \alpha_2) + \cdots$ absolut konvergent ist. Es sei in der Tat α die Summe der Reihe (mit positiven Gliedern)

$$\alpha_1 + |\alpha_2 - \alpha_1| + |\alpha_3 - \alpha_2| + \cdots,$$

die auf Grund des Theorems von Dirichlet konvergiert. Ist die positive Zahl ε beliebig klein gegeben, so läßt sich immer ν derart bestimmen, daß für $n > \nu$ und für beliebiges p

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{2\alpha}$$

ist. Es ist leicht zu sehen (vgl. § 192), daß die Summe

$$\alpha_{n+1} u_{n+1} + \alpha_{n+2} u_{n+2} + \cdots + \alpha_{n+p} u_{n+p}$$

sich identisch umformen läßt in

$$(\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}) u_{n+1} + (\alpha_{n+2} - \alpha_{n+3})(u_{n+1} + u_{n+2}) + \cdots$$
$$+ \alpha_{n+p}(u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}).$$

Ihr Modul ist daher kleiner als das Produkt von $\frac{\varepsilon}{2\alpha}$ mit

$$|\alpha_{n+2} - \alpha_{n+1}| + |\alpha_{n+3} - \alpha_{n+2}| + \cdots + |\alpha_{n+p} - \alpha_{\nu+p-1}| + |\alpha_{n+p}|.$$

Inzwischen ist klar, daß

$$|\alpha_{n+2} - \alpha_{n+1}| + |\alpha_{n+3} - \alpha_{n+2}| + \cdots + |\alpha_{n+p} - \alpha_{n+p-1}| < \alpha$$

ist, und ebenso ist wegen

$$\alpha_{n+p} = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) + (\alpha_3 - \alpha_2) + \cdots + (\alpha_{n+p} - \alpha_{n+p-1})$$

auch

$|\alpha_{n+p}| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2 - \alpha_1| + |\alpha_3 - \alpha_2| + \cdots + |\alpha_{n+p} - \alpha_{n+p-1}| < \alpha,$
sodaß

$$|\alpha_{n+2} - \alpha_{n+1}| + |\alpha_{n+3} - \alpha_{n+2}| + \cdots + |\alpha_{n+p}| < 2\alpha$$

wird. Mithin ist

$$|\alpha_{n+1}u_{n+1} + \alpha_{n+2}u_{n+2} + \cdots + \alpha_{n+p}u_{n+p}| < 2\alpha \cdot \frac{\varepsilon}{2\alpha} = \varepsilon$$

für $n > \nu$ und für beliebiges p. Die Reihe $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \cdots$ ist also (§ 187) konvergent.

400. Funktionen. Man nennt Funktion der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$ und bezeichnet mit $f(z)$ jeden analytischen Ausdruck, der geeignet ist eine Funktion $f(x)$ der reellen Veränderlichen x zu definieren, vorausgesetzt, daß er einen Sinn behält, wenn man die Veränderliche x durch z ersetzt. So ist nach dem in § 393 Gesagten eine Funktion von z jede Potenz von z mit einem rationalen (ganzen oder gebrochenen, positiven oder negativen) Exponenten. Beispiele:

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy, \quad z^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3), \ \ldots$$

Es sind demnach auf Grund desselben und der ihm vorangehenden Paragraphen definiert alle algebraischen Funktionen (§ 254, a) der komplexen Veränderlichen z. Hier ist es zweckmäßig zu bemerken, daß, während die rationalen Funktionen offenbar uniform, d. h. einwertig, sind, die irrationalen hingegen mehrerer Werte fähig sind (vgl. § 254, c). So hat $\sqrt[n]{z}$ z. B. n Werte (§ 394), und es ist ferner bemerkenswert, daß man, wenn der Punkt z sich in der Ebene stetig bewegt und dann zu seiner Anfangslage zurückkehrt, in dieser für $\sqrt[n]{z}$ einen Wert finden kann, der von dem Ausgangswert verschieden ist. Läßt man z. B. z einen Kreis mit dem Mittelpunkt in O beschreiben, und geht man von $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ mit dem Wert

$$r^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

von $\sqrt{z}$ aus, so kehrt man zurück mit dem Wert

$$r^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{2} + i\sin\frac{\theta+2\pi}{2}\right) = -r^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right).$$

Ebenso hat $\sqrt[3]{z}$ drei Werte, welche sich miteinander vertauschen, wenn z ein oder mehrere Male den Anfangspunkt umkreist, u. s. w.

401. Jede Funktion $f(z)$ hat im allgemeinen komplexe Werte und muß sich also auf die Form $u + iv$ bringen lassen, wo u und v reelle Funktionen der reellen unabhängigen Veränderlichen x und y sind. Aber weit entfernt davon willkürlich zu sein, gehören diese Funktionen zu der ganz besondern und wichtigen Klasse der harmonischen Funktionen, d. h. derjenigen Funktionen $\varphi(x, y)$, für welche die Summe $\varphi''_{xx} + \varphi''_{yy}$ identisch verschwindet. Man betrachte in der Tat $f(z)$ als Funktion der unabhängigen Veränderlichen x und y, indem man z als eine spezielle Funktion $x + iy$ dieser Veränderlichen behandelt und i als irgend eine Konstante. Läßt man die Existenz der Derivierten $f'(x)$ für reelles x zu, so ist klar, daß die ersten partiellen Derivierten von $f(z) = u + iv$ lauten

$$f'(z) = u'_x + iv'_x, \quad if'(z) = u'_y + iv'_y,$$

da $z'_x = 1$, $z'_y = i$ ist. Gibt man jetzt i seine Bedeutung wieder, so sieht man, daß

$$u'_y + iv'_y = i(u'_x + iv'_x) = iu'_x - v'_x$$

sein muß, folglich

(1) $$u'_x = v'_y, \quad u'_y = -v'_x,$$

woraus sich ergibt

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0, \quad v''_{xx} + v''_{yy} = 0.$$

Wenn man u und v willkürlich wählen würde, so wäre $u + iv$ zwar eine komplexe Funktion der beiden reellen Veränderlichen, aber nicht der einzigen Veränderlichen z, und es wäre daher nicht erlaubt, sie mit $f(z)$ zu bezeichnen, und noch weniger könnte man $f'(z)$ irgend eine Bedeutung beilegen. Sind dagegen die Bedingungen (1) erfüllt, so ist leicht folgendes zu sehen:

a) In dem Ausdruck

$$u(x, y) + iv(x, y)$$

treten die Veränderlichen x und y nur in der Kombination $z = x + iy$ auf. In der Tat, wenn man x durch $z - iy$ ersetzt und z wie eine reelle Veränderliche, i wie irgend eine Konstante behandelt, so ist die partielle Derivierte des so erhaltenen Ausdrucks

$$u(z - iy, y) + iv(z - iy, y)$$

nach y folgende: $-i(u'_x - v'_y) + u'_y - i^2 v'_x = (1 + i^2)u'_y$. Sie reduziert sich daher auf Null, wenn man annimmt $i^2 = -1$. Daraus folgt, daß der betrachtete Ausdruck, wenn man darin $z - iy$ für x setzt, sich in einen Ausdruck in z allein verwandelt, und es ist folglich erlaubt ihn mit $f(z)$ zu bezeichnen.

b) $f'(z)$ gestattet dieselbe Definition wie $f'(x)$ für reelles x. Geht man in der Tat von dem Punkte z zu dem Punkte $z + \delta z$ über, so erfahren bekanntlich (§ 376) u und v die Inkremente

$$\delta u = u'_x \delta x + u'_y \delta y + \cdots, \quad \delta v = v'_x \delta x + v'_y \delta y + \cdots,$$

wobei wir die Glieder vernachlässigen, die mit δz nach Null konvergieren, auch nachdem sie durch δx oder δy dividiert worden sind. Daraus folgt unter Beachtung von (1)

$$\delta f = (u'_x + iv'_x)\,\delta x + (u'_y + iv'_y)\,\delta y + \cdots = (u'_x + iv'_x)(\delta x + i\delta y) + \cdots,$$
mithin
$$\lim \frac{\delta f}{\delta z} = f'(z).$$

Man beachte, daß, wenn die Bedingungen (1) nicht erfüllt sind, die linke Seite, falls sie existiert, von der Art und Weise abhängt, wie man δz nach Null konvergieren läßt.

402. Man sagt (vgl. § 261), daß für nach z_0 konvergierendes z die Funktion $f(z)$ nach einem reellen oder komplexen Grenzwert l konvergiert, wenn jeder beliebig kleinen positiven Zahl ε eine positive Zahl h entspricht derart, daß in dem Kreise vom Radius h mit dem Mittelpunkt in z_0 immer $|f(z) - l| < \varepsilon$ ist. Für die Existenz eines solchen Grenzwertes ist es notwendig und hinreichend (vgl. § 264), daß $|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$ ist für jedes Paar von Punkten z' und z'', die im Innern eines hinreichend kleinen Kreises mit dem Mittelpunkt in z_0 gewählt sind. Es ist klar, daß das Konvergieren von $f(z) = u + iv$ nach einem Grenzwert $l = a + ib$ gleichbedeutend ist mit dem gleichzeitigen Konvergieren von u nach a und von v nach b. Offenbar sind dann u und v stetig, da man hat
$$\lim u(x, y) = u(x_0, y_0), \quad \lim v(x, y) = v(x_0, y_0),$$
auf welche Weise man auch $z = x + iy$ nach $z_0 = x_0 + iy_0$ konvergieren läßt, und umgekehrt zieht die Stetigkeit von u und v die Stetigkeit von $f(z)$ nach sich.

403. Eine Potenzreihe
$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots \tag{2}$$
definiert, wenn sie konvergiert, eine Funktion $f(z)$. Die aus den Moduln der Glieder gebildete Reihe ist ihrerseits eine Potenzreihe in der reellen Veränderlichen $r = |z|$ und hat daher (§ 326) ein Konvergenzintervall $(-\varrho, \varrho)$, welches im besondern unendlich sein oder sich auf Null reduzieren kann. Für $r < \varrho$ ist die Reihe der Moduln
$$|c_0| + |c_1|r + |c_2|r^2 + |c_3|r^3 + \cdots$$
konvergent, und es konvergiert daher die Reihe (2) absolut (§ 398). Sie konvergiert dagegen nicht für $r > \varrho$, da ihr allgemeines Glied, welches der Null zustreben müßte, nicht einmal endlich bleibt. Könnte in der Tat der Modul $|c_n|r^n$ dieses Gliedes für $r > \varrho$ kleiner bleiben als eine feste Zahl k, so hätte man, wenn r' zwischen ϱ und r gewählt wird, auch
$$|c_n|r'^n < k\left(\frac{r'}{r}\right)^n,$$
sodaß die Reihe der Moduln außerhalb des Intervalles $(-\varrho, \varrho)$ kon-

vergent wäre (§ 190, b). Also konvergiert die Reihe (2) in dem Kreise vom Radius ϱ mit dem Mittelpunkt im Anfangspunkt und konvergiert nicht außerhalb dieses Kreises, den man aus diesem Grunde den Konvergenzkreis der Reihe nennt. Zweifelhaft bleibt die Konvergenz immer, wenn z das Affix eines Punktes der Peripherie ist. Auch der Begriff der gleichmäßigen Konvergenz (§ 315) und die darauf bezüglichen Theoreme (§ 321 u. s. w.) sind leicht übertragbar auf Reihen, die aus Funktionen der komplexen Veränderlichen z gebildet sind. Insbesondere gelten die für die gleichmäßige Konvergenz und für die Derivierbarkeit der Potenzreihen einer reellen Veränderlichen gegebenen Beweise (§§ 325, 329) auch für die Reihe (2) und gestatten zu behaupten, daß die Summe dieser Reihe eine stetige Funktion $f(z)$ ist, deren Derivierte

$$f'(z) = c_1 + 2c_2 z + 3c_3 z^2 + 4c_4 z^3 + \cdots$$

ist, immer vorausgesetzt, daß man die Punkte der Peripherie ausschließt.

404. Wenn in der Reihe (2) das unabhängige Glied von Null verschieden ist, so kann man um den Anfangspunkt einen Kreis beschreiben, in dessen Inneres keine Wurzel von $f(z)$ fällt. In der Tat gestattet die Stetigkeit von $f(z)$ eine positive Zahl h zu finden, die hinreichend klein ist, damit für $|z| < h$ immer $|f(z) - c_0| < |c_0|$ wird. Nun ist aber nach der Schlußbemerkung in § 389

$$|f(z)| \geqq |c_0| - |c_0 - f(z)| > 0.$$

Also verschwindet $f(z)$ nicht im Innern des Kreises vom Radius h mit dem Mittelpunkt im Anfangspunkt. Dies vorausgeschickt wollen wir folgenden Satz beweisen: Wenn zwei Potenzreihen für unendlich viele Werte der Veränderlichen, die nach Null konvergieren, gleiche Summen haben, so sind sie identisch. Es sei in der Tat

$$c_0 - c_0' + (c_1 - c_1')z + (c_2 - c_2')z^2 + \cdots$$

die Reihe, welche man durch Subtraktion der gegebenen Reihen voneinander erhält. Die Summe dieser Reihe verschwindet für unendlich viele Werte der Veränderlichen, die nach Null konvergieren, und verschwindet daher in jedem noch so kleinen Kreise mit dem Mittelpunkt im Anfangspunkt. Also kann $c_0 - c_0'$ unmöglich von Null verschieden sein. Wird $c_0 = c_0'$ gesetzt, so ist es jetzt die Reihe $c_1 - c_1' + (c_2 - c_2')z + \cdots$, die für unendlich viele Werte von z verschwinden muß, die nach Null konvergieren; mithin ist $c_1 = c_1'$ u. s. f. Also müssen die gegebenen Reihen notwendig zusammenfallen. Daraus folgt, daß die Entwickelung einer Funktion in eine Potenzreihe nur in einer einzigen Weise möglich ist. Übrigens kann man sich leicht überzeugen (vgl. § 329), daß diese eine Entwickelung gerade die ist, welche die Mac-Laurinsche Formel liefern würde. Wie man aber die Legitimität einer solchen Entwickelung für eine gegebene Funktion $f(z)$ a priori erkennen kann, auf diesen Punkt können wir hier nicht eingehen und verweisen den Leser auf andere Werke[1]).

405. Welches auch der Weg sein mag, den z bei unendlicher Annäherung an einen Punkt z_0 im Innern des Konvergenzkreises der Reihe (2) durchläuft, immer nähert sich die Summe $f(z)$ dieser Reihe wegen der Stetigkeit dem Grenzwert $f(z_0)$. Dies kann man nicht mehr behaupten, wenn z_0 auf der Peripherie des genannten Kreises liegt, vorausgesetzt, daß $f(z_0)$ existiert. Für diesen Fall hat Abel bewiesen (vgl. § 340), daß man auch noch $\lim f(z) = f(z_0)$ hat, falls z normal zur Peripherie dem Punkte z_0 zustrebt. Es versteht sich, daß z vom Innern des Kreises herkommen muß. Dies drückt man aus, indem man setzt $z = q\varrho$ mit $q < 1$, sodaß nach der gemachten Annahme auch $z = qz_0$ sein muß. Es handelt sich darum, zu zeigen, daß die Differenz

$$f(z_0) - f(z) = c_1 z_0(1 - q) + c_2 z_0^2(1 - q^2) + c_3 z_0^3(1 - q^3) + \cdots$$

nach Null konvergiert, wenn q der Einheit zustrebt. Setzt man nun aber $u_n = c_n z_0^n$, $\alpha_n = 1 - q^n$, so weiß man (§ 399), daß die Reihe $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots$ konvergent ist, da nach der Voraussetzung die Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ konvergiert. Aus jenem Paragraphen ist zu entnehmen, daß jeder noch so kleinen positiven Zahl ε ein Wert von n entspricht, von welchem ab für alle in Betracht kommenden Werte von q

$$\alpha_{n+1} u_{n+1} + \alpha_{n+2} u_{n+2} + \cdots \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Ist n einmal fixiert, so kann man immer einen Wert von q finden, der nahe genug an der Einheit liegt, damit man hat

$$|\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n| < \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

Also wird für ein $|z|$, welches in genügender Nähe von ϱ liegt, sein $|f(z_0) - f(z)| < \varepsilon$ und folglich $\lim f(z) = f(z_0)$. Aus diesem Satze leitete Abel sein Theorem über die Multiplikation der Reihen (§ 236) ab.

1) Bei einem ersten Studium wird es nützlich sein, den „Résumé du Cours d'Analyse" von Mansion zu Rate zu ziehen. Siehe auch die „Principes d'une théorie nouvelle des fonctions élémentaires d'une variable imaginaire" von demselben Autor (Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 1885—86).

Wichtige transcendente Funktionen.

406. Exponentialfunktion. Die Reihe

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

ist in der ganzen Ebene konvergent, da immer die aus den Moduln ihrer Glieder gebildete Reihe konvergiert (§ 184). Es ist erlaubt ihre Summe mit e^z zu bezeichnen, solange dieses Symbol noch nicht für andere als reelle Werte von z definiert ist. Wenn r und θ bezüglich der Modul und das Argument von z sind, so zerlegt sich die betrachtete Reihe in

$$1 + \frac{r}{1}\cos\theta + \frac{r^2}{1 \cdot 2}\cos 2\theta + \cdots + i\left(\frac{r}{1}\sin\theta + \frac{r^2}{1 \cdot 2}\sin 2\theta + \cdots\right).$$

Früher (§ 332, b) haben wir gesehen, daß die erste Reihe die Entwickelung von $e^{r\cos\theta}\cos(r\sin\theta)$ ist, während die zweite die Entwickelung von $e^{r\cos\theta}\sin(r\sin\theta)$ ist. Daraus folgt

$$e^z = e^{r\cos\theta}(\cos(r\sin\theta) + i\sin(r\sin\theta)),$$

d. h.

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Im besondern erhält man für $x = 0$ die wichtige Formel von Euler

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y,$$

auf Grund deren die vorige Relation in $e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$ übergeht. Allgemeiner bemerke man, daß

$$e^z \cdot e^{z'} = e^{x+x'}(\cos(y+y') + i\sin(y+y')) = e^{z+z'}$$

ist. Die Funktion e^z genießt also die bekannte Eigenschaft

$$e^z \cdot e^{z'} \cdot e^{z''} \cdots = e^{z+z'+z''+\cdots},$$

auch wenn die Exponenten nicht reell sind. Endlich ist nach dem am Schlusse von § 403 Gesagten die Funktion e^z in der ganzen Ebene stetig, und ihre Derivierte ist e^z.

407. Kreisfunktionen. Ebenso sind wir, um die trigonometrischen Funktionen imaginärer Bogen zu definieren, berechtigt zu setzen

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \cdots,$$

$$\sin z = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{z^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \cdots,$$

nachdem wir die Konvergenz der angewandten Reihen konstatiert haben, eine Konvergenz, die in der ganzen Ebene absolut und gleichmäßig ist, da die Reihen der Moduln

$$1+\frac{r^2}{1\cdot 2}+\frac{r^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots,\quad \frac{r}{1}+\frac{r^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{r^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\cdots$$

für jeden Wert von r konvergieren. Bildet man nun die Funktionen $\cos z+i\sin z$ und $\cos z-i\sin z$, so erhält man die Resultate

$$1+\frac{iz}{1}+\frac{(iz)^2}{1\cdot 2}+\cdots=e^{iz},\quad 1-\frac{iz}{1}+\frac{(iz)^2}{1\cdot 2}-\cdots=e^{-iz},$$

sodaß man schreiben kann

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z,\quad e^{-iz}=\cos z-i\sin z.$$

Die Eulersche Formel gilt also auch für nicht reelle Bogen. Man gewinnt überdies aus den letzten Gleichungen

$$\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz}),\quad \sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz}).$$

Mit Hilfe dieser Relationen lassen sich leicht die Fundamentalformeln der Trigonometrie beweisen, welche man auf diese Weise auf das Gebiet der komplexen Zahlen übertragen findet. Man hat z. B.

$$\cos z\cos z'=\tfrac{1}{4}\left(e^{i(z-z')}+e^{-i(z-z')}+e^{i(z+z')}+e^{-i(z+z')}\right),$$
$$\sin z\sin z'=\tfrac{1}{4}\left(e^{i(z-z')}+e^{-i(z-z')}-e^{i(z+z')}-e^{-i(z+z')}\right),$$

ferner

$$\cos z\cos z'-\sin z\sin z'=\tfrac{1}{2}\left(e^{i(z+z')}+e^{-i(z+z')}\right)=\cos(z+z')$$

u. s. w. Verwandelt man in den Definitionsformeln z in $-z$, so bemerkt man, daß

$$\cos(-z)=\cos z,\quad \sin(-z)=-\sin z$$

ist, und die letzte Relation wird für $z'=-z$

$$\cos^2 z+\sin^2 z=1.$$

Endlich beachte man, daß (wie im Falle eines reellen z) die Derivierte von $\cos z$ gleich $-\sin z$ und die Derivierte von $\sin z$ gleich $\cos z$ ist. Die andern trigonometrischen Funktionen definiert man wie in der reellen Trigonometrie, indem man setzt

$$\sec z=\frac{1}{\cos z}=\frac{2}{e^{iz}+e^{-iz}},\quad \operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z}=\frac{1}{i}\,\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}.$$

Um zu sehen, eine wie große Vereinfachung die Theorie der komplexen Zahlen bei gewissen Fragen mit sich bringt, erinnere man sich an die erzeugende Funktion (§ 354) der Eulerschen Zahlen und bemerke, daß

$$\sec z=e^{Eiz}=\cos Ez+i\sin Ez=\cos Ez$$

ist. Ebenso wird

$$\operatorname{tg} z=\frac{1}{2i}\left(e^{(E+1)iz}-e^{(E-1)iz}\right),$$

sodaß der Koeffizient von z^p in der Entwickelung dieser Funktion folgender ist (§ 355)

$$\frac{i^{p-1}}{2}\cdot\frac{(E+1)^p-(E-1)^p}{p!}=\frac{i^{p-1}}{p!}(E+1)^p=\frac{i^{p-1}}{(p+1)!}2^{p+1}(2^{p+1}-1)B_{p+1}.$$

Man hat mit andern Worten wie für reelles z

$$\sec z = 1+\frac{z^2}{2}+\frac{5z^4}{24}+\cdots,\quad \operatorname{tg} z = z+\frac{z^3}{3}+\frac{2z^5}{15}+\cdots.$$

408. Hyperbelfunktionen. Da die Fundamentalformeln der Trigonometrie die trigonometrischen Funktionen des komplexen Bogens $z=x+iy$ durch die Funktionen des reellen Bogens x und die des rein imaginären Bogens iy auszudrücken erlauben, so genügt es eine geometrische Interpretation dieser letzten Funktionen zu finden, um zu gleicher Zeit die Interpretation der ganzen komplexen Trigonometrie zu erhalten. Beachtet man nun die Formeln

$$\cos ix = \frac{1}{2}(e^x+e^{-x}),\quad \sin ix = \frac{i}{2}(e^x-e^{-x}),$$

so wird man dazu geführt, die Funktionen

$$\operatorname{ch} x = \tfrac{1}{2}(e^x+e^{-x}),\quad \operatorname{sh} x = \tfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$$

zu betrachten, welche man bezüglich den hyperbolischen Kosinus und den hyperbolischen Sinus der reellen Veränderlichen x nennt. Ebenso definiert man die hyperbolische Tangente, indem man setzt

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},$$

u. s. w. Der Grund für diese Benennungen ist sofort aus der evidenten Relation

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

zu entnehmen, welche zeigt, daß $\operatorname{ch} x$ und $\operatorname{sh} x$ die Koordinaten eines Punktes Q der in cartesischen Koordinaten durch die Gleichung $X^2-Y^2=1$ dargestellten Hyperbel sind, ebenso wie $\cos x$ und $\sin x$ die Koordinaten eines Punktes P auf der Peripherie des um den Mittelpunkt O mit dem Radius $OA=1$ beschriebenen Kreises sind. Sind ferner P' und Q' die in Bezug auf die Abscissenachse zu P und Q symmetrischen Punkte, so wird die Fläche des Kreissektors OPP' gerade durch die Zahl x gemessen, und es ist leicht zu zeigen, daß analog die Fläche des Hyperbelsektors OQQ' durch die zugehörige Zahl x gemessen wird. Man projiziere in der Tat die Punkte A und Q in B und R auf eine Asymptote und bemerke, daß auf Grund der Äquivalenz der Flächen OAB und OQR die gesuchte Fläche doppelt

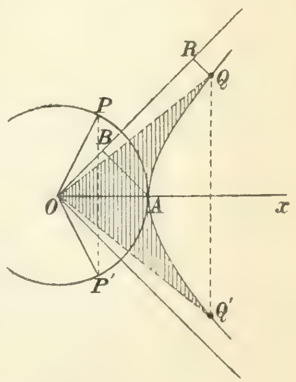

Fig. 17.

so groß ist als die des krummlinigen Vierecks $ABRQ$. Im folgenden werden wir sehen, daß diese durch den natürlichen Logarithmus des Verhältnisses von OR zu OB gemessen wird. Andererseits ist offenbar

$$OB = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad OR = \frac{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}{\sqrt{2}} = \frac{e^x}{\sqrt{2}}.$$

Mithin ist $OQQ' = \log e^x = x$. Endlich bestimmen die Radienvektoren OP, OQ auf der gemeinsamen Tangente der beiden Kurven vom Punkte A aus Abschnitte, die bezüglich durch $\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{th} x$ gemessen werden. Nur in ihrer Art zu variieren bieten die Hyperbelfunktionen bedeutende Unterschiede gegenüber den Kreisfunktionen. Wenn nämlich x von 0 nach Unendlich variiert, so variiert $\operatorname{ch} x$ von 1 nach Unendlich, $\operatorname{sh} x$ von 0 nach Unendlich, $\operatorname{th} x$ von 0 nach der Einheit, und für negative Werte der Veränderlichen hat man die Relationen

$$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x, \quad \operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x.$$

409. Wir wollen jetzt beweisen, daß jedem Werte von x ein Winkel ξ zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ entspricht (die hyperbolische Amplitude von x), dessen trigonometrische Linien in anderer Reihenfolge die hyperbolischen Linien von x wiedergeben. Es sei P ein Punkt des um den Mittelpunkt O mit dem Radius $OA = 1$ beschriebenen Kreises. Q' und Q'' seien die Punkte, in welchen die Tangenten des Kreises in P und in A sich mit OA bezw. OP treffen. Die Parallele und die Senkrechte zu Ox, die durch Q'' und Q' bezüglich geführt sind, schneiden sich in einem Punkte Q, welcher der darstellenden Kurve der Hyperbelfunktionen angehört; denn bezeichnet man mit ξ den Winkel POx, so hat man

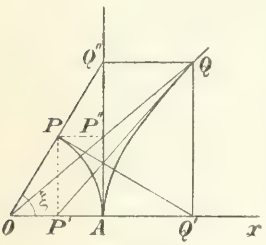

Fig. 18.

$$OQ' = OQ'' = \sec \xi, \quad QQ' = AQ'' = \operatorname{tg} \xi,$$

mithin $OQ'^2 - QQ'^2 = 1$. Nun sind die letzten Gleichungen gleichwertig mit folgenden andern

$$\operatorname{ch} x = \sec \xi, \quad \operatorname{sh} x = \operatorname{tg} \xi.$$

Aus diesen leitet man sofort ab

$$\operatorname{th} x = \sin \xi, \quad \operatorname{coth} x = \operatorname{cosec} \xi, \quad \operatorname{sech} x = \cos \xi, \quad \operatorname{cosech} x = \cot \xi.$$

Also sind der hyperbolische Sinus und die hyperbolische Tangente von x bezüglich gleich der (trigonometrischen) Tangente und dem (trigonometrischen) Sinus der hyperbolischen Amplitude von x. Ähnliches läßt sich von der Kosekante und der Kotangente sagen, ebenso vom Kosinus und der Sekante. Um ferner zu sehen, welche Beziehung zwischen einer Veränderlichen x und ihrer hyberbolischen Amplitude ξ besteht, braucht man nur zu bemerken, daß

$$e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = \sec \xi + \operatorname{tg} \xi = \frac{1 + \sin \xi}{\cos \xi} = \operatorname{tg}\left(\frac{\xi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

ist, woraus sich ergibt $x = \log \operatorname{tg}\left(\frac{\xi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cdot$ Dieser Relation kann man auch die von Laisant herrührende Form geben

$$\operatorname{th} \frac{x}{2} = \operatorname{tg} \frac{\xi}{2}\cdot$$

Man beachte schließlich noch die zwischen den darstellenden Kurven bestehende Korrelation. Wenn P' und P'' die Projektionen von P auf Ox und auf AQ'' sind, so ist zunächst zu bemerken, daß die Tangente der Hyperbel im Punkte Q durch P' hindurchgeht, ebenso wie die Tangente des Kreises im Punkte P durch Q' hindurchgeht. Es ist in der Tat bekannt, daß der Neigungskoeffizient der ersten Tangente $\frac{OQ'}{QQ'} = \frac{QQ'}{P'Q'}$ ist. Die beiden Tangenten schneiden sich auf der Geraden $AP'Q''$, und wie nach der Konstruktion Q'' der Geraden OP angehört, so gehört P'' der Geraden OQ an u. s. w.

410. Die Hyperbelfunktionen kann man auch wieder für nicht reelle Werte der Veränderlichen definieren, indem man setzt

$$\operatorname{ch} z = \tfrac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \quad \operatorname{sh} z = \tfrac{1}{2}(e^z - e^{-z}),$$

und ihre Beziehungen zu den Kreisfunktionen ergeben sich unmittelbar aus der Definition, da man hat

$$\operatorname{ch} z = \cos iz, \quad \operatorname{sh} z = \frac{\sin iz}{i}\cdot$$

Aus diesen Gleichungen ist zu entnehmen, daß die Relation

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$$

fortbesteht. Es lassen sich ferner leicht die Formeln beweisen

$$\operatorname{ch}(z + z') = \operatorname{ch} z \operatorname{ch} z' + \operatorname{sh} z \operatorname{sh} z', \quad \operatorname{sh}(z + z') = \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z' + \operatorname{ch} z \operatorname{sh} z',$$

$$\operatorname{th}(z + z') = \frac{\operatorname{th} z + \operatorname{th} z'}{1 + \operatorname{th} z \operatorname{th} z'}$$

und viele andere, die denen der gewöhnlichen Trigonometrie analog sind. Auf diese Weise wird eine besondere Rechnungsart begründet, die bei der Behandlung gewisser Fragen viele Vorteile bietet[1]). Man bemerke endlich, daß jede Kreis- oder Hyperbelfunktion von einer

1) Für ein weiteres Studium sei genannt „Die Lehre von den Hyperbelfunktionen" von Günther und auch „Parabolische Logarithmen und parabolische Trigonometrie" von demselben Autor.

komplexen Veränderlichen sich immer durch Kreis- und Hyperbelfunktionen von reellen Veränderlichen ausdrücken läßt. So ist z. B.

$$\cos z = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y, \quad \operatorname{ch} z = \cos y \operatorname{ch} x + i \sin y \operatorname{sh} x,$$

$$\sin z = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y, \quad \operatorname{sh} z = \cos y \operatorname{sh} x + i \sin y \operatorname{ch} x.$$

411. Die Funktion Logarithmus. Die Eulersche Formel gestattet jeder Zahl z die Form $re^{i\theta}$ zu geben. Da man θ immer durch $\theta + 2k\pi$ ersetzen darf, wo k eine ganze Zahl ist, so kann man auch schreiben

$$z = e^{\log r + i(\theta + 2k\pi)},$$

mithin, wenn man die Definition der natürlichen Logarithmen ausdehnt,

$$\log(z) = \log r + i\theta + 2ik\pi.$$

Das Symbol $\log(z)$ wird angewandt, um den allgemeinen Logarithmus von z darzustellen. Wenn z eine positive Zahl r ist, so liefert die letzte Formel

$$\log(r) = \log r + 2ik\pi$$

und zeigt, daß eine positive Zahl außer dem reellen gewöhnlichen Logarithmus unendlich viele andere imaginäre Logarithmen hat. Man hat ferner $\log(z) = \log(r) + i\theta$. Durch Addition von $i\theta$ zu jedem Logarithmus von r erhält man also die unendlich vielen Logarithmen von $re^{i\theta}$. Diese sind die Affixe von äquidistanten Punkten auf einer zur Achse der reellen Zahlen senkrechten Geraden. Bewegt sich z auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt im Anfangspunkt liegt, so verschiebt sich die Gerade in sich, da sie immer die Achse Ox in dem Punkte trifft, der den gewöhnlichen Logarithmus von $|z|$ darstellt. Beschreibt übrigens z eine beliebige geschlossene Kurve um den Anfangspunkt, so oszilliert die Gerade der Logarithmen, während sie sich immer in demselben Sinne in sich verschiebt, seitlich zwischen zwei äußersten Lagen, sodaß die verschiedenen Bestimmungen von $\log z$ schließlich ineinander übergehen, indem sie eine einzige sinusförmige Kurve beschreiben. Wenn dagegen z eine geschlossene Kurve durchläuft, die den Anfangspunkt nicht in ihrem Innern enthält, so kehrt nicht nur die Gerade, welche diesmal transversal und longitudinal oszilliert, in die alte Lage zurück, sondern dasselbe gilt auch für jeden von ihren Punkten, sodaß die unendlich vielen Bestimmungen von $\log(z)$ voneinander verschieden bleiben und ebenso viele Ringe beschreiben, die zwischen den äußersten Lagen der Geraden liegen.

412. Man setzt die Bedeutung von z^c für $c = a + ib$ fest, indem man übereinkommt zu schreiben

$$z^c = e^{c \log z} = e^{(a+ib)(\log r + i\theta + 2ik\pi)}.$$

Modul und Argument von z^c sind also die Zahlen

$$\varrho = e^{a \log r - b(\theta + 2k\pi)}, \quad t = b \log r + a(\theta + 2k\pi) + 2k'\pi$$

mit beliebigen ganzzahligen k, k'. Denken wir uns für einen Augenblick die unendlich vielen (z gleichen) Zahlen, welche den Modul r und die Argumente $\theta \pm 2\pi$, $\theta \pm 4\pi$, ... haben, als verschieden von z, obwohl durch denselben Punkt dargestellt. Wenn wir die gewöhnlichen Regeln angewandt hätten, um zur Potenz c zu erheben sei es die Zahl z, sei es irgend eine andere demselben Punkt angeheftete Zahl, so hätten wir erhalten

$$z^c = \left[r e^{i(\theta + 2k\pi)}\right]^{a+ib} = r^{a+ib} \cdot e^{(ia - b)(\theta + 2k\pi)},$$

d. h.

$$z^c = r^a e^{-b(\theta + 2k\pi)} \cdot e^{i[b \log r + a(\theta + 2k\pi)]} = \varrho e^{i(t - 2k'\pi)} = \varrho e^{it}.$$

Um also z zur Potenz c zu erheben, muß man die gebräuchliche Rechnung auf die unendlich vielen Zahlen anwenden, die mit z einem und demselben Punkte angeheftet sind. Es gibt also unendlich viele Werte von z^c. Sie bilden eine geometrische Progression, welche das Verhältnis $e^{2i\pi c}$ hat, und sind Punkten angeheftet, welche längs einer logarithmischen Spirale mit dem Pol im Anfangspunkt verteilt sind. Diese Kurve trifft die Achse der y parallel zu Oc und reduziert sich daher, wie wir bereits gesehen haben (§ 394), auf einen Kreis, wenn c reell ist. Sie wird dagegen eine Gerade, wenn c rein imaginär ist. Es ist gut auf die obigen Bemerkungen zu achten, wenn man die beiden Seiten einer Gleichung zu einer Potenz erhebt. Sonst könnte man z. B. aus der richtigen Gleichung $e^{-2i\pi} = e^{2i\pi}$, indem man beide Seiten zur Potenz i erhebt, die absurde Gleichung $e^{2\pi} = e^{-2\pi}$ ableiten, während man doch nur behaupten kann, daß die Zahlen $e^{2\pi(1-k)} = e^{-2\pi(1+k')}$ für passende Werte von k und k' zusammenfallen müssen, wie es tatsächlich der Fall ist, wenn man $k - k' = 2$ hat.

Geometrische Übungen.

413. Krummlinige Koordinaten. Wenn zwei reelle Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x und y zwei gegebenen reellen Konstanten bezüglich gleich gesetzt werden, so stellen die Gleichungen $u = a$, $v = b$, welche man auf diese Weise erhält, zwei bestimmte Linien in der Ebene dar. Wenn es ein einziges Paar von Werten a, b gibt derart, daß die beiden Linien durch einen gegebenen Punkt M hindurchgehen und keine andern gemeinsamen Punkte haben, wenigstens in einem gewissen Gebiet der Ebene, so können a und b dazu dienen die Lage von M in jenem Gebiet zu definieren und heißen deshalb die krummlinigen Koordinaten dieses Punktes. Wenn ferner u und v aus der Zerfällung einer Funktion der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$ in den reellen Teil u und den rein imaginären iv herstammen, so treffen die unendlich vielen Linien, welche durch die Gleichung $u = a$ für unendlich viele Werte von a dargestellt werden, überall unter rechtem Winkel die durch die Gleichung $v = b$ dargestellten Linien. Dies drückt man aus, indem man sagt, daß man es mit einem System von orthogonalen krummlinigen Koordinaten zu tun hat. In der Tat sagen die in § 401 gefundenen Bedingungen (1) gerade aus, daß die Neigungskoeffizienten der Tangenten an die beiden durch einen gegebenen Punkt (x, y) hindurchgehenden Kurven,

$$-\frac{u'_x}{u'_y}, \quad -\frac{v'_x}{v'_y} = \frac{u'_y}{u'_x},$$

der Orthogonalitätsbedingung genügen, da ihr Produkt gleich -1 ist. Das gewöhnliche System der rechtwinkligen cartesischen Koordinaten ist durch die Funktion z oder allgemeiner durch $\alpha z + \beta$ charakterisiert, welches auch die reellen oder komplexen Zahlen α und β sein mögen. Nimmt man dagegen $\frac{1}{z}$, so wird die eine Kurvenschar von den gleichseitigen Hyperbeln gebildet, die zu Ox und Oy asymptotisch sind; die andere Schar erhält man, indem man diese Kurven um ihren gemeinsamen Mittelpunkt eine Drehung um $\frac{\pi}{4}$ ausführen läßt. Die Funktion $\sqrt{z}$ gibt alle Parabeln, welche die Achse Ox und den Brennpunkt O gemein haben. Nimmt man noch die Funktionen

$$\log z, \quad \log\log z, \quad \log\frac{z - z_1}{z - z_2},$$

so findet man drei interessante Koordinatensysteme. Das erste ist einfach das gewöhnliche System der Polarkoordinaten, bei dem zweiten besteht die eine Kurvenschar aus logarithmischen Spiralen mit dem Anfangspunkt als Pol, das dritte System endlich, das der dipolaren Koordinaten, welches in der Elektrostatik sehr nützlich ist[1]), hat eine fundamentale Wichtigkeit in den geometrischen Anwendungen der komplexen Zahlen. Sind r_1 und r_2 die Entfernungen zwischen z und den Punkten z_1 und z_2, und ist φ der Winkel, unter welchem man vom Punkte z aus die Strecke $z_1 z_2$ sieht, so hat man

$$\log\frac{z - z_1}{z - z_2} = \log\left(\frac{r_1}{r_2} e^{i\varphi}\right),$$

sodaß man $u = \log\frac{r_1}{r_2}$, $v = \varphi$ setzen kann. Die Kurven der einen Schar sind durch die Gleichung $\varphi =$ Const. charakterisiert. Sie sind also die Kreise, welche durch z_1 und z_2 (die Pole) hindurchgehen. Die Kurven der andern Schar, die durch die Gleichung $\frac{r_1}{r_2} =$ Const. charakterisiert werden, sind ebenfalls Kreise und notwendig orthogonal zu den

1) Vgl. Betti: „Teorica delle forze newtoniane" (auch deutsch von Fr. Meyer), p. 189.

ersten, zu denen auch die Gerade $z_1 z_2$ gehört, die folglich die Mittelpunkte der Kreise der zweiten Schar enthält. Man kann hier den Einwand machen, daß die beiden Kreise, welche sich in z schneiden, sich noch einmal in einem zweiten Punkte treffen. Dieser hat jedoch zwar dieselbe Koordinate u wie der erste, nicht aber dasselbe v, da die Pole den ersten Kreis in zwei Bogen teilen, längs deren einem man hat $v = \varphi$, während auf dem andern $v = \pi - \varphi$ ist.

414. Die Funktion
$$\log\left(\sqrt{z - z_1} + \sqrt{z - z_2}\right)$$
liefert den Inbegriff aller Kegelschnitte, welche die Brennpunkte z_1 und z_2 gemein haben. Wir können in der Tat, nachdem wir von der gegebenen Funktion die Konstante $\log\sqrt{z_2 - z_1}$ subtrahiert haben, setzen
$$\sqrt{z - z_1} + \sqrt{z - z_2} = \sqrt{z_2 - z_1} \cdot e^{u + iv}$$
und folglich
$$\sqrt{z - z_1} - \sqrt{z - z_2} = \sqrt{z_2 - z_1} \cdot e^{-u - iv},$$
woraus sich ergibt
$$\sqrt{z - z_1} = \sqrt{z_2 - z_1}\,(\operatorname{ch} u \cos v + i \operatorname{sh} u \sin v),$$
$$\sqrt{z - z_2} = \sqrt{z_2 - z_1}\,(\operatorname{sh} u \cos v + i \operatorname{ch} u \sin v).$$
Nimmt man jetzt die Quadrate der Moduln, so erhält man
$$r_1 = r\,(\operatorname{ch}^2 u \cos^2 v + \operatorname{sh}^2 u \sin^2 v), \quad r_2 = r\,(\operatorname{sh}^2 u \cos^2 v + \operatorname{ch}^2 u \sin^2 v),$$
wo r die Entfernung zwischen den Punkten z_1 und z_2 darstellt. Es ist daher
$$r_1 + r_2 = r \operatorname{ch} 2u, \quad r_1 - r_2 = r \cos 2v.$$
Daraus folgt, daß die Linien $u =$ Const. Ellipsen mit den Brennpunkten in z_1 und z_2 sind und die Linien $v =$ Const. Hyperbeln mit denselben Brennpunkten. Man bemerke überdies, daß re^{2u} und re^{-2u} die Moduln der Zahlen
$$\left(\sqrt{z - z_1} \pm \sqrt{z - z_2}\right)^2 = 2z - (z_1 + z_2) \pm 2\sqrt{(z - z_1)(z - z_2)}$$
sind, und daß man daher behaupten darf, daß die Summe der Abstände eines Punktes z von zwei beliebigen Punkten z_1 und z_2 gleich
$$(3) \qquad \begin{aligned} &\left|z - \tfrac{1}{2}(z_1 + z_2) + \sqrt{(z - z_1)(z - z_2)}\right| \\ + &\left|z - \tfrac{1}{2}(z_1 + z_2) - \sqrt{(z - z_1)(z - z_2)}\right| \end{aligned}$$
ist. Dieses Resultat läßt sich übrigens auch direkt nachweisen, wenn man sich daran erinnert (§ 389), daß die Moduln der Summe und der Differenz zweier Zahlen c, c' die Längen der Diagonalen des Parallelogramms messen, welches über den Seiten Oc, Oc' konstruiert ist. Da die Summe der Quadrate der Diagonalen gleich der Summe der vier Seiten ist, so hat man
$$|c|^2 + |c'|^2 = \tfrac{1}{2}\left(|c + c'|^2 + |c - c'|^2\right).$$

Man braucht nur $c = \sqrt{z - z_1}$, $c' = \sqrt{z - z_2}$ zu setzen und zu bemerken, daß immer $|c|^2 = |c^2|$ ist, um zu erkennen, daß der Ausdruck (3) nicht verschieden von $|z - z_1| + |z - z_2|$ ist.

415. Um eine interessante Anwendung von diesem letzten Resultat zu machen, betrachte man die Funktion $f(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$, welche in den Punkten z_1, z_2, z_3 verschwindet. Im folgenden werden wir sehen, daß man jedem Polynom dritten Grades die obige Form geben kann. Die Derivierte

$$(4) \qquad f'(z) = 3z^2 - 2(z_1 + z_2 + z_3)z + (z_2 z_3 + z_3 z_1 + z_1 z_2)$$

verschwindet in zwei Punkten ζ und ζ', die symmetrisch zu

$$\tfrac{1}{2}(\zeta + \zeta') = \tfrac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3) = \zeta_0,$$

d. h. zu dem Schwerpunkt ζ_0 des Dreiecks $z_1 z_2 z_3$ liegen, und dies ist eine erste bemerkenswerte Eigenschaft. Im Mittelpunkt einer Seite, z. B. in $\tau_1 = \frac{1}{2}(z_2 + z_3)$, nimmt die Funktion

$$f'(z) = (z - z_2)(z - z_3) + (z - z_3)(z - z_1) + (z - z_1)(z - z_2)$$

den Wert $-\frac{1}{4}(z_2 - z_3)^2$ an. Man hat also, da auch

$$f'(z) = 3(z - \zeta)(z - \zeta')$$

ist,

$$(5) \qquad (\tau_1 - \zeta)(\tau_1 - \zeta') = -\tfrac{1}{12}(z_2 - z_3)^2.$$

Folglich werden die Zahlen, deren Moduln in dem Ausdruck (3) auftreten, wenn man denselben auf die Berechnung der Summe der Entfernungen von τ_1 bis ζ und ζ' anwendet,

$$\tau_1 - \frac{1}{2}(\zeta + \zeta') \pm \frac{i}{2\sqrt{3}}(z_2 - z_3) = -\frac{1}{3}z_1 + \frac{1}{6}(z_2 + z_3) \pm \frac{i\sqrt{3}}{6}(z_2 - z_3).$$

Führt man nun die imaginären dritten Einheitswurzeln ein (§ 394)

$$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}, \quad \omega^2 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3},$$

so kann man den genannten Zahlen nach Umkehrung der Vorzeichen die Form geben

$$\tfrac{1}{3}z_1 + \tfrac{1}{6}\left[(\omega + \omega^2)(z_2 + z_3) \mp (\omega - \omega^2)(z_2 - z_3)\right].$$

Sie werden also ζ_1 und ζ_2, wenn man setzt

$$(6) \qquad z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3 = 3\zeta_1, \quad z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3 = 3\zeta_2.$$

Also ist die Summe der Entfernungen zwischen τ_1 und den Wurzeln von $f'(z)$ gleich $|\zeta_1| + |\zeta_2|$. Betrachtet man τ_2 oder τ_3 anstatt τ_1, so muß man die Zahlen (6) bezüglich durch die folgenden ersetzen

$$z_2 + \omega^2 z_3 + \omega z_1 = 3\omega\zeta_1, \quad z_2 + \omega z_3 + \omega^2 z_1 = 3\omega^2\zeta_2,$$
$$z_3 + \omega^2 z_1 + \omega z_2 = 3\omega^2\zeta_1, \quad z_3 + \omega z_1 + \omega^2 z_2 = 3\omega\zeta_2.$$

Der Ausdruck (3) wird in diesen Fällen

$$|\omega\zeta_1| + |\omega^2\zeta_2|, \quad |\omega^2\zeta_1| + |\omega\zeta_2|,$$

d. h. immer $|\zeta_1| + |\zeta_2|$, da $|\omega| = 1$ ist. Daraus folgt, daß die Punkte τ_1, τ_2, τ_3 einer Ellipse angehören, die ihre Brennpunkte in ζ_1 und ζ_2, ihren Mittelpunkt folglich in ζ_0 hat. Es folgt ferner (§ 390) aus (5), wenn man mit $\arg z$ das Argument einer Zahl z bezeichnet,

$$\arg\frac{\tau_1 - \zeta}{z_2 - z_3} + \arg\frac{\tau_1 - \zeta'}{z_2 - z_3} = \pi.$$

Dies bedeutet, daß die Strahlen $\zeta\tau_1$ und $\zeta'\tau_1$ gleiche Neigung gegen die Gerade $z_2 z_3$ haben. Dieselbe ist also die Tangente der Ellipse in τ_1. Wenn also die Punkte z_1, z_2, z_3 bekannt sind, in denen ein Polynom dritten Grades verschwindet, so verschwindet die Derivierte des Polynoms in den Brennpunkten der Ellipse, die die Seiten des Dreiecks z_1, z_2, z_3 in ihren Mittelpunkten berührt[1]). Bemerken wir schließlich noch, daß die Wurzeln ζ und ζ' leicht ausdrückbar sind durch die Zahlen $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2$. Multipliziert man in der Tat die Gleichungen (6) miteinander und beachtet, daß $1 + \omega + \omega^2 = 0$ ist, so erhält man

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_2 z_3 - z_3 z_1 - z_1 z_2 = 9\,\zeta_1\zeta_2.$$

Nun ist aber auch

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2\,z_2 z_3 + 2\,z_3 z_1 + 2\,z_1 z_2 = 9\,\zeta_0^2.$$

Also ist $z_2 z_3 + z_3 z_1 + z_1 z_2 = 3\,(\zeta_0^2 - \zeta_1\zeta_2)$. Dies vorausgeschickt wird der Ausdruck (4) für die Derivierte

$$f'(z) = 3\left((z - \zeta_0)^2 - \zeta_1\zeta_2\right),$$

folglich

$$(7)\qquad \zeta = \zeta_0 + \sqrt{\zeta_1\zeta_2}, \quad \zeta' = \zeta_0 - \sqrt{\zeta_1\zeta_2}.$$

416. Lineare Substitutionen. Setzt man $z' = f(z)$, so wird dadurch eine geometrische Transformation definiert, welche jeden Punkt z in einen bestimmten Punkt z' überführt. Wenn man z. B. die Transformationen

$$(8)\qquad z' = z + c, \quad z' = cz, \quad z' = \frac{1}{z}$$

studiert, so erkennt man sofort, daß die Hinzufügung der Konstanten c zu den Affixen aller Punkte einer Figur gleichbedeutend ist mit einer Translation, der man die Figur unterwirft. Diese Translation wird in Größe und Richtung durch die Strecke Oc gemessen. Multipliziert man die Affixe mit einer Konstanten, so bedeutet dies, daß man die Figur einer Rotation um O unterzieht, die durch das Argument der Konstanten gemessen wird, und einer Dilatation (oder Kontraktion) von O aus, die durch den Modul jener Konstanten gemessen wird. Endlich ist die Transformation, durch welche man von den Punkten z zu den Punkten $\frac{1}{z}$ gelangt, gleichwertig mit der Vereinigung einer Inversion (Verwan-

1) Dieses interessante Theorem wurde in allgemeinerer Fassung für ein Polynom beliebigen Grades angegeben von Van den Berg (Nieuw Archief voor Wiskunde, t. XV, p. 140).

delung von r in $\frac{1}{r}$) oder Transformation durch reziproke Radien in Bezug auf den Kreis vom Radius 1 mit dem Mittelpunkt in O und einer Spiegelung der Figur (Verwandelung von θ in $-\theta$) in ihrer eigenen Ebene an der Achse der reellen Zahlen. Alle diese Transformationen sind Spezialfälle der folgenden

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

welche man eine lineare Substitution nennt. Man muß aber dabei annehmen, daß die Determinante der Substitution $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$ von Null verschieden sei. Sonst würde man haben $z' =$ Const., d. h. allen Punkten der Ebene entspräche ein einziger Punkt z'. Es genügt ferner zu schreiben

$$z' = \frac{1}{\gamma}\left(\alpha - \frac{\Delta}{\gamma z + \delta}\right),$$

um sich zu überzeugen, daß jede lineare Substitution in einfache Substitution wie die (8) zerlegbar ist.

417. Doppelverhältnisse. Sind vier Zahlen z, z_1, z_2, z_3 gegeben, so ist es allgemein möglich drei Werte k_1, k_2, k_3 mit der Summe Null zu finden, die nicht sämtlich verschwinden und so beschaffen sind, daß die Relation

$$(9) \qquad k_1(zz_1 + z_2z_3) + k_2(zz_2 + z_3z_1) + k_3(zz_3 + z_1z_2) = 0$$

besteht. Man braucht nur zu setzen

$$k_1 = (zz_2 + z_3z_1) - (zz_3 + z_1z_2) = (z - z_1)(z_2 - z_3),$$
$$k_2 = (zz_3 + z_1z_2) - (zz_1 + z_2z_3) = (z - z_2)(z_3 - z_1),$$
$$k_3 = (zz_1 + z_2z_3) - (zz_2 + z_3z_1) = (z - z_3)(z_1 - z_2).$$

Die Werte der gegenseitigen Verhältnisse der k, genommen mit verändertem Vorzeichen, sind die Doppelverhältnisse der vier Zahlen, und zwar nennt man gerade das Verhältnis $-\frac{k_2}{k_3}$ das Doppelverhältnis der vier Zahlen z, z_1, z_2, z_3, betrachtet in der Reihenfolge, in der sie hier geschrieben sind, und bezeichnet es mit $(zz_1z_2z_3)$. Es ist also

$$(zz_1z_2z_3) = -\frac{(z-z_2)(z_3-z_1)}{(z-z_3)(z_1-z_2)} = \frac{z-z_2}{z-z_3} : \frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}.$$

Wenn man von der Reihenfolge absieht, so hat man sechs Werte des Doppelverhältnisses

$$-\frac{k_2}{k_3} = \lambda, \quad -\frac{k_3}{k_1} = \frac{k_3}{k_2+k_3} = \frac{1}{1-\lambda}, \quad -\frac{k_1}{k_2} = \frac{k_2+k_3}{k_2} = 1 - \frac{1}{\lambda},$$
$$-\frac{k_3}{k_2} = \frac{1}{\lambda}, \quad -\frac{k_1}{k_3} = \frac{k_2+k_3}{k_3} = 1 - \lambda, \quad -\frac{k_2}{k_1} = \frac{k_2}{k_2+k_3} = \frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

Sie reduzieren sich auf drei verschiedene Werte, -1, $\frac{1}{2}$, 2, wenn zwei Koeffizienten k einander gleich sind, und auf nur zwei, die beiden imaginären Kubikwurzeln von -1, wenn die drei Koeffizienten k in (9) die

Kubikwurzeln der Einheit sind. Die Lage der vier Zahlen heißt im ersten Falle die harmonische, im zweiten die äquianharmonische. Wenn r_{pq} der Modul von $z_p - z_q$ ist, d. h. die Entfernung der Punkte z_p und z_q, so hat das Doppelverhältnis $(z z_1 z_2 z_3)$ den Modul

$$\frac{r_{02}}{r_{03}} : \frac{r_{12}}{r_{13}} = \frac{r_{02}\, r_{13}}{r_{03}\, r_{12}}$$

und ein Argument gleich der Differenz oder der Summe der Winkel, unter denen man von den Punkten z und z_1 aus die Strecke $z_2 z_3$ sieht. Daraus folgt insbesondere, daß, wenn das Doppelverhältnis reell ist, die vier Punkte einem Kreise angehören und umgekehrt. Die Bedeutung des Doppelverhältnisses ist also eine wesentlich geometrische und bleibt daher bei jeder beliebigen Verschiebung der Achsen ungeändert. Da nun eine solche Verschiebung gleichwertig ist mit der Substitution $z' = \alpha z + \beta$, wobei $|\alpha| = 1$ ist, so wird man von selbst dazu geführt, den Einfluß irgend einer linearen Substitution auf das Doppelverhältnis von vier Punkten zu untersuchen. Führt man der Reihe nach die elementaren Substitutionen (8) aus, in welche jede lineare Substitution zerlegbar ist, d. h. verwandelt man jedes z_p in $z_p + c$ oder in $c z_p$ oder in $\frac{1}{z_p}$, so bleibt die Relation (9) immer noch erfüllt. Also ändern die linearen Substitutionen die Doppelverhältnisse nicht. Daraus folgt insbesondere, daß eine lineare Substitution die Kreise der Ebene wieder in Kreise transformiert, denn, wie wir sahen, haben vier auf einem Kreise gelegene Punkte reelle Doppelverhältnisse. Da diese bei der Transformation ihre reellen Werte behalten, so gehören die vier Punkte nach wie vor einem Kreise an.

418. Betrachten wir wieder für einen Augenblick[1]) irgend eine lineare Substitution, um zu beweisen, daß die Aufsuchung des Punktes z', der z entspricht, im allgemeinen darauf hinauskommt, diejenige Zahl z' zu suchen, die mit z und mit zwei andern bestimmten Zahlen ein gegebenes Doppelverhältnis bildet. Zunächst bemerke man, daß die Substitution zwei Punkte in Ruhe läßt (die sogenannten Doppelpunkte). Sie werden dargestellt durch die Wurzeln z_1, z_2 der Gleichung, die man durch die Forderung $z' = z$ erhält, d. h.

$$\gamma z^2 - (\alpha - \delta) z - \beta = 0.$$

Aus dieser Gleichung leitet man ab

$$2\gamma z_1 = \alpha - \delta + \sqrt{(\alpha + \delta)^2 - 4\Delta}, \quad 2\gamma z_2 = \alpha - \delta - \sqrt{(\alpha + \delta)^2 - 4\Delta}.$$

Beachtet man nun die Relationen $\alpha - \delta = \gamma (z_1 + z_2)$, $\beta = -\gamma z_1 z_2$, so findet man leicht

$$z' - z_1 = \frac{\alpha - \gamma z_1}{\gamma z + \delta}(z - z_1), \quad z' - z_2 = \frac{\alpha - \gamma z_2}{\gamma z + \delta}(z - z_2),$$

1) Andere Kenntnisse über die linearen Substitutionen kann sich der Leser aneignen aus der „Theory of functions of a complex variable“ von Forsyth (p. 512).

woraus unter der Voraussetzung, daß nicht $z_1 = z_2$ ist, folgt

$$(z' z z_1 z_2) = \frac{\alpha + \delta - \sqrt{(\alpha + \delta)^2 - 4\Delta}}{\alpha + \delta + \sqrt{(\alpha + \delta)^2 - 4\Delta}}.$$

Denken wir uns, daß der Wert λ dieses Verhältnisses variiert, während bei Festhaltung der Doppelpunkte auch der Punkt z fest bleibt, so ist klar, daß z' sich in der Ebene verschiebt derart, daß jedem Werte von λ eine Lage von z' entspricht. Nun ist aber

$$\log \frac{z' - z_1}{z' - z_2} = \log \lambda + \log \frac{z - z_1}{z - z_2},$$

und das am Ende des § 413 Gesagte berechtigt uns zu der Behauptung, daß, wenn nur der Modul von λ variiert, der Punkt z' einen durch z_1 und z_2 hindurchgehenden Kreis beschreibt; wenn dagegen nur das Argument von λ variiert, so beschreibt z' einen zu dem ersten orthogonalen Kreis, der seinen Mittelpunkt auf $z_1 z_2$ hat.

419. Wir sind jetzt in der Lage die Punkte z zu konstruieren, die mit drei gegebenen Punkten ein harmonisches oder ein äquianharmonisches Quadrupel bilden. Verlangt man zunächst, daß $(z z_1 z_2 z_3) = -1$ sei, so wissen wir bereits, daß z auf dem Kreise $z_1 z_2 z_3$ liegen muß. Andererseits seien O_1, O_2, O_3 die Schnittpunkte der Seiten des Dreiecks $z_1 z_2 z_3$ mit den Tangenten des umbeschriebenen Kreises in den gegenüberliegenden Ecken. Der durch z_1 hindurchgelegte Kreis mit dem Mittelpunkt O_1 ist in der Elementargeometrie als der zur Ecke z_1 gehörige Apollonische Kreis des Dreiecks $z_1 z_2 z_3$ bekannt. Da er augenscheinlich orthogonal zu dem Kreise $z_1 z_2 z_3$ ist, so ist er also der Ort der Punkte z, für welche der Modul von $(z z_1 z_2 z_3)$ den Wert bewahrt, den er für $z = z_1$ hat, d. h. 1. Mithin ist der gesuchte Punkt z nichts anderes als der andere Schnittpunkt z_1' der beiden Kreise. Dies ist der Punkt, den man als den harmonisch konjugierten von z_1 in Bezug auf $z_2 z_3$ bezeichnet. Ebenso treffen die beiden andern Apollonischen Kreise den Kreis $z_1 z_2 z_3$ außer in z_2 und z_3 noch in den harmonisch konjugierten z_2' und z_3' von z_2 und z_3 in Bezug auf $z_3 z_1$ und $z_1 z_2$. Da ferner nach einem wohlbekannten Satze O_1, O_2, O_3 auf einer Geraden liegen, so gehen die Geraden $z_1 z_1'$, $z_2 z_2'$, $z_3 z_3'$ durch einen Punkt. Diese Geraden sind nämlich die Polaren von O_1, O_2, O_3 in Bezug auf den Kreis $z_1 z_2 z_3$ und treffen sich daher in dem Pol der Geraden $O_1 O_2 O_3$, d. h. in dem Lemoineschen Punkte des Dreiecks $z_1 z_2 z_3$.

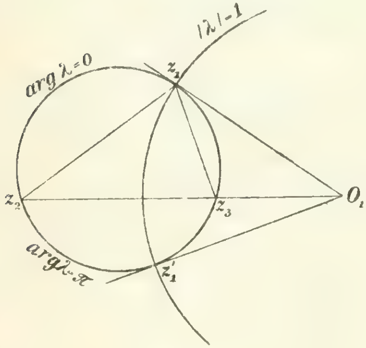

Fig. 19.

420. Wir suchen nunmehr an zweiter Stelle die Punkte z von der Beschaffenheit, daß $(z z_1 z_2 z_3)$ einen der Werte $-\omega$, $-\omega^2$ hat. Der

Punkt $z = \tau$, welcher den Wert des Doppelverhältnisses $(z z_1 z_2 z_3)$ gleich $-\omega$ macht, muß sich (wie es für jeden Wert von λ mit dem Modul 1 der Fall ist) auf dem ersten Apollonischen Kreise des Dreiecks $z_1 z_2 z_3$ befinden. Da nun nach bekannten Eigenschaften der kubischen Einheitswurzeln

$$(\tau z_1 z_2 z_3) = (\tau z_2 z_3 z_1) = (\tau z_3 z_1 z_2) = -\omega$$

ist, so muß der genannte Punkt auch auf den beiden andern Kreisen liegen. Ebenso ist der Punkt τ', für welchen man hat

$$(\tau' z_1 z_2 z_3) = (\tau' z_2 z_3 z_1) = (\tau' z_3 z_1 z_2) = -\omega^2$$

der zweite Schnittpunkt dieser Kreise, die sich also in nur zwei Punkten schneiden, was übrigens aus den Elementen der Geometrie wohlbekannt ist. Diese Punkte, welche viele interessante Eigenschaften[1]) haben, pflegt man die isodynamischen Zentra des Dreiecks $z_1 z_2 z_3$ zu nennen. Man beachte, daß die Dreiecke $z_1 z_2 z_3$ und $z_1' z_2' z_3'$ die Apollonischen Kreise und folglich die isodynamischen Zentra gemein haben. Überdies bestimmt jedes von diesen mit den Ecken des einen oder des andern Dreiecks ein solches Quadrupel, daß jeder Punkt isodynamisches Zentrum in dem von den drei andern gebildeten Dreieck ist. Bemerken wir schließlich, daß aus der Relation (9), angewandt auf den vorliegenden Fall, unmittelbar die Ausdrücke für τ und τ' sich ergeben:

$$\tau = -\frac{z_2 z_3 + \omega^2 z_3 z_1 + \omega z_1 z_2}{z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3}, \quad \tau' = -\frac{z_2 z_3 + \omega z_3 z_1 + \omega^2 z_1 z_2}{z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3}.$$

Inzwischen leitet man aus den Formeln (6), wenn man sich daran erinnert, daß $z_1 + z_2 + z_3 = 3\zeta_0$ ist, leicht ab

$$z_1 = \zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_2, \quad z_2 = \zeta_0 + \omega\zeta_1 + \omega^2\zeta_2, \quad z_3 = \zeta_0 + \omega^2\zeta_1 + \omega\zeta_2,$$

mithin

$$\tau = \zeta_0 - \frac{\zeta_2^2}{\zeta_1}, \quad \tau' = \zeta_0 - \frac{\zeta_1^2}{\zeta_2}.$$

Diese Relationen können zusammen mit (7) verschiedene interessante Resultate liefern, von denen wir nur folgendes angeben wollen: $(\zeta\zeta'\tau\tau') = -1$. Die Punkte ζ, ζ', τ, τ' gehören also einem Kreise an, auf dem die beiden ersten die beiden letzten harmonisch trennen.

Quaternionen.

421. Die Theorie der komplexen Zahlen, welche wir oben in der ihr von Argand gegebenen geometrischen Form entwickelt haben, ist zwar nicht mathematisch streng, aber doch diejenige, welche sich am leichtesten den Bedürfnissen des Unterrichts anschmiegt, während sie gleichzeitig wertvolle Hilfsmittel bietet sowohl für rein analytische

1) Neuberg: „Mémoire sur le tétraèdre" (Mém. de l'Académie de Belgique, 1884).

Untersuchungen als auch für das Studium der geometrischen Verhältnisse der Ebene. Es ist aber immer zu wünschen, daß eine Theorie der reinen Algebra sich in rein algebraischer Weise entwickeln lasse, und dies erreicht man leicht und mit aller Strenge, wenn man die komplexe Zahl $a + ib$ als ein Aggregat von zwei reellen Größen a und b verschiedener Art betrachtet. Man wird alsdann naturgemäß dazu geführt, allgemeiner einen heterogenen Komplex von Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ zu studieren, den man durch $a_0 + i_1 a_1 + i_2 a_2 + \cdots$ darstellen kann, wobei die Zeichen $i_1, i_2, i_3, \ldots$ nur zur Charakterisierung der verschiedenen Natur der a dienen sollen. Dieselben Symbole dienen auch zur kurzen Darstellung der Maßeinheit für jede Größenart, sodaß man also einfach i_r schreibt anstatt $i_r \,.\, 1$. Man muß aber immer darauf achten, daß nur in diesem Sinne die i als wirkliche Zahlen in den Rechnungen vorkommen. Die Gleichheit zwischen zwei komplexen Zahlen schließt diejenige der entsprechenden Bestandteile der beiden Zahlen ein, da die verschiedenen Einheiten als irreduzibel auf dem Wege der Addition vorausgesetzt werden. Und aus demselben Grunde schließt das Verschwinden von $a_0 + i_1 a_1 + i_2 a_2 + \cdots$ das Verschwinden von $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ein und umgekehrt. Für die so definierten komplexen Zahlen kann man leicht einen algebraischen Kalkül begründen, indem man sich von einem Prinzip leiten läßt, welches Hankel das Prinzip der Permanenz der Rechnungsregeln nennt. Was die Addition anbelangt, so geschieht dieselbe, in dem gewöhnlichen Sinne des Wortes aufgefaßt, natürlich durch Summierung der entsprechenden Teile der Zahlen, also:

$$a + b + \cdots = a_0 + b_0 + \cdots + i_1(a_1 + b_1 + \cdots) + i_2(a_2 + b_2 + \cdots) + \cdots.$$

Die Multiplikation dagegen hat gar keinen Sinn, und wir können ihr nach Belieben einen solchen beilegen, indem wir, soweit es möglich ist, das Prinzip der Permanenz befolgen. Wenn wir haben wollen, daß die Multiplikation von a und b sich wie in der gewöhnlichen Algebra vollziehen soll, so müssen wir vor allem die sogenannte associative Eigenschaft zu bewahren suchen, deren Fehlen die Rechnungen gründlich verwirren würde, und zu diesem Zweck wird es genügen anzunehmen, daß die Einheiten selbst die genannte Eigenschaft genießen, sodaß z. B. $(i_r i_s) i_t = i_r (i_s i_t), \ldots$ ist. Man kann aber nicht ebenso wie in der Theorie der gewöhnlichen komplexen Zahlen die kommutative Eigenschaft bewahren, und es wird daher nötig sein, z. B. $i_r i_s$ von $i_s i_r$ zu unterscheiden. Man muß jedoch beachten, daß die gewöhnliche Bedeutung der Multiplikation bestehen bleibt, und daß daher auch die gewöhnlichen Regeln für die Multiplikation von zwei Zahlen erfüllt sind, falls eine von ihnen reell ist. In diesem Falle hat man z. B.

$$ab = a_0 b + i_1 a_1 b + i_2 a_2 b + \cdots = ba.$$

422. Wir wollen hier die Quaternionen studieren, d. h. diejenigen komplexen Zahlen, welche aus der Vereinigung von vier verschiedenen Größenarten entstehen:

$$a = a_0 + i_1 a_1 + i_2 a_2 + i_3 a_3.$$

Damit die Rechnung mit diesen Zahlen als Spezialfall diejenige mit gewöhnlichen komplexen Zahlen enthalten könne, ist es nötig, daß eine von den Einheiten als Quadrat -1 habe, und diese Bedingung wird dann durch die Symmetrie auch den andern Einheiten auferlegt. Diese sind alle unter sich irreduzibel auf dem Wege der Addition. Will man aber haben, daß die Multiplikation mehrerer Quaternionen wieder eine Quaternion liefern soll, so muß man annehmen, daß das Produkt von mehreren Einheiten linear ausdrückbar durch die Einheiten sei. Zu diesem Zwecke werden wir nach dem Erfinder der Quaternionen[1]) folgende Gleichungen ansetzen:

$$(1) \qquad \begin{cases} i_1^2 = -1, & i_2 i_3 = -i_3 i_2 = i_1, \\ i_2^2 = -1, & i_3 i_1 = -i_1 i_3 = i_2, \\ i_3^2 = -1, & i_1 i_2 = -i_2 i_1 = i_3. \end{cases}$$

Sie verletzen offenbar die kommutative Eigenschaft der Multiplikation, lassen aber, wie man leicht sieht, ihre associative Eigenschaft unberührt. Es sind dies die einfachsten Voraussetzungen, die man machen kann, aber nicht die einzigen. Nichts steht zum Beispiel im Wege, die Quadrate der Einheiten gleich Null zu setzen, und man erhält dann einen besonderen algebraischen Kalkül, in welchem zum Verschwinden eines Produktes nicht mehr das Verschwinden eines Faktors erforderlich ist. Dieser Kalkül, der sogenannte Kalkül der alternierenden Zahlen, gestattet überdies die Theorie der Determinanten in äußerst einfacher Weise zu entwickeln, da eine Determinante n-ter Ordnung sich sofort als das Produkt von n komplexen Zahlen darbietet. Grassmann verdankt man diese alternierenden Zahlen, wie viele andere kühne und weittragende Begriffe, die er zur Grundlage seiner „Ausdehnungslehre" machte[2]).

423. Definitionen. Wenn $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$ ist, so reduziert sich die Quaternion auf die reelle Zahl a_0 und heißt ein Skalar. Wenn dagegen $a_0 = 0$ ist, so nennt man die Quaternion einen Vektor. Jede Quaternion a besteht also aus einem skalaren Teil, den man mit $\mathfrak{S}a$ bezeichnet, und aus einem vektoriellen Teil, den man mit $\mathfrak{V}a$ bezeichnet:

$$a = \mathfrak{S}a + \mathfrak{V}a.$$

---

1) Hamilton: „Elements of Quaternions" (London 1866). Siehe die Lehrbücher von Tait, Hoüel, Laisant.

2) „Ausdehnungslehre" (Stettin 1862). Siehe auch Peano: „Calcolo geometrico" (Torino 1888).

Modul oder Tensor genannt und mit $|a|$ oder $\mathfrak{T}a$ bezeichnet wird die Zahl $\sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, die immer reell und positiv ist. Wenn der Modul 1 ist, so heißt die Quaternion eine Einheitsquaternion. Jede Quaternion a ist gleich dem Produkt ihres Moduls mit einer Einheitsquaternion, welche man den Versor von a nennt und mit $\mathfrak{U}a$ bezeichnet:

$$\mathfrak{U}a = \frac{a_0}{|a|} + i_1 \frac{a_1}{|a|} + i_2 \frac{a_2}{|a|} + i_3 \frac{a_3}{|a|}.$$

Der Versor des vektoriellen Teiles von a ist ein Einheitsvektor, und man nennt ihn die Achse der Quaternion. Wenn A der Modul von a ist, so kann man offenbar setzen:

$$a_0 = A \cos\theta, \quad \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = A \sin\theta,$$

und der so definierte Winkel θ ist das Argument der Quaternion. Wird die Achse $\mathfrak{U}\mathfrak{V}a$ kurz mit λ bezeichnet, so hat man

$$\mathfrak{S}a = A\cos\theta, \quad \mathfrak{V}a = \lambda A \sin\theta.$$

Daraus folgt, daß man der Quaternion immer die Form geben kann

$$a = A(\cos\theta + \lambda \sin\theta),$$

wo A, θ, λ der Modul, das Argument und die Achse sind. Die Quaternion $A(\cos\theta - \lambda\sin\theta)$ heißt zu a konjugiert und wird mit $\bar{a}$ oder $\mathfrak{K}a$ bezeichnet. Zwei konjugierte Quaternionen unterscheiden sich nur im Vorzeichen des vektoriellen Teils.

424. Geometrische Darstellung. Der Vektor $i_1 a_1 + i_2 a_2 + i_3 a_3$ wird geometrisch dargestellt durch eine gerade Strecke, deren Projektionen auf drei orthogonale Achsen die Strecken a_1, a_2, a_3 sind. Insbesondere stellt jeder Radius einer Kugel mit dem Mittelpunkt im Anfangspunkt und dem Radius 1 einen Einheitsvektor dar. Wir können aber auf der Oberfläche der Kugel jede Einheitsquaternion darstellen. In der Tat ist jeder Einheitsvektor λ bestimmt durch den Punkt P, den Endpunkt des ihn darstellenden Radius, und zwei diametral gegenüberliegende Punkte auf der Kugel sind die Bilder von zwei konjugierten Vektoren. Ist nun ein Versor von der Achse λ und dem Argument θ gegeben, so können wir ihn auf dem größten Kreise darstellen, der seinen Pol in P hat, indem wir auf ihm von einem beliebigen Anfangspunkte aus einen Bogen θ auftragen in

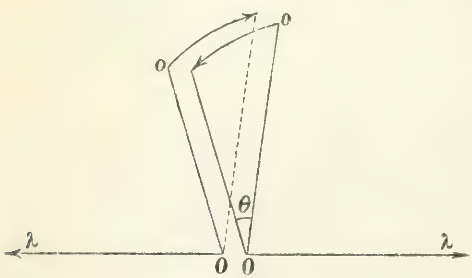

Fig. 20.

einem gewissen Sinne oder in dem entgegengesetzten, je nachdem θ positiv oder negativ ist. Man kommt überein, daß der Sinn der positiven θ dem der Bewegung eines Uhrzeigers entgegengesetzt sein soll für einen in P befindlichen Beobachter. Ein bestimmter Bogen stellt, je nachdem er in dem einen oder dem entgegengesetzten Sinne aufgetragen wird, immer zwei konjugierte Versoren dar, da die Verwandlung von λ in $-\lambda$ mit der Verwandlung von θ in $-\theta$ gleichbedeutend ist.

425. Addition der Vektoren. Die Addition der Vektoren

$$a = i_1 a_1 + i_2 a_2 + i_3 a_3, \quad b = i_1 b_1 + i_2 b_2 + i_3 b_3, \ \ldots \tag{2}$$

vollzieht sich, wie oben gesagt worden ist, sofort, indem man schreibt

$$a + b + \cdots = i_1 (a_1 + b_1 + \cdots) + i_2 (a_2 + b_2 + \cdots) + i_3 (a_3 + b_3 + \cdots),$$

sodaß die Summe von mehreren Vektoren gleich demjenigen Vektor ist, den man erhält, wenn man eine polygonale Linie konstruiert, deren Seiten den gegebenen Vektoren gleich und parallel sind, und dieselbe dann schließt. Diese Konstruktion zeigt deutlich, daß der Modul einer Summe von mehreren Vektoren die Summe der Moduln dieser Vektoren nicht übertrifft.

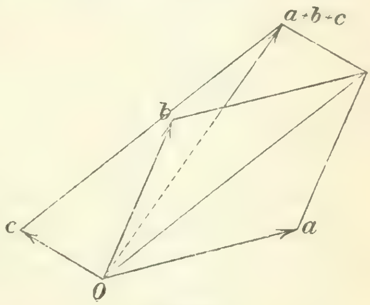

Fig 21

426. Multiplikation der Vektoren. Man multipliziere nach den gewöhnlichen Regeln die Vektoren (2), indem man die Relationen (1) berücksichtigt und darauf achtet, daß man die Reihenfolge der Faktoren nicht ändert. Man erhält

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{S}ab &= -(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3), \\ \mathcal{V}ab &= i_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + i_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) + i_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1) \end{aligned}\right. \tag{3}$$

und erkennt, daß

$$\mathcal{S}ba = \mathcal{S}ab, \quad \mathcal{V}ba = -\mathcal{V}ab,$$

ist. Insbesondere ist $\mathcal{V}(a^2) = -\mathcal{V}(a^2) = 0$, mithin

$$a^2 = \mathcal{S}(a^2) = -(a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2) = -\ a^2.$$

Noch spezieller ist das Quadrat eines Einheitsvektors gleich -1. Zum Schluß wollen wir die Formeln notieren

$$\mathcal{S}ab = \tfrac{1}{2}(ab + ba), \quad \mathcal{V}ab = \tfrac{1}{2}(ab - ba),$$

welche bei den Rechnungen oft von Nutzen sind.

427. Man erhält leicht die geometrische Interpretation des Produktes von zwei Vektoren. Es seien A und B die Moduln dieser Vektoren, θ der Winkel zwischen ihnen und

$$i_1\alpha_1 + i_2\alpha_2 + i_3\alpha_3, \quad i_1\beta_1 + i_2\beta_2 + i_3\beta_3$$

ihre Einheitsvektoren. Aus der analytischen Geometrie ist bekannt, daß

$$\cos\theta = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$$

ist. Mithin ist

$$\mathcal{S}ab = -AB\cos\theta.$$

Der skalare Teil des Produktes zweier Vektoren ergibt sich also durch Multiplikation der Projektion des einen von ihnen auf die Verlängerung des andern mit dem Modul dieses letzteren. Ist ferner $i_1\gamma_1 + i_2\gamma_2 + i_3\gamma_3$ der Einheitsvektor λ, welcher auf der Kugel durch den Pol des vom Punkte a nach dem Punkte b hinführenden größten Kreises dargestellt wird, so ist ebenfalls aus der analytischen Geometrie bekannt, daß man hat

$$\frac{\gamma_1}{\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2} = \frac{\gamma_2}{\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3} = \frac{\gamma_3}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1} = -\frac{1}{\sin\theta}.$$

Mithin ist

$$\mathcal{V}ab = -AB(i_1\gamma_1 + i_2\gamma_2 + i_3\gamma_3)\sin\theta = -AB\lambda\sin\theta.$$

Man erhält also den vektoriellen Teil des Produktes des Vektors a mit dem Vektor b, indem man auf dem zu λ konjugierten Vektor eine Länge aufträgt, deren Maßzahl dieselbe ist, wie die der Fläche des Parallelogramms, das über den Seiten a und b konstruiert ist. Man hat also

$$ab = -AB(\cos\theta + \lambda\sin\theta)$$

mit $\lambda^2 = -1$, und diese Relation erhält eine unmittelbare Interpretation auf der Kugelfläche. Man beachte, daß der Parallelismus der Faktoren notwendig und hinreichend ist, damit das Produkt skalar werde, während ihre Orthogonalität notwendig und hinreichend ist, damit das Produkt ein Vektor werde.

428. Multiplikation der Quaternionen. Es sei zu multiplizieren

$$a = \mathcal{S}a + \mathcal{V}a \text{ mit } b = \mathcal{S}b + \mathcal{V}b.$$

Man hat

$$ab = \mathcal{S}a\cdot\mathcal{S}b + \mathcal{S}a\cdot\mathcal{V}b + \mathcal{V}a\cdot\mathcal{S}b + \mathcal{V}a\cdot\mathcal{V}b,$$

ferner, wenn man beachtet, daß $\mathcal{S}\mathcal{V}x = \mathcal{V}\mathcal{S}x = 0$ ist,

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathcal{S}ab = \mathcal{S}a\cdot\mathcal{S}b + \mathcal{S}(\mathcal{V}a\cdot\mathcal{V}b), \\ \mathcal{V}ab = \mathcal{V}(a\mathcal{S}b + b\mathcal{S}a) + \mathcal{V}(\mathcal{V}a\cdot\mathcal{V}b). \end{cases}$$

Andererseits erhält man durch Anwendung der Formeln (3) auf die Vektoren $\mathcal{V}a$ und $\mathcal{V}b$

$$\mathcal{S}(\mathcal{V}a \cdot \mathcal{V}b) = -(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3),$$
$$\mathcal{V}(\mathcal{V}a \cdot \mathcal{V}b) = i_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + i_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) + i_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Es wird also

$$\begin{aligned}\mathcal{S}ab &= a_0 b_0 - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3),\\ \mathcal{V}ab &= i_1 [(a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_2 b_3 - a_3 b_2)]\\ &\quad + i_2 [(a_0 b_2 + a_2 b_0) + (a_3 b_1 - a_1 b_3)]\\ &\quad + i_3 [(a_0 b_3 + a_3 b_0) + (a_1 b_2 - a_2 b_1)].\end{aligned}$$

Man sieht sofort, daß

$$\mathcal{S}ab = \mathcal{S}ba, \quad \mathcal{V}ab \neq \mathcal{V}ba$$

ist. Im allgemeinen hängt also der Wert eines Produktes von der Reihenfolge der Faktoren ab. Damit ab gleich ba sei, ist notwendig und hinreichend, daß $\mathcal{V}a \cdot \mathcal{V}b$ skalar ist, d. h. daß die vektoriellen Teile von a und von b dieselbe Richtung oder entgegengesetzte Richtungen haben. Weiter unten werden wir die Multiplikation der Quaternionen auf der Kugel interpretieren.

429. Bemerkungen. a) Das Produkt von zwei konjugierten Quaternionen ist gleich dem Quadrat des gemeinsamen Moduls. In der Tat ist

$$\begin{aligned}a \cdot \bar{a} &= (\mathcal{S}a + \mathcal{V}a)(\mathcal{S}a - \mathcal{V}a) = (\mathcal{S}a)^2 - (\mathcal{V}a)^2\\ &= a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |a|^2.\end{aligned}$$

b) Die konjugierte von dem Produkt zweier Quaternionen ist gleich dem Produkt der konjugierten dieser Quaternionen, geschrieben in umgekehrter Reihenfolge. Beachtet man in der Tat, daß nach der Definition

$$\mathcal{S}\bar{a} = \mathcal{S}a, \quad \mathcal{V}\bar{a} = -\mathcal{V}a$$

ist, so liefern die Formeln (5)

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\bar{a} \cdot \bar{b}) &= \mathcal{S}a \cdot \mathcal{S}b + \mathcal{S}(\mathcal{V}a \cdot \mathcal{V}b) = \mathcal{S}ab = \mathcal{S}ba,\\ \mathcal{V}(\bar{a} \cdot \bar{b}) &= \mathcal{V}(\bar{a}\mathcal{S}b + \bar{b}\mathcal{S}a) + \mathcal{V}(\mathcal{V}a \cdot \mathcal{V}b)\\ &= -\mathcal{V}(a\mathcal{S}b + b\mathcal{S}a) - \mathcal{V}(\mathcal{V}b \cdot \mathcal{V}a) = -\mathcal{V}ba,\end{aligned}$$

mithin

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \mathcal{S}ba - \mathcal{V}ba = \overline{ba}.$$

c) Der Modul eines Produktes ist gleich dem Produkt der Moduln der Faktoren. In der Tat ist nach den vorigen Bemerkungen

$$|ab|^2 = ab \cdot \overline{ab} = a \cdot b\bar{b} \cdot \bar{a} = a\bar{a} \cdot |b|^2 = |a|^2 \cdot |b|^2,$$

mithin $|ab| = |a| \cdot |b|$. Aus diesem Satze läßt sich, wenn man bemerkt, daß zum Verschwinden einer Quaternion das Verschwinden ihres Moduls notwendig und hinreichend ist, sofort folgern (vgl. § 391), daß zum Verschwinden eines Produktes von Quaternionen das Verschwinden eines Faktors notwendig und hinreichend ist.

430. Division der Quaternionen. Man nennt invers zu a und bezeichnet mit $\frac{1}{a}$ diejenige Quaternion, welche mit a multipliziert 1 giebt. Eine solche Zahl existiert, und zwar ist

$$\frac{1}{a} = \frac{\bar{a}}{|a|^2}.$$

In der Tat ist nach der ersten der drei obigen Bemerkungen

$$\frac{1}{a} \cdot a = \frac{a\bar{a}}{|a|^2} = 1.$$

Dies vorausgeschickt heißt Quotient von b durch a und wird mit $\frac{b}{a}$ bezeichnet diejenige Zahl, mit welcher man a multiplizieren muß, um b zu erhalten. Diese Zahl ist

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{a} \cdot b, \quad \text{da} \quad a \cdot \frac{1}{a}\, b = \left(a \cdot \frac{1}{a}\right) b = b$$

ist. Man nehme insbesondere an, daß a und b zwei Vektoren seien mit den Moduln A und B. Dann hat man

$$\frac{1}{a}\, b = \frac{\bar{a}}{A^2}\, b = -\frac{ab}{A^2},$$

mithin (§ 427)

$$\frac{b}{a} = \frac{B}{A}(\cos\theta + \lambda \sin\theta).$$

431. Die letzte Formel liefert sofort die geometrische Interpretation der Multiplikation der Versoren. Wenn a und b zwei Einheitsvektoren sind, so sieht man, daß der Versor $\cos\theta + \lambda \sin\theta$ gerade gleich dem Quotienten von b durch a ist, wenn man annimmt, daß der darstellende Bogen auf der Kugel in dem Sinne ab verläuft. Um nunmehr zwei Versoren zu multiplizieren, verschiebe man ihre darstellenden Bogen auf den bezüglichen größten Kreisen, bis sie in einem Punkt zusammentreffen, der der Anfangspunkt des einen und der Endpunkt des andern Bogens ist. Der Bogen, welcher vom Anfangspunkt des zweiten Bogens nach dem Endpunkt des ersten führt, stellt den Produktversor dar. Wir haben in der Tat ein sphärisches Dreieck konstruiert, dessen Ecken

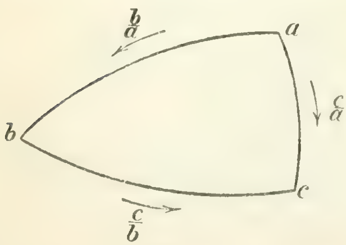

Fig. 22.

drei Einheitsvektoren a, b, c darstellen, während zwei Seiten die beiden gegebenen Versoren darstellen, die bezüglich gleich $\frac{b}{a}$ und $\frac{c}{b}$ sind. Die dritte Seite stellt den Quotienten von c durch a dar und ist gleich dem Produktversor der beiden ersten, da

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} = \frac{1}{a}\left(b \cdot \frac{1}{b}\right) c = \frac{1}{a} c = \frac{c}{a}$$

ist. Die Multiplikation der Versoren vollzieht sich also auf der Kugelfläche so wie die Addition der Vektoren in der Ebene (§ 389). Zu diesem Resultat kann man auch auf rein trigonometrischem Wege gelangen. Umgekehrt ist es leicht, aus dem soeben erhaltenen Resultate die Fundamentalformeln der sphärischen Trigonometrie abzuleiten[1]).

432. Produkt von drei Vektoren. Wir wollen die Resultate des § 428 zur Aufsuchung des Produktes von drei Vektoren a, b, c anwenden. Zunächst ist

$$abc = a\mathcal{S}bc + a\mathcal{V}bc,$$

mithin

$$\mathcal{S}abc = \mathcal{S}(a\mathcal{V}bc), \quad \mathcal{V}abc = a\mathcal{S}bc + \mathcal{V}(a\mathcal{V}bc).$$

Aus § 426 ergibt sich, daß der skalare Bestandteil des Produktes der Vektoren a und $\mathcal{V}bc$ gleich

$$-a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_3c_1 - b_1c_3) - a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

ist. Mithin ist

$$\mathcal{S}abc = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Wir sehen auf diese Weise, daß, abgesehen vom Vorzeichen, der skalare Teil des Produktes von drei Vektoren das Volumen des über diesen Vektoren konstruierten Parallelepipeds darstellt. Daraus folgt, daß das Produkt von drei Vektoren nur dann ein Vektor ist, wenn die Faktoren in einer und derselben Ebene gegeben sind. Was den vektoriellen Bestandteil anbetrifft, so erhält man bei Anwendung der Formeln (4)

$$\begin{aligned} 2\mathcal{V}abc &= 2a\mathcal{S}bc + a\mathcal{V}bc - \mathcal{V}(bc) \cdot a \\ &= a(\mathcal{S}bc + \mathcal{V}bc) + (\mathcal{S}bc - \mathcal{V}bc)a = abc + cba \end{aligned}$$

und weiter

$$2\mathcal{V}abc = a(bc + cb) - (ac + ca)b + c(ba + ab)$$

oder, wenn man wieder auf die Formeln (4) zurückgreift,

$$\mathcal{V}abc = a\mathcal{S}bc - b\mathcal{S}ca + c\mathcal{S}ab. \tag{6}$$

1) Siehe Hoüel: „Théorie élémentaire des quantités complexes" (p. 482).

433. Aus der letzten Formel läßt sich leicht eine andere ableiten, die man in der Quaternionenrechnung häufig braucht. Versuchen wir den vektoriellen Teil des Produktes von $\mathfrak{V}ab$ mit $\mathfrak{V}cd$ auszudrücken unter der Annahme, daß a, b, c, d Vektoren sind. Offenbar ist

$$\mathfrak{V}abc = \mathfrak{V}[\mathfrak{S}(ab)\cdot c + \mathfrak{V}(ab)\cdot c] = c\mathfrak{S}ab + \mathfrak{V}[\mathfrak{V}(ab)\cdot c],$$

mithin wird die Formel (6)

$$\mathfrak{V}[\mathfrak{V}(ab)\cdot c] = a\mathfrak{S}bc - b\mathfrak{S}ca. \tag{7}$$

Nun beachte man, daß

$$\mathfrak{S}bcd = \mathfrak{S}(b\mathfrak{S}cd + b\mathfrak{V}cd) = \mathfrak{S}(b\mathfrak{V}cd)$$

ist. Verwandelt man also in der Relation (7) c in $\mathfrak{V}cd$, so kommt

$$\mathfrak{V}(\mathfrak{V}ab\cdot\mathfrak{V}cd) = a\mathfrak{S}bcd - b\mathfrak{S}acd.$$

434. Formel von Moivre. Die teilweise Analogie der Quaternionen mit den gewöhnlichen komplexen Zahlen tritt deutlich hervor, wenn man nach Fixierung des Einheitsvektors λ nur die Quaternionen betrachtet, die λ als Achse haben. Alsdann gelten alle gewöhnlichen Rechnungsregeln, und man hat z. B.

$$(\cos\theta + \lambda\sin\theta)(\cos\theta' + \lambda\sin\theta')(\cos\theta'' + \lambda\sin\theta'')\ldots$$
$$= \cos(\theta + \theta' + \theta'' + \cdots) + \lambda\sin(\theta + \theta' + \theta'' + \cdots).$$

Insbesondere ist für ganzes positives n

$$(\cos\theta + \lambda\sin\theta)^n = \cos n\theta + \lambda\sin n\theta.$$

Es ist ferner leicht, dieses Resultat in der bekannten Weise (§ 393) auf den Fall eines beliebigen n auszudehnen.

435. Theorem von Hamilton. Der Vektor u wird, wenn er sich um die Achse λ um θ dreht, $\tau^{-\frac{1}{2}}u\tau^{\frac{1}{2}}$, wo τ den Versor $\cos\theta + \lambda\sin\theta$ darstellt.

Es seien a und b die Vektoren, welche man durch Projektion von u auf die Achse λ und auf die zu λ senkrechte Ebene erhält, sodaß $u = a + b$ ist. Wenn die Ebene der Vektoren λ und u sich um θ um die Achse λ dreht, so bleibt der Vektor a ungeändert, während der Vektor b in $b\tau$ übergeht (§ 430). Also bringt die Drehung u mit dem Vektor $v = a + b\tau$ zur Deckung. Es handelt sich darum a und b als Funktionen von u, λ, θ zu berechnen. Da $\lambda^2 = -1$ ist, so hat man identisch

$$u = -\lambda^2 u = -\lambda\mathfrak{S}\lambda u - \lambda\mathfrak{V}\lambda u.$$

Wir haben in § 427 gesehen, daß die Projektion von u auf λ gleich $-\mathfrak{S}\lambda u$ ist, und diese Zahl stellt daher den Modul des Vektors a

dar. Da ferner λ der Versor von a ist, so kann man schreiben $a = -\lambda\mathfrak{S}\lambda u$, mithin

$$b = u - a = -\lambda^2 u + \lambda\mathfrak{S}\lambda u = -\lambda\mathfrak{V}\lambda u.$$

Endlich wird

$$v = -\lambda\mathfrak{S}\lambda u - \lambda\mathfrak{V}(\lambda u)\cdot\tau.$$

Um diesem Resultat die elegante von Hamilton herrührende Form zu geben, schreibe man

$$v = -\lambda\left[\mathfrak{S}(\lambda u)\,\tau^{-\frac{1}{2}} + \mathfrak{V}(\lambda u)\,\tau^{\frac{1}{2}}\right]\tau^{\frac{1}{2}}$$

und beachte, daß nach der Formel von Moivre

$$\tau^{-\frac{1}{2}} = \cos\frac{\theta}{2} - \lambda\sin\frac{\theta}{2}, \quad \tau^{\frac{1}{2}} = \cos\frac{\theta}{2} + \lambda\sin\frac{\theta}{2}$$

ist. Daraus folgt

$$\mathfrak{S}(\lambda u)\,\tau^{-\frac{1}{2}} + \mathfrak{V}(\lambda u)\,\tau^{\frac{1}{2}} = (\mathfrak{S}\lambda u + \mathfrak{V}\lambda u)\cos\frac{\theta}{2} - (\mathfrak{S}\lambda u - \mathfrak{V}\lambda u)\,\lambda\sin\frac{\theta}{2}$$

$$= \lambda u\cos\frac{\theta}{2} - u\lambda^2\sin\frac{\theta}{2} = \lambda u\cos\frac{\theta}{2} + u\sin\frac{\theta}{2} = \left(\lambda\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right)u$$

$$= \lambda\left(\cos\frac{\theta}{2} - \lambda\sin\frac{\theta}{2}\right)u = \lambda\tau^{\frac{1}{2}}u.$$

Also ist

$$v = -\lambda^2\tau^{-\frac{1}{2}}u\tau^{\frac{1}{2}} = \tau^{-\frac{1}{2}}u\tau^{\frac{1}{2}}.$$

Diese äußerst einfache Relation enthält in sich die in § 75 bewiesenen Eulerschen Formeln. Sie bietet also ein bemerkenswertes Beispiel der außerordentlichen Kürze, welche die Methode von Hamilton in gewisse Rechnungen einzuführen erlaubt.

Fünftes Buch.

Algebraische Gleichungen.

Existenz und Zählung der Wurzeln.

Elimination.

436. Um uns auf das Studium der Wurzeln der algebraischen Funktionen vorzubereiten, ist es zweckmäßig einige kurze Betrachtungen über die Elimination voranzuschicken. Unter den unendlich vielen Gleichungen, welche notwendige Folgen eines gegebenen Systems sind, kann es möglicherweise gelingen, eine zu finden, die eine bestimmte Veränderliche nicht enthält. Man sagt alsdann, dieselbe sei eliminiert. Sind z. B. die Gleichungen $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ gegeben und ist es gelungen aus ihnen als notwendig die Gleichung $\mathfrak{R} = 0$ herzuleiten, die von x unabhängig ist, so ist die Elimination von x ausgeführt. Es liegt auf der Hand, daß die erhaltene Gleichung eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Wertes von x ist, der die Funktionen f und g gleichzeitig zum Verschwinden bringt. Verhält es sich ferner so, daß die genannte Bedingung auch hinreichend ist, so nennt man $\mathfrak{R}$ die Resultante dieser Funktionen. Man bezeichnet also als Resultante von zwei Funktionen von x einen Ausdruck, der von x unabhängig ist, und dessen Verschwinden notwendig und hinreichend ist, damit die betrachteten Funktionen wenigstens eine gemeinsame Wurzel zulassen.

437. Beispiele. Es seien gegeben die Gleichungen

$$a_0 x + a_1 = 0, \quad b_0 x + b_1 = 0.$$

Multipliziert man die erste mit b_0, die zweite mit a_0 und subtrahiert dann, so erhält man $c_{01} = 0$, wenn man allgemein zur Abkürzung setzt $c_{ij} = a_i b_j - a_j b_i$. Ebenso multipliziere man, wenn die Gleichungen

$$a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0, \quad b_0 x^2 + b_1 x + b_2 = 0$$

gegeben sind, einmal mit b_0 und a_0 und ein anderes Mal mit b_2 und a_2 beziehungsweise. Man erhält dann durch Subtraktion

$$c_{01}x + c_{02} = 0\,, \quad c_{02}x + c_{12} = 0$$

und daraus unter Benutzung des vorigen Resultates $c_{01}c_{12} - c_{02}{}^2 = 0$ oder

$$(a_0b_1 - a_1b_0)(a_1b_2 - a_2b_1) - (a_0b_2 - a_2b_0)^2 = 0.$$

Verfährt man in analoger Weise mit den Gleichungen

(1) $\quad a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0\,, \quad b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3 = 0\,,$

so erhält man zunächst die Gleichungen

$$c_{01}x^2 + c_{02}x + c_{03} = 0\,, \quad c_{03}x^2 + c_{13}x + c_{23} = 0$$

und leitet dann nach dem obigen daraus die Bedingung ab

$$(c_{01}c_{31} + c_{02}c_{03})(c_{02}c_{23} + c_{03}c_{31}) + (c_{01}c_{23} - c_{03}{}^2)^2 = 0.$$

Man entwickele die linke Seite, indem man auf die Identität

$$c_{01}c_{23} + c_{02}c_{31} + c_{03}c_{12} = 0$$

Rücksicht nimmt, die eine unmittelbare Übertragung der folgenden andern ist:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Dann erhält man

(2) $\quad c_{03}(c_{03}{}^3 - 2\,c_{01}c_{03}c_{23} + c_{02}c_{03}c_{31} + c_{01}c_{31}{}^2 + c_{23}c_{02}{}^2 - c_{01}c_{12}c_{23}) = 0.$

Jede von den drei gefundenen Bedingungen ist sicher *notwendig* für das Zusammenbestehen des betreffenden Paares von Gleichungen. Während man aber leicht direkt erkennen kann, daß die beiden ersten auch *hinreichend* sind, kann man dies von der Bedingung (2) nicht behaupten. Sie ist in der Tat erfüllt, wenn $\frac{a_0}{a_3} = \frac{b_0}{b_3}$ ist, und es liegt auf der Hand, daß dies nicht genügt, damit die Gleichungen (1) eine gemeinsame Wurzel zulassen. Die ausgeführten Rechnungen haben anstatt zu der wahren Resultante zu führen einen fremdartigen Faktor hineingebracht. Wir werden nämlich sehen, daß die Resultante der Gleichungen (1) zwar nicht die linke Seite von (2) ist, wohl aber diese linke Seite, befreit von dem Faktor c_{03}.

438. Das letzte Beispiel dient dazu die Notwendigkeit von Methoden zu zeigen, die es erlauben die Elimination derart auszuführen, daß man mit Sicherheit zu der Resultante gelangt. Da ferner solche Methoden benutzt werden sollen, um die Existenz der Wurzeln der algebraischen Funktionen zu beweisen, so ist es unerläßlich, sich wenigstens eine zu verschaffen, welche die Voraussetzung dieser Existenz nicht einschließt. Mit Rücksicht hierauf werden wir, indem wir uns von jetzt ab auf die Betrachtung der ganzen Funktionen

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n, \quad g(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m$$

beschränken, als Resultante der Polynome f und g eine Funktion der Koeffizienten bezeichnen von der Beschaffenheit, daß ihr Verschwinden notwendig und hinreichend ist, damit die genannten Polynome einen gemeinsamen Teiler zulassen[1]) oder, wie man zu sagen pflegt, nicht relativ prim seien. Es bleibt uns dann noch übrig zu zeigen (§ 450, a), daß diese provisorische Definition, die allein wir im folgenden Paragraphen benutzen werden, mit der am Schlusse des § 436 gegebenen gleichbedeutend ist.

439. Methode von Euler. a) Wenn die Polynome f und g beide den Teiler δ zulassen, wenn also zwei andere Polynome f_1 und g_1 existieren, deren Grade bezüglich kleiner sind als die von f und g, und die so beschaffen sind, daß $f = f_1 \delta$, $g = g_1 \delta$ ist, so hat man

$$(3) \qquad f g_1 - g f_1 = 0.$$

Ist umgekehrt diese Bedingung identisch erfüllt, und bezeichnet man mit $\mathfrak{D}$ den größten gemeinsamen Teiler von f_1 und g_1 (wobei $\mathfrak{D} = 1$ angenommen wird, wenn f_1 prim zu g_1 ist), so hat man $f_1 = f_2 \mathfrak{D}$, $g_1 = g_2 \mathfrak{D}$, und f_2 und g_2 sind relativ prim. Die Relation (3) geht über in $f g_2 = g f_2$. Nun ist f_2, welches $f g_2$ teilt und zu g_2 prim ist, in f enthalten, sodaß $f = f_2 \delta$ ist, wo δ ein Polynom bedeutet, dessen Grad mindestens gleich der Einheit ist, da der Grad von f_2 den von f_1 nicht übertrifft und daher kleiner ist als der von f. Setzt man in der Gleichung $f g_2 = g f_2$ statt f ein $f_2 \delta$, so erhält man noch $g = g_2 \delta$. Also haben f und g den gemeinsamen Teiler δ.

b) Aus dem Obigen folgt, daß die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Polynome f und g nicht relativ prim sind, zusammenfällt mit der notwendigen und hinreichenden Bedingung für die Möglichkeit, die Polynome

$$f_1 = \alpha_0 x^{n-1} + \alpha_1 x^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1}, \quad g_1 = \beta_0 x^{m-1} + \beta_1 x^{m-2} + \cdots + \beta_{m-1}$$

derart zu bestimmen, daß die Identität (3) besteht, daß man also hat

$$(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n)(\beta_0 x^{m-1} + \beta_1 x^{m-2} + \cdots + \beta_{m-1})$$
$$= (b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m)(\alpha_0 x^{n-1} + \alpha_1 x^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1}).$$

Setzt man die Koeffizienten derselben Potenzen von x einander gleich, so erhält man das System

---

1) Wir nehmen an, daß die Theorie der algebraischen Teilbarkeit in den Elementen bereits entwickelt ist. Siehe den „Corso di Analisi algebrica“ von Capelli und Garbieri (VI, § 2, 3) oder den „Cours d'Algèbre supérieure“ von Mansion (Gand, 1889, lit. p. 15).

$$\begin{cases} a_0\beta_0 & - b_0\alpha_0 & = 0, \\ a_1\beta_0 + a_0\beta_1 & - b_1\alpha_0 - b_0\alpha_1 & = 0, \\ a_2\beta_0 + a_1\beta_1 + a_0\beta_2 & - b_2\alpha_0 - b_1\alpha_1 - b_0\alpha_2 & = 0, \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{cases}$$

von $n + m$ linearen und homogenen Gleichungen in den $n + m$ Unbekannten $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \beta_0, \beta_1, \ldots$ Damit sich für diese Koeffizienten Werte finden lassen, die nicht alle verschwinden, ist (§ 56) notwendig und hinreichend, daß die Determinante des Systems null ist. Diese kann man auch, indem man die Vertikal- zu Horizontalreihen macht und vom Vorzeichen absieht, in folgender Weise schreiben[1]):

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_m \end{vmatrix}.$$

Sie ist also die gesuchte Resultante.

440. Zu derselben Form der Resultante gelangte Sylvester in anderer Weise. Man betrachte z. B. zwei Gleichungen, eine vom dritten und eine andere vom zweiten Grade:

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0, \quad b_0 x^2 + b_1 x + b_2 = 0.$$

Multipliziert man die erste mit x, die zweite mit x und x^2, so erhält man das System

$$\begin{cases} a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x & = 0, \\ \qquad a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 & = 0, \\ b_0 x^4 + b_1 x^3 + b_2 x^2 & = 0, \\ \qquad b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x & = 0, \\ \qquad\qquad b_0 x^2 + b_1 x + b_2 & = 0, \end{cases}$$

welches man betrachten kann als bestehend aus fünf linearen und homogenen Gleichungen in fünf Veränderlichen, deren Werte sich dann als proportional zu den Zahlen x^4, x^3, x^2, x, 1 erweisen müssen für einen passenden Wert von x. Die gesuchte Resultante im Sinne des § 436 ist also

1) Über Determinanten von dieser Form siehe § XI der „Teoria dei determinanti" von Trudi.

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

da ihr Verschwinden offenbar notwendig und, wie wir im folgenden sehen werden, auch hinreichend ist für das Zusammenbestehen der gegebenen Gleichungen.

441. Methode von Bézout. a) Es sei zunächst $n = m$. Man betrachte überdies, um einen bestimmten Fall vor sich zu haben, zwei Gleichungen vom vierten Grade:

$$a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0,$$
$$b_0 x^4 + b_1 x^3 + b_2 x^2 + b_3 x + b_4 = 0.$$

Multipliziert man die erste mit b_0, die zweite mit a_0 und subtrahiert dann, so erhält man

$$c_{01} x^3 + c_{02} x^2 + c_{03} x + c_{04} = 0.$$

Multipliziert man dagegen die erste mit $b_0 x + b_1$, die zweite mit $a_0 x + a_1$, so erhält man

$$c_{02} x^3 + (c_{03} + c_{12}) x^2 + (c_{04} + c_{13}) x + c_{14} = 0.$$

Ebenso ergeben sich, wenn man die erste Gleichung mit $b_0 x^2 + b_1 x + b_2$ und die zweite mit $a_0 x^2 + a_1 x + a_2$, ferner die erste mit $b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3$ und die zweite mit $a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$ multipliziert, durch Subtraktion die Gleichungen

$$c_{03} x^3 + (c_{04} + c_{13}) x^2 + (c_{14} + c_{23}) x + c_{24} = 0,$$
$$c_{04} x^3 + c_{14} x^2 + c_{24} x + c_{34} = 0.$$

Man stellt auf diese Weise ein System von vier Gleichungen her, welche man als linear und homogen betrachten kann und als erfüllt von Werten der Unbekannten, die proportional zu den Zahlen x^3, x^2, x, 1 sind. Die Determinante des Systems ist (nach dem, was wir am Schlusse des folgenden Paragraphen sagen werden) die gesuchte Resultante:

$$\begin{vmatrix} c_{01} & c_{02} & c_{03} & c_{04} \\ c_{02} & c_{03} + c_{12} & c_{04} + c_{13} & c_{14} \\ c_{03} & c_{04} + c_{13} & c_{14} + c_{23} & c_{24} \\ c_{04} & c_{14} & c_{24} & c_{34} \end{vmatrix}.$$

Es ist leicht ihr Bildungsgesetz in dem allgemeinen Falle von zwei

Gleichungen n-ten Grades zu ermitteln[1]): das allgemeine Element ist

$$(4) \qquad c_{0,i+j-1} + c_{1,i+j-2} + c_{2,i+j-3} + \cdots + c_{i-1,j},$$

vorausgesetzt, daß man die Koeffizienten mit Indices größer als n als verschwindend ansieht. Zu demselben Resultate gelangte Cayley durch andere Betrachtungen[2]).

b) Wenn $n > m$ ist, so multipliziert man die zweite Gleichung mit x^{n-m} und erhält auf diese Weise zwei Gleichungen vom Grade n. Dann wendet man die obige Methode an, die nur m Gleichungen liefert. Die andern $n-m$ kann man erhalten, indem man die zweite Gleichung successiv mit $1, x, x^2, \ldots, x^{n-m-1}$ multipliziert. Man betrachte z. B. eine Gleichung vom vierten und eine vom zweiten Grade:

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0, \quad b_0x^2 + b_1x + b_2 = 0.$$

Multipliziert man die zweite mit x^2 und wendet die oben auseinandergesetzte Methode an, so erhält man nur zwei Gleichungen:

$$c_{01}x^3 + c_{02}x^2 + c_{03}x + c_{04} = 0,$$

$$c_{02}x^3 + (c_{03} + c_{12})x^2 + (c_{04} + c_{13})x + c_{14} = 0.$$

Die beiden andern sind, wenn man will,

$$b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x = 0, \quad b_0x^2 + b_1x + b_2 = 0.$$

Man gelangt so zu der Resultante

$$\begin{vmatrix} a_0b_1 - a_1b_0 & a_0b_2 - a_2b_0 & -a_3b_0 & -a_4b_0 \\ a_0b_2 - a_2b_0 & a_1b_2 - a_2b_1 - a_3b_0 & -a_3b_1 - a_4b_0 & -a_4b_1 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Man beachte, daß die Methode von Bézout vor derjenigen von Euler den Vorzug hat, die Resultante in einer mehr zusammengedrängten Form zu liefern[3]). In der Tat, während die Eulersche Resultante eine Determinante $(n+m)$-ter Ordnung ist, ist die von Bézout von n-ter, wenn man $n \geq m$ voraussetzt.

442. Gewicht. Wenn ein Monom aus Buchstaben zusammengesetzt ist, die mit Indices versehen sind, so heißt die Summe der Indices aller Faktoren, seien sie gleich oder ungleich, das Gewicht des Monoms. Jede Summe von Monomen, die alle dasselbe Gewicht haben, heißt isobar. Es ist z. B. isobar der Ausdruck (4): sein Gewicht ist $i+j-1$. Die Resultanten von Euler und von

1) Jacobi, Crelles Journal, Bd. XV, S. 102.

2) Philosophical Transactions, 1857.

3) Von der einen Form zur andern kann man leicht mit Hilfe von Eigenschaften der Determinanten übergehen. Siede Trudi, l. c., p. 101.

Bézout sind isobar. In der Tat hat in der Resultante von Bézout das Glied, welches man erhält, wenn man aus den n Horizontalreihen der Reihe nach die an den Stellen $i_1, i_2, \ldots, i_n$ befindlichen Elemente herausgreift, in seinen m ersten Faktoren ein Gesamtgewicht gleich

$$i_1 + (i_2 + 1) + (i_3 + 2) + \cdots + (i_m + m - 1) = \sum_{r=1}^{r=m} i_r + \tfrac{1}{2} m (m - 1)$$

und in den übrigen Faktoren das Gesamtgewicht

$$(i_{m+1} - 1) + \cdots + (i_n - n + m) = \sum_{r=m+1}^{r=n} i_r - \tfrac{1}{2}(n - m)(n - m + 1).$$

Daraus folgt, daß das Gewicht jedes Gliedes

$$\tfrac{1}{2} n (n + 1) + \tfrac{1}{2} m (m - 1) - \tfrac{1}{2}(n - m)(n - m + 1) = nm$$

ist, daß es also von einem Gliede der Determinante zum andern sich nicht ändert. Dieselbe ist also isobar, und ihr Gewicht ist gleich dem Produkt der Grade der gegebenen Polynome. Ebenso hat in der Eulerschen Resultante jedes nicht verschwindende Glied m erste Faktoren mit dem Gesamtgewicht

$$(i_1 - 1) + (i_2 - 2) + \cdots + (i_m - m) = \sum_{r=1}^{r=m} i_r - \tfrac{1}{2} m (m + 1),$$

während das Gewicht des Produktes aller übrigen Faktoren

$$(i_{m+1} - 1) + (i_{m+2} - 2) + \cdots + (i_{n+m} - n) = \sum_{r=m+1}^{r=n+m} i_r - \tfrac{1}{2} n (n + 1),$$

also das Gewicht des ganzen Gliedes immer

$$\tfrac{1}{2}(n + m)(n + m + 1) - \tfrac{1}{2} n (n + 1) - \tfrac{1}{2} m (m + 1) = nm$$

ist. Die durch die Methoden von Euler und Bézout gelieferten Resultanten haben also dasselbe Gewicht. Dies genügt, um sicher zu sein, daß die Methode von Bézout keine fremdartigen Faktoren einführt.

443. Wenn die erste Gleichung vom Grade n und die zweite vom Grade m in den beiden Veränderlichen x und y ist, so können die linken Seiten in Bezug auf x geordnet werden, und in diesem Falle sind a_i und b_i Polynome in y, deren Grad nicht größer ist als i. Es seien α_i und β_i die Koeffizienten von y^i in a_i und b_i. Wenn man x eliminiert, so ist offenbar die Resultante[1]) eine ganze Funktion von y, deren höchstes Glied man erhält, wenn man in jedem Element dieser Resultante $\alpha_i y^i$ und $\beta_i y^i$ bezüglich an die Stelle

1) Dies gilt nur, wenn a_0 und b_0 beide nicht verschwinden, da die zur Auffindung der Resultante befolgte Methode wesentlich voraussetzt, daß die vorgelegten Gleichungen keine Graderniedrigung erfahren.

von a_i und b_i setzt. Nach dem im vorigen Paragraphen Gesagten sieht man sofort ein, daß das so berechnete Glied das Produkt von y^{mn} mit einer Konstanten ist, welche die Resultante der Polynome

$$\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \cdots + \alpha_n, \quad \beta_0 x^m + \beta_1 x^{m-1} + \cdots + \beta_m$$

darstellt. Es existiert daher, wenn diese relativ prim sind, wie es im allgemeinen der Fall ist, in der Resultante der betrachteten Funktionen wirklich ein Glied vom Grade nm. Also ist der Grad der Resultante gleich dem Produkt der Grade der gegebenen Gleichungen und kann sich nur in speziellen Fällen erniedrigen, falls nämlich die Polynome die man erhält, wenn man nur die Glieder höchsten Grades beibehält und in ihnen $y = 1$ setzt, einen gemeinsamen Teiler haben. Dies ist das Theorem von Bézout, welches in der analytischen Geometrie folgende bemerkenswerte Interpretation findet: Zwei allgemeine Kurven von den Ordnungen n und m schneiden sich in nm Punkten. Man beweist ferner, daß die Erniedrigung von nm auf $nm - r$ nicht auf dem plötzlichen Verschwinden von r Punkten beruht, sondern auf ihrem Fortrücken ins Unendliche, sodaß man sagen kann, daß für irgend zwei spezielle Kurven von den Ordnungen n und m die Anzahl der (reellen oder imaginären, im Endlichen oder im Unendlichen gelegenen) Schnittpunkte immer nm ist. Das Theorem von Bézout läßt sich leicht auf den Fall einer beliebigen Anzahl von Gleichungen ausdehnen[1]).

Existenz der Wurzeln.

444. $f(x)$ sei eine explicite algebraische Funktion. Die Gleichung $f(x) = 0$ läßt sich immer auf eine einfache Form bringen, indem man die Radikale herausschafft. Dieses Ziel erreicht man in folgender Weise. Jedes Radikal bezeichne man mit einem Buchstaben, und es seien $u, v, w, \ldots$ die ν neuen Veränderlichen, die dadurch eingeführt werden. Die Gleichungen, welche sie definieren, liefern nach geeigneten Potenzierungen ν rationale algebraische Relationen zwischen diesen neuen Veränderlichen und der ursprünglichen x. Fügt man sie zu der gegebenen Gleichung hinzu, so erhält man ein System von $\nu + 1$ rationalen Gleichungen in den $\nu + 1$ Veränderlichen $x, u, v, \ldots$ Nun versteht es sich aber, daß sich die Elimination der ν letzten

1) Wegen dieser Verallgemeinerung und wegen anderer wichtiger Sätze über die Elimination siehe Salmon-Fiedler: „Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen“ (2. Aufl., S. 91); Laurent: „Traité d'Algèbre (4ème éd. 3ème partie, p. 134); Serret: „Cours d'Algèbre supérieure“, deutsch von Wertheim (2. Aufl., Bd. I, S. 155); Petersen: „Theorie der algebraischen Gleichungen“ (Bd. I, S. 60).

derart ausführen läßt, daß keine Radikale hineinkommen. Man gelangt auf diese Weise zu einer rationalen Gleichung in x, die man offenbar auf die Form

$$(5) \qquad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

bringen kann mit $a_0 > 0$. Im folgenden wird immer stillschweigend vorausgesetzt werden, daß die Gleichung bereits auf die Form (5) reduziert sei. Die Frage, welche sich uns hier darbietet, ist folgende: Hat die Gleichung (5) immer eine Wurzel?

445. Für Werte von x, deren Modul über alle Grenzen zunimmt, verhält sich die ganze Funktion

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n$$

schließlich wie das Glied höchsten Grades. Man sieht dies sofort, wenn man schreibt

$$f(x) = x^n \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}\right)$$

und beachtet, daß die Größe in Klammern sich bei unendlich zunehmendem $|x|$ dem Grenzwert a_0 nähert. Daraus folgt insbesondere, daß ein Polynom geraden Grades mit reellen Koeffizienten das Vorzeichen des höchsten Gliedes annimmt und bewahrt, wenn man der Veränderlichen Werte mit hinreichend großem absoluten Betrage beilegt. Dagegen nimmt ein Polynom ungeraden Grades mit reellen Koeffizienten das Vorzeichen des höchsten Gliedes oder das entgegengesetzte Zeichen an und bewahrt es, je nachdem man der Veränderlichen positive oder negative Werte mit hinreichend großem absoluten Betrage beilegt.

446. Wenn die Gleichung (5) reelle Koeffizienten hat, so kann man in manchen Fällen leicht die Existenz einer Wurzel konstatieren. Ist z. B. der Grad ungerade, so läßt sich auf Grund des letzten Satzes ein Intervall $(-a, a)$ angeben, an dessen Grenzen die linke Seite $f(x)$ entgegengesetzte Vorzeichen annimmt, d. h. das Zeichen $-$ an der unteren und das Zeichen $+$ an der oberen Grenze, wenn wir immer die Annahme $a_0 > 0$ machen. Daraus folgt, daß die Funktion $f(x)$ wegen ihrer Stetigkeit (§ 275) wenigstens einmal in dem betrachteten Intervalle verschwinden muß. Wir haben also den Satz: Jede Gleichung ungeraden Grades mit reellen Koeffizienten besitzt wenigstens eine reelle Wurzel. Man kann hinzufügen, daß das Vorzeichen dieser Wurzel dem des unabhängigen Gliedes entgegengesetzt ist. In der Tat, wenn das genannte Glied, welches offenbar gleich $f(0)$ ist, positiv ist, so muß $f(x)$ in dem Intervall $(-a, 0)$ verschwinden, d. h. für einen negativen Wert von x; und wenn $f(0)$ negativ ist, so verschwindet $f(x)$

in $(0, a)$. Wenn nun der Grad gerade ist, so kann man a hinreichend groß wählen, sodaß an den Grenzen des Intervalles $(-a, a)$ die Werte der Funktion positiv ausfallen. Ist dann $f(0)$ negativ, so verschwindet $f(x)$ sowohl in $(-a, 0)$ als auch in $(0, a)$. Wir haben also den Satz: Jede Gleichung geraden Grades mit reellen Koeffizienten und negativem unabhängigen Gliede besitzt wenigstens zwei reelle Wurzeln, eine positive und eine negative.

447. Konjugiert mögen zwei Polynome $f(z)$ und $g(z)$ heißen, bei welchen die entsprechenden Koeffizienten konjugiert sind, sodaß man, wenn man die reellen Teile der Koeffizienten von den rein imaginären Teilen trennt, schreiben kann

$$f(z) = u(z) + iv(z), \quad g(z) = u(z) - iv(z),$$

wo die Polynome $u(z)$ und $v(z)$ reelle Koeffizienten haben. Jedes dieser Polynome läßt sich nun seinerseits in komplexer Form ausdrücken, wenn man in z den reellen Teil x von dem rein imaginären Teil iy trennt. Die Taylorsche Formel liefert

$$\varphi(x+iy) = \varphi(x) - \tfrac{1}{2}y^2\varphi''(x) + \cdots + iy\{\varphi'(x) - \tfrac{1}{6}y^2\varphi'''(x) + \cdots\}$$

und zeigt, daß, wenn φ ein Polynom mit reellen Koeffizienten ist, die Verwandlung von y in $-y$ nur einen Zeichenwechsel in dem rein imaginären Teil nach sich zieht, sodaß man schreiben kann

$$u(x+iy) = u_1 + iu_2, \quad u(x-iy) = u_1 - iu_2,$$
$$v(x+iy) = v_1 + iv_2, \quad v(x-iy) = v_1 - iv_2,$$

mithin

$$f(x-iy) = u_1 + iu_2 + i(v_1 + iv_2) = u_1 - v_2 + i(u_2 + v_1)$$
$$g(x-iy) = u_1 - iu_2 - i(v_1 - iv_2) = u_1 - v_2 - i(u_2 + v_1).$$

Es gilt also der Satz: Für konjugierte Werte der Veränderlichen nehmen zwei konjugierte Polynome konjugierte Werte an. Man leitet daraus sofort ab, daß, wenn eine Zahl ein Polynom zum Verschwinden bringt, die zu ihr konjugierte das konjugierte Polynom zu Null macht. Ein Polynom mit reellen Koeffizienten ist zu sich selbst konjugiert. Wir haben daher den Satz: Jede Gleichung mit reellen Koeffizienten, die eine imaginäre Wurzel zuläßt, läßt auch die konjugierte Wurzel zu. Daraus folgt, daß die Anzahl der imaginären Wurzeln einer Gleichung mit reellen Koeffizienten notwendig gerade ist.

448. Theorem von D'Alembert[1]). Jede algebraische Gleichung

---

1) Der hier folgende Beweis hat den Vorzug rein algebraisch zu sein. Wir verdanken ihn Clifford, und er wurde dann von Walecki noch einmal

mit reellen oder komplexen Koeffizienten hat eine reelle oder komplexe Wurzel.

a) Betrachten wir wieder die Gleichung (5) oder $f(x) = 0$, indem wir der Einfachheit wegen $a_0 = 1$ annehmen. Wenn 2^r die höchste Potenz von 2 ist, welche in n aufgeht, werden wir sagen, n sei von der Geradheit r. Setzt man $x = y + h$ und ordnet $f(x)$ nach y, so hat man

$$f(x) = y^n + b_1 y^{n-1} + b_2 y^{n-2} + \cdots + b_n,$$

wo

$$(6) \quad \begin{cases} b_1 = \frac{n}{1} h + a_1, \\ b_2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} h^2 + \frac{n-1}{1} a_1 h + a_2, \\ b_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} h^3 + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} a_1 h^2 + \frac{n-2}{1} a_2 h + a_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_n = h^n + a_1 h^{n-1} + a_2 h^{n-2} + \cdots + a_n \end{cases}$$

ist. Wenn man die Glieder von $f(x)$ in folgender Weise gruppiert

$$f(x) = (y^n + b_2 y^{n-2} + \cdots + b_n) + y(b_1 y^{n-2} + b_3 y^{n-4} + \cdots + b_{n-1}),$$

$n = 2\nu$ setzt und

$$\Phi(x) = x^\nu + b_2 x^{\nu-1} + b_4 x^{\nu-2} + \cdots + b_{2\nu},$$
$$\Psi(x) = b_1 x^{\nu-1} + b_3 x^{\nu-2} + \cdots + b_{2\nu-1},$$

so kann man auch schreiben

$$f(x) = \Phi(y^2) + y\Psi(y^2).$$

Man betrachte jetzt die Resultante von Φ und Ψ:

$$\mathfrak{R} = \begin{vmatrix} 1 & b_2 & b_4 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & b_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{2\nu} \\ b_1 & b_3 & b_5 & \dots & 0 \\ 0 & b_1 & b_3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{2\nu-1} \end{vmatrix}.$$

gefunden (Nouv. Annales de Math., 1883, p. 241). Vgl. auch im ersten Bande der Rivista di Matematica eine interessante Studie von Loria unter dem Titel: Il teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche. Ein anderer Beweis wurde kürzlich von Weierstraß veröffentlicht in den „Sitzungsberichten der Kgl. Akad. der Wiss. zu Berlin" (1891).

Offenbar ist $\mathfrak{R}$ eine ganze Funktion von h, deren Grad gleich dem Gewicht in den b ist. Dieses Gewicht (§ 442) würde sein $\nu(\nu-1)$, aber die Indices der Koeffizienten von Φ finden sich verdoppelt und diejenigen von Ψ nach der Verdoppelung um eine Einheit vermehrt. Hierdurch ist das Gewicht folgendes geworden:

$$2\nu(\nu-1)+\nu=\nu(2\nu-1).$$

Dies ist also der Grad von $\mathfrak{R}$. Um aber dessen sicher zu sein, muß man noch zeigen, daß der Koeffizient des Gliedes höchsten Grades niemals null ist. Es ist klar, daß man dieses Glied erhält (vgl. § 443), indem man in $\mathfrak{R}$ an Stelle jedes Elements das Glied höchsten Grades in diesem Element setzt. Daraus folgt unter Beachtung der Gleichungen (6), daß der gesuchte Koeffizient das ist, was aus $\mathfrak{R}$ wird, wenn man die Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ als verschwindend annimmt und $h=1$ setzt. Er ist also die Resultante von Φ und Ψ in dem speziellen Falle $f(x)=x^n$ und $h=1$. Unter diesen Voraussetzungen liefert die Gleichung (7)

$$(y+1)^n=\Phi(y^2)+y\Psi(y^2),\quad (y-1)^n=\Phi(y^2)-y\Psi(y^2).$$

Wenn die genannte Resultante null wäre, so würden Φ und Ψ einen gemeinsamen Teiler zulassen, der auch die Polynome $(y+1)^n$ und $(y-1)^n$ teilen würde, die offenbar relativ prim sind. Also fehlt das Glied vom Grade $\nu(2\nu-1)$ nicht in $\mathfrak{R}$, und der Grad von $\mathfrak{R}$ ist daher sicher von der Geradheit $r-1$, wenn derjenige der vorgelegten Gleichung von der Geradheit r ist.

b) Dies vorausgeschickt wollen wir annehmen, daß die vorgelegte Gleichung reelle Koeffizienten habe und vom Grade $n=2\nu$ mit ungeradem ν sei. Die Gleichung $\mathfrak{R}=0$ hat dann ebenfalls reelle Koeffizienten, und da ihr Grad $\nu(2\nu-1)$ ungerade ist, so gibt es (§ 446) einen reellen Wert h, der $\mathfrak{R}$ zum Verschwinden bringt. Es ist bekannt (§ 439), daß für diesen Wert von h die Polynome Φ und Ψ, deren Koeffizienten, wie man aus den Formeln (6) ersieht, reell sind, einen gemeinsamen Teiler χ erhalten. Man hat also

$$\Phi(x)=\varphi(x)\chi(x),\qquad \Psi(x)=\psi(x)\chi(x).$$

Mithin wird die Gleichung (7)

$$f(x)=[\varphi(y^2)+y\psi(y^2)]\chi(y^2)$$

oder, wenn man y durch $x-h$ ersetzt, $f(x)=f_1(x)f_2(x)$, wo f_1 und f_2 zwei neue Polynome mit reellen Koeffizienten sind, deren Grade die Summe n ergeben. Wenn diese Grade gerade Zahlen wären, so wäre eine derselben wie n das Doppelte einer ungeraden Zahl, d. h. eins von den Polynomen f_1, f_2 befände sich unter denselben Bedingungen wie f. Verfährt man dann mit ihm wie mit f, so kann man eine Folge von Polynomen mit reellen Koeffizienten konstruieren, deren Grade abnehmen, und eins von diesen Polynomen wird schließlich einen ungeraden Grad oder aber den Grad 2 haben müssen, folglich eine Wurzel besitzen, die auch das ursprüngliche Polynom zu Null macht. Bei allen diesen Überlegungen ist die Existenz des Polynoms Ψ stillschweigend vorausgesetzt. Würde dasselbe aber für den betrachteten reellen Wert von h verschwinden, wären also $b_1, b_3, b_5, \ldots$ alle gleich Null, so würde sich die vorgelegte Gleichung auf $\Phi(y^2) = 0$ reduzieren. Sie hätte reelle Koeffizienten und wäre von ungeradem Grade in y^2, ließe also eine Wurzel zu. Das Theorem ist daher richtig für alle Gleichungen mit reellen Koeffizienten, deren Grad das Doppelte einer ungeraden Zahl ist.

c) Es ist auch richtig für alle Gleichungen ungeraden Grades mit reellen oder komplexen Koeffizienten. Es sei in der Tat $f(z)$ ein Polynom von ungeradem Grade, und mit $g(z)$ werde das konjugierte Polynom bezeichnet. Die Funktion

$$f(z)g(z) = (u + iv)(u - iv) = u^2 + v^2,$$

welche reelle Koeffizienten hat und einen Grad, der das Doppelte einer ungeraden Zahl ist, läßt eine Wurzel $\alpha + i\beta$ zu. Diese bringt, wenn sie nicht eine Wurzel von $f(z)$ ist, notwendig $g(z)$ zum Verschwinden, und in diesem Falle (§ 447) ist es die Zahl $\alpha - i\beta$, welche $f(z)$ zu Null macht.

d) Es bleibt endlich noch zu zeigen, daß das Theorem, wenn wir es als richtig annehmen für den Fall, daß der Grad n von einer Geradheit kleiner als r ist, auch für die Geradheit r besteht. Hierzu genügt es, sich die obigen Betrachtungen bei einer Gleichung mit reellen oder komplexen Koeffizienten wiederholt zu denken und zu bemerken, daß die Gleichungen $\mathfrak{R} = 0$ und $\Phi = 0$, deren Grade von der Geradheit $r - 1$ sind, nach der Voraussetzung durch einen gewissen Wert von h oder von y^2 erfüllt werden. Man wird also immer dazu gelangen, f in ein Produkt von zwei andern Polynomen f_1 und f_2 zu zerlegen von den Graden n_1 und n_2. Wenn eine dieser Zahlen von einer Geradheit kleiner als r ist, so läßt das entsprechende Polynom eine Wurzel zu, die auch f angehört. Andernfalls ist eine von ihnen, z. B. n_1, von der Geradheit r; denn wären beide von einer Geradheit größer als r, so würde dies auch von $n = n_1 + n_2$ gelten gegen die Voraussetzung. Man wiederhole alsdann bei f_1 die obigen Betrachtungen und konstruiere so eine Folge von Polynomen, die notwendig begrenzt ist, da die Grade abnehmen. Bliebe die Geradheit r bestehen, so käme man im ungünstigsten Falle zu einem Polynom vom Grade 2^r, auf welches notwendig ein Polynom von einem Grade kleiner als 2^r, dessen Geradheit also kleiner als r ist, folgen würde. Ein solches Polynom hat nach der Voraussetzung eine Wurzel, und diese gehört auch zu dem ursprünglichen Polynom.

449. Folgerung. Jede Gleichung n-ten Grades mit reellen oder komplexen Koeffizienten hat genau n reelle oder komplexe Wurzeln. Wir haben gesehen, daß $f(x)$ wenigstens eine Wurzel α_1 zuläßt. Beachtet man (vgl. § 500), daß $f(x) - f(\alpha)$ immer durch $x - \alpha$ teilbar ist, so kann man unter der Annahme $\alpha = \alpha_1$ schreiben

$$f(x) = (x - \alpha_1) f_1(x),$$

wo $f_1(x)$ ein Polynom vom Grade $n - 1$ ist, welches wenigstens eine Wurzel α_2 zuläßt und daher in $(x - \alpha_2) f_2(x)$ zerlegbar ist, u. s. w. Fährt man so fort, so erhält man

$$(8) \qquad f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \ldots (x - \alpha_n).$$

Da nun zum Verschwinden des vorstehenden Produktes das Verschwinden irgend eines Faktors notwendig und hinreichend ist, so kann man behaupten, daß $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ ebenso wie α_1 Wurzeln von $f(x)$ sind, und daß im Gebiete der reellen oder komplexen Zahlen[1]) keine andern Wurzeln existieren.

450. Bemerkungen. a) Zwei Polynome, die eine gemeinsame Wurzel α haben, sind nicht relativ prim, da sie beide nach (8) den Teiler $x - \alpha$ zulassen. Wenn umgekehrt zwei Polynome einen gemeinsamen Teiler zulassen, so bringt jede Wurzel desselben diese Polynome zum Verschwinden. Die gleichzeitige Teilbarkeit zweier Polynome durch ein drittes und ihr gleichzeitiges Verschwinden für einen und denselben Wert der Veränderlichen sind also zwei vollkommen gleichwertige Dinge.

b) Nichts hindert, daß einige von den Wurzeln α einander gleich sind. Es wird also zweckmäßiger sein an Stelle von (8) allgemeiner zu schreiben

$$f(x) = (x - \alpha_1)^{r_1} (x - \alpha_2)^{r_2} (x - \alpha_3)^{r_3} \ldots (x - \alpha_\nu)^{r_\nu},$$

wo die α alle verschieden sind und die Summe $r_1 + r_2 + \cdots + r_\nu$ immer gleich dem Grade n der Gleichung ist. Obwohl es nun in Wirklichkeit nur ν verschiedene Werte von x gibt, die $f(x)$ zum Verschwinden bringen, so ist es zweckmäßig, auch jetzt noch zu sagen, daß $f(x)$ n Wurzeln hat, von denen r_1 gleich α_1, r_2 gleich α_2 u. s. w. sind.

c) Wenn $f(x)$ r Wurzeln hat, die gleich α sind, während alle andern von α verschieden sind, so ist es leicht zu zeigen, daß α eine vielfache Wurzel von der Ordnung r ist oder eine r-fache Wurzel

1) Man beachte die Notwendigkeit dieser Einschränkung hinsichtlich der Natur der Wurzeln und Koeffizienten. In der Tat hat Hamilton bewiesen, daß die allgemeine Gleichung zweiten Grades z. B. sechzehn Wurzeln zuläßt, wenn das Zahlengebiet soweit ausgedehnt wird, daß es die Quaternionen umfaßt.

in dem früher definierten Sinne (§ 304, b). In der Tat erhält man aus $f(x) = (x-\alpha)^r \varphi(x)$, wo $\varphi(x)$ eine andere ganze Funktion bedeutet, die nicht teilbar durch $x-\alpha$ ist, durch Derivation

$$f'(x) = (x-\alpha)^{r-1}[r\varphi(x) + (x-\alpha)\varphi'(x)].$$

Der Ausdruck in Klammern ist nicht teilbar durch $x-\alpha$, da er sich für $x=\alpha$ auf $r\varphi(\alpha) \neq 0$ reduziert. Also hat $f'(x)$ nur $r-1$ Wurzeln gleich α, folglich haben $f''(x)$, $f'''(x)$, ... deren bezüglich $r-2$, $r-3$, ..., sodaß zuletzt $f^{(r)}(\alpha) \neq 0$ ist. Also ist α eine r-fache Wurzel von $f(x)$ und auch eine $(r-1)$-fache Wurzel von $f'(x)$, eine $(r-2)$-fache Wurzel von $f''(x)$ u. s. w., endlich eine einfache Wurzel von $f^{(r-1)}(x)$ und keine Wurzel von $f^{(r)}(x)$. Soll eine Wurzel von $f(x)$ eine vielfache sein, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß sie eine Wurzel von $f'(x)$ ist.

d) Wenn die Koeffizienten von $f(x)$ reell sind, so gehört, wie wir am Ende von § 447 gesehen haben, zu jeder imaginären Wurzel α eine konjugierte Wurzel $\bar{\alpha}$. Wir können jetzt hinzufügen, daß, wenn α eine vielfache Wurzel von einer gewissen Ordnung r ist, auch $\bar{\alpha}$ von derselben Ordnung vielfach ist. In der Tat ist ja α eine Wurzel des Polynoms $f^{(r-1)}(x)$ mit reellen Koeffizienten und keine von $f^{(r)}(x)$, und es muß daher auch $\bar{\alpha}$ das erste Polynom zum Verschwinden bringen, dagegen nicht das zweite. Daraus folgt, daß, wenn man $f(x)$ auf die Form (8) bringt, die den Wurzeln α und $\bar{\alpha}$ entsprechenden Linearfaktoren sich zu einem Produkt von der Form $(x^2+px+q)^r$ mit reellen p, q vereinigen, da $p = -(\alpha+\bar{\alpha})$, $q = \alpha\bar{\alpha}$ ist. Also läßt sich jedes Polynom mit reellen Koeffizienten in ein Produkt von linearen und quadratischen Faktoren mit reellen Koeffizienten zerlegen.

Gemeinsame Wurzeln zweier Gleichungen und vielfache Wurzeln.

451. Gemeinsame Wurzeln. Wenn $\mathfrak{D}(x)$ der größte gemeinsame Teiler von $f(x)$ und $g(x)$ ist und man setzt

$$f(x) = f_1(x)\,\mathfrak{D}(x), \quad g(x) = g_1(x)\,\mathfrak{D}(x),$$

so ist klar, daß jede Wurzel von $\mathfrak{D}$ eine Wurzel von f und von g ist und daß umgekehrt jede gemeinsame Wurzel dieser beiden Polynome eine Wurzel von $\mathfrak{D}$ ist; denn die Polynome f_1 und g_1, welche relativ prim sind, können nicht gleichzeitig verschwinden. Also sind die gemeinsamen Wurzeln von zwei ganzen Funktionen alle die und nur die, welche den größten gemeinsamen Teiler dieser Funktionen zum Verschwinden bringen. Dieses Theorem setzt die Zerlegung des größten gemeinsamen Teilers in Linearfaktoren in Evidenz. Wenn die Funktionen f und g nur r Wurzeln gleich α, s gleich β, t gleich γ u. s. w. haben, so ist ihr größter gemeinsamer Teiler

$$\mathfrak{D}(x) = (x-\alpha)^r (x-\beta)^s (x-\gamma)^t \ldots$$

Wir werden sogleich sehen, daß die Aufsuchung der gemeinsamen Wurzeln unmittelbar mit den Methoden der Elimination zusammenhängt.

452. Der Satz, welcher der Eulerschen Methode als Grundlage dient (§ 439, a), läßt sich leicht ausdehnen, wenn man beachtet, daß die Möglichkeit

$$f_i = \alpha_0 x^{n-i} + \alpha_1 x^{n-i-1} + \cdots + \alpha_{n-i},$$
$$g_i = \beta_0 x^{m-i} + \beta_1 x^{m-i-1} + \cdots + \beta_{m-i}$$

derart zu bestimmen, daß man identisch

(9) $$f g_i - g f_i = 0$$

hat, notwendig und hinreichend ist, damit die Polynome

$$f = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n, \quad g = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m$$

einen gemeinsamen Teiler zulassen, dessen Grad nicht kleiner ist als i. Die Identität (9) spaltet sich nun (vgl. § 439, b) in ein System von linearen und homogenen Gleichungen in den α und den β, und die Möglichkeit f_i und g_i zu bestimmen ist gleichbedeutend mit dem gleichzeitigen Verschwinden (§ 56) der großen Determinanten einer gewissen Matrix, die sich aus

$$\mathfrak{R} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & . & . & . & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & . & . & . & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & b_m \end{vmatrix}$$

ergibt durch Unterdrückung der $i-1$ letzten unter den n ersten Horizontalreihen und der $i-1$ letzten von allen. Unterdrückt man noch die $2i-2$ letzten Vertikalreihen, von denen die $i-1$ letzten aus Nullen bestehen, so erhält man eine Determinante $\mathfrak{R}_{i-1}$, welche $\mathfrak{R}_{i-1}^{(1)}$, $\mathfrak{R}_{i-1}^{(2)}$, $\ldots$, $\mathfrak{R}_{i-1}^{(i-1)}$ wird, wenn man ihre letzte Vertikalreihe successiv durch die $i-1$ folgenden Vertikalreihen ersetzt. Damit die

Identität (9) stattfinden könne, sind die Bedingungen notwendig und hinreichend

$$(10)\qquad \mathfrak{R}_{i-1}=0,\quad \mathfrak{R}_{i-1}^{(1)}=0,\quad \mathfrak{R}_{i-1}^{(2)}=0,\ \ldots,\quad \mathfrak{R}_{i-1}^{(i-1)}=0.$$

Um die Bildung der Determinanten $\mathfrak{R}_{i-1}$ zu erleichtern, ist es nützlich, die n ersten Horizontalreihen von $\mathfrak{R}$ in umgekehrter Reihenfolge zu schreiben, sodaß man, um die Matrix zu erhalten, welche die Determinanten (10) enthält, die ersten und letzten $i-1$ Horizontalreihen unterdrücken muß.

453. So liefert z. B. bei zwei Gleichungen vierten Grades das Schema

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\
0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\
0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 \\
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\
b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4
\end{array}$$

sofort die Determinanten $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ und $\mathfrak{R}_3 = a_0 b_1 - a_1 b_0$. Es ist ferner leicht zu erkennen, daß man den Elementen des Schemas auch folgende Anordnung geben kann:

$$\begin{array}{cccccccc}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\
0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\
0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\
0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 \\
b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

454. Dies vorausgeschickt wollen wir die Eulersche Methode nach Sylvester interpretieren (§ 440) und die Gleichungen derart schreiben, daß die Koeffizienten die an letzter Stelle angegebene Anordnung haben. Man unterdrücke die i ersten und die i letzten Gleichungen und betrachte die übrigbleibenden $n+m-2i$ als lineare Gleichungen in den Potenzen von x bis zur $(n+m-i)$-ten ausschließlich. Eliminiert man die Potenzen mit einem höheren Exponenten als i, so erhält man die Gleichung

$$\mathfrak{R}_i x^i + \mathfrak{R}_i^{(1)} x^{i-1} + \mathfrak{R}_i^{(2)} x^{i-2} + \cdots + \mathfrak{R}_i^{(i)} = 0. \tag{11}$$

Wenn nun p der Grad von $\mathfrak{D}$ ist, so ist es klar, daß f und g, die gleichzeitig durch alle linearen Divisoren von $\mathfrak{D}$ teilbar sind, auch gemeinsame Teiler von jedem Grad, der nicht größer ist als p, aber von keinem größeren Grade zulassen, d. h. daß die Identität (9) für $i = 1, 2, 3, \ldots, p$ erfüllt ist, nicht aber für $i > p$. Es sind also auf Grund von (10) die Determinanten $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_{p-1}$ gleich Null, und die Gleichung (11) ist illusorisch, solange $i < p$ ist; dagegen ist nicht illusorisch die Gleichung

$$\mathfrak{R}_p x^p + \mathfrak{R}_p^{(1)} x^{p-1} + \mathfrak{R}_p^{(2)} x^{p-2} + \cdots + \mathfrak{R}_p^{(p)} = 0. \tag{12}$$

Dieselbe kann überdies, da sie von jeder der p gemeinsamen Wurzeln erfüllt werden muß, nicht von einem kleineren Grade als p sein, und es ist daher $\mathfrak{R}_p \neq 0$. Also ist die Anzahl der gemeinsamen (gleichen oder ungleichen) Wurzeln durch den Index des ersten nicht verschwindenden Gliedes in der Reihe $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3, \ldots$ gegeben; und die Werte der Wurzeln erhält man durch Auflösung der Gleichung (12).

455. Man nehme z. B. wieder die Gleichungen des § 453 vor und bilde das System

$$\left\{\begin{array}{rr} a_0x^7 + a_1x^6 + a_2x^5 + a_3x^4 + a_4x^3 & = 0 \\ a_0x^6 + a_1x^5 + a_2x^4 + a_3x^3 + a_4x^2 & = 0 \\ \left.\begin{array}{r} a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x = 0 \\ a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0 \\ b_0x^4 + b_1x^3 + b_2x^2 + b_3x + b_4 = 0 \\ b_0x^5 + b_1x^4 + b_2x^3 + b_3x^2 + b_4x = 0 \end{array}\right\} & . \\ b_0x^6 + b_1x^5 + b_2x^4 + b_3x^3 + b_4x^2 & = 0 \\ b_0x^7 + b_1x^6 + b_2x^5 + b_3x^4 + b_4x^3 & = 0 \end{array}\right.$$

Wenn die Bedingungen $\mathfrak{R} = 0$, $\mathfrak{R}_1 = 0$, $\mathfrak{R}_2 \neq 0$ erfüllt sind, so kann man sofort behaupten, daß die betrachteten Gleichungen nur zwei gemeinsame Wurzeln haben, zu deren Bestimmung es genügt x^3, x^4, x^5 aus den vier mittleren Gleichungen zu eliminieren. Man erhält auf diese Weise die Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3x^2 + a_4x \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2x^2 + a_3x + a_4 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2x^2 + b_3x + b_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3x^2 + b_4x \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\mathfrak{R}_2 x^2 + \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_3 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_4 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_4 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

456. Vielfache Wurzeln. Zur Bestimmung der vielfachen Wurzeln der verschiedenen Ordnungen pflegt man in der praktischen Rechnung folgendermaßen zu verfahren. Es sei $f_1(x)$ das Produkt derjenigen Faktoren $x - a$, die den einfachen Wurzeln von $f(x)$ entsprechen. $f_2(x)$ sei das analoge Produkt, welches den Doppelwurzeln entspricht u. s. w., so daß

$$f(x) = f_1(x) f_2^2(x) f_3^3(x) f_4^4(x) \ldots$$

ist. Aus den oben angegebenen Gründen (§ 450, c; § 451) ist der größte gemeinsame Teiler von f und f'

$$\mathfrak{D}_1(x) = f_2(x) f_3^2(x) f_4^3(x) \ldots$$

Ebenso ist der größte gemeinsame Teiler $\mathfrak{D}_2$ von $\mathfrak{D}_1$ und seiner Derivierten $f_3 f_4^2 \ldots$, derjenige von $\mathfrak{D}_2$ und seiner Derivierten $f_4 \ldots$ u. s. w. Man dividiere f durch $\mathfrak{D}_1$, dann $\mathfrak{D}_1$ durch $\mathfrak{D}_2$ u. s. w., und die Quotienten seien $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ Man hat dann

$$\varphi_1(x) = f_1(x) f_2(x) f_3(x) \ldots, \quad \varphi_2(x) = f_2(x) f_3(x) \ldots, \quad \varphi_3(x) = f_3(x) \ldots, \ldots$$

und endlich

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = f_1(x), \quad \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_3(x)} = f_2(x), \quad \frac{\varphi_3(x)}{\varphi_4(x)} = f_3(x), \ldots$$

Es genügt jetzt, die Gleichungen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0, \ldots$ einzeln aufzulösen. Die Aufsuchung der vielfachen Wurzeln setzt sich also aus vier Reihen von Operationen zusammen, nämlich einer Reihe von Bestimmungen größter gemeinsamer Teiler, zwei Reihen von Divisionen und einer Reihe Auflösungen von Gleichungen mit einfachen Wurzeln[1]).

457. Die Diskriminante. Soll eine ganze Funktion vielfache Wurzeln haben, so ist dazu notwendig (§ 450, c) die Existenz gemeinsamer Wurzeln dieser Funktion und ihrer Derivierten, und es

---

1) Über die vielfachen Wurzeln siehe noch die „Teoria dei determinanti" von Trudi (p. 179).

muß daher die Resultante der beiden Funktionen gleich Null sein. Diese Resultante heißt die **Diskriminante** der vorgelegten Gleichung und wird mit Δ bezeichnet. Um sie zu erhalten, ist es nützlich die Gleichung homogen zu machen, d. h. x durch $\frac{x}{y}$ zu ersetzen und dann alles mit y^n zu multiplizieren. Die Gleichung wird dann

$$f(x, y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \cdots + a_n y^n = 0.$$

Da nun auf Grund des Eulerschen Theorems (§ 372) $x f_x' + y f_y' = n f$ ist, so sieht man, daß jede vielfache Wurzel von f auch f_y' zum Verschwinden bringt, und daß umgekehrt jede Zahl, welche f_x' und f_y' gleichzeitig zu Null macht, eine vielfache Wurzel von f ist. Also kann sich die Diskriminante der vorgelegten Gleichung nur um einen konstanten Faktor von der Resultante der partiellen Derivierten ihrer linken Seite unterscheiden.

458. Man betrachte z. B. die Gleichung dritten Grades

$$a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 + 3 a_2 x + a_3 = 0.$$

Setzt man

$$f(x, y) = a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 y + 3 a_2 x y^2 + a_3 y^3,$$

so hat man

$$\tfrac{1}{3} f_x' = a_0 x^2 + 2 a_1 x y + a_2 y^2, \qquad \tfrac{1}{3} f_y' = a_1 x^2 + 2 a_2 x y + a_3 y^2.$$

Die Diskriminante der betrachteten Gleichung ist also (§ 437; vgl. § 102)

$$\Delta = 4 (a_0 a_2 - a_1^2)(a_1 a_3 - a_2^2) - (a_0 a_3 - a_1 a_2)^2,$$

d. h.

$$\Delta = 3 a_1^2 a_2^2 + 6 a_0 a_1 a_2 a_3 - a_0^2 a_3^2 - 4 a_0 a_2^3 - 4 a_3 a_1^3.$$

Ebenso erhält man für die Gleichung vierten Grades

$$a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 + 6 a_2 x^2 + 4 a_3 x + a_4 = 0,$$

wie Boole bemerkt hat,

$$\Delta = I^3 - 27 J^2,$$

wo I und J die Invarianten (§ 87)

$$I = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2, \quad J = a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_0 a_3^2 - a_4 a_1^2$$

der biquadratischen binären Form $a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 y + \cdots$ sind. Die Diskriminante der allgemeinen Gleichung vom Grade n ist eine Funktion der Koeffizienten, welche den Grad $2(n-1)$ und das Gewicht $n(n-1)$ hat. Allgemeiner nennt Sylvester[1]) Diskriminante einer algebraischen Form in ν Veränderlichen die Resultante ihrer ersten partiellen Derivierten. Sie ist eine homogene und isobare Funktion der Koeffizienten, welche den Grad $\nu(n-1)^{\nu-1}$ und das Gewicht $n(n-1)^{\nu-1}$ hat.

1) Philosophical Magazine, 1851.

Übungen und Anwendungen.

459. Schon die bloße Tatsache (§ 449), daß jedes Polynom n-ten Grades in ein Produkt von n linearen Faktoren zerlegbar ist, gestattet zahlreiche Folgerungen und kann zu wichtigen und mannigfachen Anwendungen führen. Wir beginnen mit einer kleinen Übung, die uns im folgenden von Nutzen sein wird. Von dem Polynom $x^n - 1$ sind uns bereits die Wurzeln bekannt (§ 394)

$$\omega^k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

und wir können jetzt behaupten, daß man identisch hat

$$x^n - 1 = (x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)\ldots(x-\omega^{n-1})$$

oder, wenn man durch $x - 1$ dividiert,

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1 = (x-\omega)(x-\omega^2)\cdots(x-\omega^{n-1}),$$

mithin für $x = 1$

$$n = (1-\omega)(1-\omega^2)\ldots(1-\omega^{n-1}).$$

Nun ist

$$|1-\omega^k| = \sqrt{\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)^2 + \sin^2\frac{2k\pi}{n}} = 2\sin\frac{k\pi}{n}\cdot$$

Nimmt man also von den beiden Seiten der vorigen Gleichung die Moduln, so kommt

$$n = 2^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{3\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\cdot$$

Wenn wir jetzt den Viertelkreis in n gleiche Bogen h teilen, so sind wir imstande das Produkt der Sinus der Winkel h, $2h$, $3h, \ldots (n-1)h$ zu berechnen. In der Tat läßt sich dieses Produkt in zwei verschiedenen Weisen schreiben

$$\sin h \sin 2h \sin 3h \ldots \sin(n-1)h, \quad \cos h \cos 2h \cos 3h \ldots \cos(n-1)h,$$

da rh und $(n-r)h$ komplementär sind. Daraus folgt, daß sein Quadrat, multipliziert mit 2^{n-1},

$$\sin 2h \sin 4h \ldots \sin(2n-2)h = \sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

ist. Also haben wir[1])

$$\sin h \sin 2h \sin 3h \ldots \sin(n-1)h = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}\cdot$$

460. Jeder rationalen Funktion von x kann man die Form eines Quotienten von zwei ganzen Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ geben, die relativ prim sind. Denkt man sich überdies den ganzen Teil dieses Quotienten

1) Was den Beweis verschiedener interessanter Formeln, die zu dieser analog sind, anbetrifft, so verweisen wir auf das „Lehrbuch der Algebra" von Weber (Bd. I, S. 424ff.).

bereits hervorgezogen, so ist es erlaubt, den Grad von f kleiner als den von g anzunehmen. Sind die Wurzeln von g bekannt, so ist es von großer Wichtigkeit, den Bruch $\frac{f(x)}{g(x)}$ in eine Summe von einfachen Brüchen zerlegen zu können, d. h. von Brüchen, deren jeder nur für eine einzige Wurzel von $g(x)$ unendlich wird. Nehmen wir für den Anfang an, daß die n Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ von $g(x)$ alle einfach seien, und daß $g(x)$ auf die Form (8) gebracht sei. Da nach der Voraussetzung $f(x)$ und $g'(x)$ keine gemeinsamen Wurzeln mit $g(x)$ haben, so existieren die Zahlen

$$a = \frac{f(\alpha)}{g'(\alpha)}, \quad b = \frac{f(\beta)}{g'(\beta)}, \quad \ldots, \quad l = \frac{f(\lambda)}{g'(\lambda)}$$

und sind alle von Null verschieden. Nun bemerke man, daß die Funktion

$$a(x-\beta)(x-\gamma)\cdots + b(x-\alpha)(x-\gamma)\cdots + \cdots + l(x-\alpha)(x-\beta)\ldots$$

sich für $x = \alpha$ auf

$$a(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\cdots = a g'(\alpha) = f(\alpha)$$

reduziert, ebenso auf $f(\beta)$ für $x = \beta$ u. s. w., daß sie also für n verschiedene Werte von x dieselben Werte annimmt wie $f(x)$. Da aber ihr Grad ebenso wie der von $f(x)$ kleiner als n ist, so ist sie nicht verschieden von $f(x)$, weil sonst die Differenz zwischen ihr und $f(x)$ mehr Wurzeln haben würde als der Grad angibt. Folglich ist

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{x-\alpha} + \frac{b}{x-\beta} + \cdots + \frac{l}{x-\lambda}. \tag{13}$$

Gehen wir nun zu dem allgemeinen Fall über, wo $g(x) = (x-\alpha)^r(x-\beta)^s\ldots = (x-\alpha)^r\varphi(x)$ und $\varphi(\alpha) \neq 0$ ist. Bei beliebigem a_r ist identisch

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_r}{(x-\alpha)^r} + \frac{f(x) - a_r\varphi(x)}{(x-\alpha)^r\varphi(x)}.$$

Man kann aber die Zahl a_r derart fixieren, daß $f - a_r\varphi$ durch $x-\alpha$ teilbar wird, wozu notwendig ist $f(\alpha) - a_r\varphi(\alpha) = 0$, d. h.

$$a_r = \frac{f(\alpha)}{\varphi(\alpha)} = r!\,\frac{f(\alpha)}{g^{(r)}(\alpha)} \neq 0.$$

Nennt man alsdann f_1 und g_1 die Quotienten von $f - a_r\varphi$ und von g durch $x-\alpha$, so hat man

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_r}{(x-\alpha)^r} + \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

und wird dazu geführt, den Bruch $\frac{f_1}{g_1}$ zu zerlegen. Derselbe ist einfacher als $\frac{f}{g}$, da die Ordnung von α als Wurzel des Nenners auf $r-1$ erniedrigt ist. Denkt man sich die früheren Betrachtungen wiederholt, so kann man ohne weiteres schreiben

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{a_{r-1}}{(x-\alpha)^{r-1}} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)},$$

wo

$$a_{r-1} = \frac{f_1(\alpha)}{\varphi(\alpha)} = \frac{f'(\alpha) - a_r \varphi'(\alpha)}{\varphi(\alpha)} = \frac{r!}{g^{(r)}(\alpha)} \left(f'(\alpha) - \frac{f(\alpha)}{r+1} \cdot \frac{g^{(r+1)}(\alpha)}{g^{(r)}(\alpha)}\right)$$

ist. So geht es fort, bis man zu

$$\frac{f_{r-1}(x)}{g_{r-1}(x)} = \frac{a_1}{x-\alpha} + \frac{f_r(x)}{g_r(x)}$$

gelangt, wo $g_r(x)$ oder $\varphi(x)$ nicht mehr die Wurzel α hat. Geht man jetzt zur Betrachtung der Wurzel β und dann der Reihe nach zu den andern Wurzeln über, so sieht man, daß man schließlich zu der Formel gelangen wird

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_1}{x-\alpha} + \frac{a_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{a_r}{(x-\alpha)^r} \\ &+ \frac{b_1}{x-\beta} + \frac{b_2}{(x-\beta)^2} + \cdots + \frac{b_s}{(x-\beta)^s} + \cdots, \end{aligned}\right.$$

welche sich für $r = s = \cdots = 1$ auf (13) reduziert. Die Koeffizienten haben komplizierte Ausdrücke, die wir in kurzem finden werden. Aber von diesen Ausdrücken macht man beim praktischen Rechnen selten Gebrauch, wo man, nachdem es einmal gelungen ist die Möglichkeit einer Darstellung des Bruches in der Form (14) zu konstatieren, lieber zur Methode der unbestimmten Koeffizienten seine Zuflucht nimmt.

461. Gewöhnlich hat der gegebene Bruch reelle Koeffizienten, und es ist aus Gründen, die wir später werden einsehen können, zweckmäßig ihn in Brüche zu zerlegen, welche ebenfalls reelle Koeffizienten haben. Zu diesem Zweck läßt man die Linearfaktoren von g, welche zwei konjugiert imaginären Wurzeln α und $\bar{\alpha}$ entsprechen, vereinigt (vgl. § 450, d) in dem Produkte $x^2 + px + q$ mit reellen Koeffizienten. Da (§ 447) die Zahlen, welche man erhält, wenn man in $\frac{f}{g}$ einmal α, das andere Mal $\bar{\alpha}$ einführt, konjugiert sind, so werden die genannten Wurzeln in der Formel (13) zu der Summe

$$\frac{m}{x-\alpha} + \frac{\bar{m}}{x-\bar{\alpha}} = \frac{ax+b}{x^2+px+q}$$

Veranlassung geben, wo nun auch a und b reell sind, da $a = m + \bar{m}$, $b = -(m\bar{\alpha} + \bar{m}\alpha)$ ist. Gehen wir jetzt zu dem Falle vielfacher Wurzeln über, so werde gesetzt $g(x) = (x^2+px+q)^r \varphi(x)$ und bemerkt, daß man in der Identität

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^r} + \frac{f(x) - (ax+b)\varphi(x)}{(x^2+px+q)^r \varphi(x)}$$

über die Konstanten a und b derart verfügen kann, daß $f - (ax+b)\varphi$ durch x^2+px+q teilbar wird. Es genügt $m = \frac{f(\alpha)}{\varphi(\alpha)}$ zu berechnen und $a\alpha + b = m$, $a\bar{\alpha} + b = \bar{m}$ zu setzen, woraus reelle Werte für a und b hervorgehen. Fährt man so fort wie im vorigen Paragraphen, so sieht man, daß jedes Paar von konjugierten imaginären Wurzeln bei der Zerlegung von $\frac{f}{g}$ in einfache Brüche zu einer Summe von folgender Form Veranlassung gibt:

$$\frac{a_1 x + b_1}{x^2 + px + q} + \frac{a_2 x + b_2}{(x^2 + px + q)^2} + \cdots + \frac{a_r x + b_r}{(x^2 + px + q)^r}.$$

462. Wir wollen jetzt die Frage des § 460 noch einmal und auf andere Weise behandeln, um auch die allgemeinen Ausdrücke der Koeffizienten zu finden. Nehmen wir an, g gestatte ν verschiedene Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ von den bezüglichen Ordnungen $r, s, t, \ldots, k$, so daß

$$g(x) = (x-\alpha)^r (x-\beta)^s (x-\gamma)^t \ldots (x-\lambda)^k$$

ist. Setzen wir zur Abkürzung

$$g_1(x) = (x-\beta)^s (x-\gamma)^t \ldots (x-\lambda)^k, \quad g_2(x) = (x-\gamma)^t \ldots (x-\lambda)^k, \quad \ldots,$$
$$g_{\nu-1}(x) = (x-\lambda)^k.$$

Da g_1 für $x = \alpha$ nicht verschwindet, so kann man bei der Division von f durch g_1 den Quotienten nach steigenden Potenzen von $x - \alpha$ ordnen. Der Grad von f ist kleiner als n, der von g_1 ist $n - r$, und es wird daher, nachdem man r Glieder erhalten hat, so daß

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{f(x)}{g_1(x)} &= a_r + a_{r-1}(x-\alpha) + a_{r-2}(x-\alpha)^2 + \cdots \\ &\quad + a_1(x-\alpha)^{r-1} + (x-\alpha)^r \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \end{aligned}\right.$$

ist, der Grad von f_1 kleiner ausfallen als $n - r$. Ebenso erhält man, wenn man f_1 durch g_2 dividiert, welches den Grad $n - r - s$ hat, nach s Gliedern

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{f_1(x)}{g_2(x)} &= b_s + b_{s-1}(x-\beta) + b_{s-2}(x-\beta)^2 + \cdots \\ &\quad + b_1(x-\beta)^{s-1} + (x-\beta)^s \frac{f_2(x)}{g_2(x)}, \end{aligned}\right.$$

wo f_2 einen Grad hat, der kleiner als $n - r - s$ ist. Fährt man so fort, so gelangt man zu einer Funktion $f_{\nu-1}$, deren Grad nicht größer als $k - 1$ ist, und man kann schreiben

$$f_{\nu-1}(x) = l_k + l_{k-1}(x-\lambda) + l_{k-2}(x-\lambda)^2 + \cdots + l_1(x-\lambda)^{k-1}.$$

Jetzt dividiere man (15) durch $(x-\alpha)^r$, ferner (16) durch $(x-\beta)^s$ u. s. w., endlich die letzte Gleichung durch $(x-\lambda)^k$. Man findet auf solche Weise durch Summation die Formel (14) wieder. Es geht überdies aus dem zur Aufstellung der Gleichung (15) eingeschlagenen Verfahren hervor, daß $a_r, a_{r-1}, a_{r-2}, \ldots$ die r ersten Koeffizienten in der Reihenentwickelung der Funktion

$$\frac{f(x)}{g_1(x)} = (x-\alpha)^r \frac{f(x)}{g(x)}$$

nach steigenden Potenzen von $x - \alpha$ sind. Nun hat man

$$g(x) = (x-\alpha)^r \frac{g^{(r)}(\alpha)}{r!} + (x-\alpha)^{r+1} \frac{g^{(r+1)}(\alpha)}{(r+1)!} + (x-\alpha)^{r+2} \frac{g^{(r+2)}(\alpha)}{(r+2)!} + \cdots.$$

und die Multiplikation der Reihen

$$a_r + a_{r-1}(x-\alpha) + a_{r-2}(x-\alpha)^2 + \cdots, \quad \frac{g^{(r)}(\alpha)}{r!} + (x-\alpha)\frac{g^{(r+1)}(\alpha)}{(r+1)!} + \cdots$$

muß die Reihe liefern

$$f(x) = f(\alpha) + (x-\alpha)\frac{f'(\alpha)}{1} + (x-\alpha)^2\frac{f''(\alpha)}{1\cdot 2} + \cdots.$$

Es wird also, wenn man identifiziert,

$$(17)\quad \begin{cases} f(\alpha) = a_r \dfrac{g^{(r)}(\alpha)}{r!} \\[2ex] \dfrac{f'(\alpha)}{1} = a_{r-1}\dfrac{g^{(r)}(\alpha)}{r!} + a_r \dfrac{g^{(r+1)}(\alpha)}{(r+1)!} \\[2ex] \dfrac{f''(\alpha)}{1\cdot 2} = a_{r-2}\dfrac{g^{(r)}(\alpha)}{r!} + a_{r-1}\dfrac{g^{(r+1)}(\alpha)}{(r+1)!} + a_r\dfrac{g^{(r+2)}(\alpha)}{(r+2)!} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{f^{(r-1)}(\alpha)}{(r-1)!} = a_1\dfrac{g^{(r)}(\alpha)}{r!} + a_2\dfrac{g^{(r+1)}(\alpha)}{(r+1)!} + \cdots + a_r\dfrac{g^{(2r-1)}(\alpha)}{(2r-1)!}. \end{cases}$$

Aus diesem System linearer Gleichungen leitet man der Reihe nach die Werte der Koeffizienten a_r, a_{r-1}, a_{r-2}, ... ab; ferner ergeben sich aus dem analogen zur Wurzel β gehörigen System die Werte von b_s, b_{s-1}, b_{s-2}, ... In der Tat sind dieselben die ersten s Koeffizienten in der Reihenentwickelung der Funktion

$$\frac{f_1(x)}{g_2(x)} = (x-\beta)^s\frac{f_1(x)}{g_1(x)} = (x-\beta)^s\frac{f(x)}{g(x)} - (x-\beta)^s h(x)$$

nach steigenden Potenzen von $x-\beta$. Dabei stellt $h(x)$ eine rationale Funktion dar, die für $x=\beta$ endlich bleibt und sich daher nach steigenden Potenzen von $x-\beta$ entwickeln läßt. Da nun aber die Entwickelung von $(x-\beta)^s h(x)$ nur die Potenzen von der s-ten aufwärts enthält, so sieht man, daß b_s, b_{s-1}, b_{s-2}, ... auch die s ersten Koeffizienten in der Entwickelung von $(x-\beta)^s\dfrac{f(x)}{g(x)}$ sind und daher dem System (17) genügen, in welchem α und r in β und s zu verwandeln sind. Entsprechendes gilt von c_t, c_{t-1}, c_{t-2}, ... u. s. w. Zu einer allgemeineren Formel als (14) gelangt man durch analoge Betrachtungen, wenn man von irgend einer Zerlegung von g in ein Produkt ganzer Funktionen ausgeht, die paarweise relativ prim sind:

$$g(x) = \varphi^r(x)\,\chi^s(x)\,\psi^t(x)\,\ldots$$

Auf solche Weise findet man

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum\left\{\frac{a_1(x)}{\varphi(x)} + \frac{a_2(x)}{\varphi^2(x)} + \cdots + \frac{a_r(x)}{\varphi^r(x)}\right\},$$

wobei a_i, b_i, ... passende ganze Funktionen bezeichnen, deren Grade bezüglich kleiner sind als die Grade von φ, χ, ... Aus dieser Formel folgt insbesondere, wenn man sich an die Schlußbemerkung in § 450 erinnert, die im vorigen Paragraphen angegebene Zerlegung in Brüche mit linearen oder quadratischen Nennern, deren Koeffizienten reell sind.

463. Eine andere nützliche Anwendung der Formel (8) ist die Entwickelung von $\sin x$ und $\cos x$ in unendliche Produkte. Wir gehen aus von der in § 393 bewiesenen Formel

$$\sin m\theta = \frac{m}{1}\cos^{m-1}\theta\sin\theta - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{m-3}\theta\sin^3\theta + \cdots.$$

m sei eine ungerade Zahl $2n+1$, und es werde gesetzt $m\theta = x$, $\sin^2\theta = z$. Wir können der obigen Gleichung die Form geben

$$\frac{\sin x}{(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}} = (1-z)^n - \frac{2n(2n-1)}{6}z(1-z)^{n-1} + \cdots.$$

Die rechte Seite ist eine ganze Funktion von z vom Grade n. Zerlegen wir sie in ihre Linearfaktoren, nachdem wir bemerkt haben, daß das unabhängige Glied 1 ist:

$$\frac{\sin x}{(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}} = \left(1-\frac{z}{\alpha_1}\right)\left(1-\frac{z}{\alpha_2}\right)\cdots\left(1-\frac{z}{\alpha_n}\right).$$

Die Wurzeln α berechnet man, indem man diejenigen Werte von x aufsucht, welche den Zähler $\sin x$ zum Verschwinden bringen, mit Ausschluß des Wertes $x = 0$, der auch den Nenner zu Null macht. Für $x = \pi$, 2π, 3π, ... ergeben sich die Wurzelwerte:

$$\alpha_1 = \sin^2\frac{\pi}{2n+1},\quad \alpha_2 = \sin^2\frac{2\pi}{2n+1},\quad \ldots,\quad \alpha_n = \sin^2\frac{n\pi}{2n+1}.$$

Also ist

$$(18)\qquad \frac{\sin x}{(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}}$$

$$= \left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}\right).$$

Nach Fixierung von x sei ν eine beliebige ganze Zahl, die nicht kleiner ist als das größte in $\left|\frac{x}{\pi}\right|$ enthaltene Ganze, und man wähle $n > \nu$. Die Faktoren, welche in dem Produkte (18) auf den ν-ten folgen, sind alle zwischen 0 und 1 enthalten, und ihr Produkt, welches kleiner als die Einheit ist, ist größer (§ 155) als

$$(19)\qquad 1 - \left(\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{(\nu+1)\pi}{2n+1}} + \frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{(\nu+2)\pi}{2n+1}} + \cdots + \frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}\right).$$

Nun bemerke man folgendes: Wenn θ dem absoluten Betrage nach von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ variiert, wie es bei allen Bogen, die in dem vorstehenden

Ausdruck auftreten, der Fall ist, so nimmt $\frac{\sin\theta}{\theta}$ von 1 bis $\frac{2}{\pi}$ ab, sodaß man hat

$$\frac{4\theta^2}{\pi^2} < \sin^2\theta < \theta^2.$$

Also ist die Größe in Klammern in dem Ausdruck (19) sicherlich kleiner als

$$\frac{x^2}{4}\sum_{\nu+1}^{n}\frac{1}{r^2} < \frac{x^2}{4}\sum_{\nu+1}^{\infty}\frac{1}{r(r-1)} = \frac{x^2}{4\nu},$$

und der Ausdruck selbst läßt sich daher, weil er zwischen 1 und $1-\frac{x^2}{4\nu}$ enthalten ist, auf die Form $1-\frac{tx^2}{4\nu}$ bringen, wo t eine (mit x, n, ν veränderliche) Zahl bedeutet, die zwischen 0 und 1 liegt. Jetzt können wir der rechten Seite von (18) die Form geben

$$\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\nu\pi}{2n+1}}\right)\left(1-\frac{tx^2}{4\nu}\right).$$

Dies vorausgeschickt wollen wir ν fixieren und n ins Unendliche zunehmen lassen. Offenbar ist

$$\lim(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1} = x, \quad \lim\frac{\sin\frac{x}{2n+1}}{\sin\frac{r\pi}{2n+1}} = \frac{x}{r\pi}$$

für jeden Wert von r. Was den letzten Faktor anbetrifft, in welchem nur t variiert, so muß er einem Grenzwert zustreben, da er der Quotient einer Größe mit dem Grenzwert $\frac{\sin x}{x}$ durch eine andere ist, die sich einem von Null verschiedenen Grenzwert nähert. t hat also einen Grenzwert θ, der notwendig zwischen 0 und 1 enthalten ist. Folglich ist

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{\nu^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{\theta x^2}{4\nu}\right).$$

Läßt man endlich ν ins Unendliche zunehmen, so kommt

$$\text{(20)} \qquad \sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots.$$

Analoge Betrachtungen würden erlauben die Entwickelung von $\cos x$ zu erhalten. Es ist aber einfacher, sich der Gleichung

$$\cos x = \frac{\sin 2x}{2\sin x}$$

zu bedienen, welche mit Hilfe der vorigen Formel liefert

$$\text{(21)} \qquad \cos x = \left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\cdots.$$

Diese beiden Formeln verdankt man Euler.

464. Wir wollen zum Schluß auf einige der wichtigsten Folgerungen der letzten Formeln hinweisen.

a) Für $x = \frac{\pi}{2}$ liefert die Formel (20)

$$\frac{2}{\pi} = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right)\left(1 - \frac{1}{36}\right)\left(1 - \frac{1}{64}\right)\left(1 - \frac{1}{100}\right)\cdots.$$

Der allgemeine Faktor dieses Produktes läßt sich folgendermaßen schreiben:

$$1 - \frac{1}{4n^2} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n}.$$

Also ist

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdots.$$

Dies ist die Formel von Wallis.

b) Früher (§ 221) haben wir gefunden

$$n! = a n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+\frac{\theta}{12n}}. \tag{22}$$

Jetzt erlaubt uns die Formel von Wallis die Konstante a zu bestimmen. In der Tat kann man schreiben

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty} \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{2n}{2n-1} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{2n}\left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}\right)^2.$$

Andererseits erhält man unter Anwendung der Formel (22)

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} = \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 2n} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} = a\sqrt{\frac{n}{2}}\, e^{\frac{4\theta - \theta'}{24n}},$$

wo θ und θ' zwischen 0 und 1 enthalten sind. Also ist

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{n=\infty} \frac{a}{\sqrt{2n}} \sqrt{\frac{n}{2}}\, e^{\frac{4\theta-\theta'}{24n}} = \frac{a}{2}$$

und endlich $a = \sqrt{2\pi}$.

c) Nimmt man die Logarithmen der beiden Seiten von (20) und deriviert dann, so erhält man

$$\cot x = \frac{1}{x} - \left(\frac{2x}{\pi^2 - x^2} + \frac{2x}{4\pi^2 - x^2} + \frac{2x}{9\pi^2 - x^2} + \cdots\right). \tag{23}$$

Diese Entwickelung ist legitim, da (§ 323; § 319, a) die Reihe in Klammern gleichmäßig konvergiert. Man bemerke, daß man wegen

$$\frac{2x}{n^2\pi^2 - x^2} = \frac{1}{n\pi - x} - \frac{1}{n\pi + x}$$

auch schreiben kann

$$\cot x = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - n\pi}.$$

Auf diese Weise sind die Werte von x in Evidenz gesetzt, welche die Funktion $\cot x$ unendlich machen, ebenso wie die Formeln (20) und (21) diejenigen Werte in Evidenz setzen, welche $\sin x$ und $\cos x$ zum Verschwinden bringen.

d) Die Formel (23) hat eine wichtige Anwendung. Sie gestattet die Summe

$$s_p = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots$$

für alle geraden Werte von p zu berechnen. In der Tat leitet man aus (23) ab

$$x \cot x = 1 - \sum_1^\infty \frac{2x^2}{n^2\pi^2 - x^2} = 1 - \sum_1^\infty \left(\frac{2x^2}{n^2\pi^2} + \frac{2x^4}{n^4\pi^4} + \frac{2x^6}{n^6\pi^6} + \cdots\right)$$

oder

$$x \cot x = 1 - 2\left(\frac{s_2 x^2}{\pi^2} + \frac{s_4 x^4}{\pi^4} + \frac{s_6 x^6}{\pi^6} + \cdots\right).$$

Andererseits ist bekanntlich (§ 353)

$$x \cot x = 1 - \left(\frac{4 B_2 x^2}{2!} - \frac{4^2 B_4 x^4}{4!} + \frac{4^3 B_6 x^6}{6!} - \cdots\right).$$

Aus der Vergleichung ergibt sich die Formel

$$1 + \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{3^{2p}} + \frac{1}{4^{2p}} + \cdots = \frac{(-1)^{p-1} 2^{2p-1} B_{2p} \pi^{2p}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2p},$$

die wir früher (§ 365, a) auf anderem Wege erhalten haben.

e) Zu den Eigenschaften der Funktion Γ, die in § 252 bewiesen worden sind, sind wir jetzt in der Lage eine neue, sehr wichtige hinzuzufügen. Die Formel von Weierstraß gibt sofort

$$\frac{1}{\Gamma(1+x)\,\Gamma(1-x)} = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) = \frac{\sin \pi x}{\pi x},$$

mithin

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

Insbesondere ist $\Gamma^2(\frac{1}{2}) = \pi$, woraus folgt $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Symmetrische Funktionen und mehrwertige Funktionen.

465. Symmetrische Funktionen. Eine Funktion von n Veränderlichen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ heißt symmetrisch, wenn sie ihrer Form nach ungeändert bleibt bei jeder Vertauschung der Veränderlichen. Es sind z. B. symmetrisch die Summen c_p aller möglichen Produkte von je p der Veränderlichen, d. h.

$$c_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n,\ c_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 + \cdots,\ \cdots,\ c_n = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n.$$

Dies sind die elementaren symmetrischen Funktionen. Setzt man, was immer möglich ist,

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = a_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n),$$

so erhält man, indem man die rechte Seite entwickelt und dann identifiziert, die Relationen

$$c_1 = -\frac{a_1}{a_0}, \quad c_2 = \frac{a_2}{a_0}, \quad c_3 = -\frac{a_3}{a_0}, \quad \ldots, \quad c_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0},$$

welche festzuhalten sind. Insbesondere vergesse man nicht, daß bei jeder algebraischen Gleichung die Summe der Wurzeln gleich dem Koeffizienten des zweiten Gliedes ist, dividiert durch den des ersten Gliedes und mit dem entgegengesetzten Vorzeichen versehen. Wichtig sind auch die symmetrischen Funktionen

$$s_p = \alpha_1^p + \alpha_2^p + \alpha_3^p + \cdots + \alpha_n^p,$$

spezielle Fälle der Funktionen

$$\sum \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \alpha_3^{p_3} \ldots \alpha_\nu^{p_\nu}, \tag{24}$$

welche man erhält, indem man alle Veränderlichen auf alle möglichen Arten vertauscht. Es liegt auf der Hand, daß diese letzten Funktionen, wenn man sie miteinander linear kombiniert, alle ganzen symmetrischen Funktionen liefern, die man sich denken kann.

466. Formel von Girard. Deriviert man die ganze Funktion $f(x)$, nachdem man sie in ihre Linearfaktoren zerlegt hat, so erhält man

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - \alpha_1} + \frac{1}{x - \alpha_2} + \cdots + \frac{1}{x - \alpha_n}.$$

Nun hat man für $|x| > |\alpha|$

$$\frac{1}{x - \alpha} = \frac{1}{x} + \frac{\alpha}{x^2} + \frac{\alpha^2}{x^3} + \cdots.$$

Wählt man also x seinem Modul nach größer als alle α, so ist

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{s_0}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \frac{s_2}{x^3} + \cdots,$$

d. h. es besteht die Identität

$$\left(1 - \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} - \cdots\right)\left(s_0 + \frac{s_1}{x} + \frac{s_2}{x^2} + \cdots\right)$$
$$= n - (n-1)\frac{c_1}{x} + (n-2)\frac{c_2}{x^2} - \cdots.$$

Die Reihen sind hier unendlich, wenn man übereinkommt $c_p = 0$ zu setzen, sobald p größer ist als n. Vergleicht man miteinander die Koeffizienten von x^{-p}, so erhält man

$$(n-p)\, c_p = s_0 c_p - s_1 c_{p-1} + s_2 c_{p-2} - \cdots \pm s_p$$

oder

$$p c_p = s_1 c_{p-1} - s_2 c_{p-2} + s_3 c_{p-3} - \cdots \mp s_p.$$

Dies ist die Formel von Girard[1]), welche gestattet durch successive Rechnungen die s und die c als ganze rationale Funktionen voneinander auszudrücken. Man findet dabei die Relationen

$$s_2 = c_1^2 - 2c_2, \qquad c_2 = \tfrac{1}{2}(s_1^2 - s_2)$$

$$s_3 = c_1^3 - 3c_1c_2 + 3c_3, \qquad c_3 = \tfrac{1}{6}(s_1^3 - 3s_1s_2 + 2s_3),$$

$$s_4 = c_1^4 - 4c_1^2c_2 + 4c_1c_3 + 2c_2^2 - 4c_4, \quad c_4 = \tfrac{1}{24}(s_1^4 - 6s_1^2s_2 + 8s_1s_3 + 3s_2^2 - 6s_4)$$

. . . .

467. Formeln von Waring. Zu denselben Relationen gelangt man direkt, wenn man von der Identität ausgeht

$$\left(1 - \frac{\alpha_1}{x}\right)\left(1 - \frac{\alpha_2}{x}\right) \cdots \left(1 - \frac{\alpha_n}{x}\right) = 1 - \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} - \cdots \pm \frac{c_n}{x^n}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$u = \frac{c_1}{x} - \frac{c_2}{x^2} + \frac{c_3}{x^3} - \cdots, \qquad v = \frac{s_1}{x} + \frac{s_2}{2x^2} + \frac{s_3}{3x^3} + \cdots,$$

so ergibt sich aus der vorigen Gleichung, wenn man die Logarithmen ihrer beiden Seiten nimmt und bekannte Entwickelungen (§ 332, a, c) anwendet

$$(25) \qquad v = -\log(1 - u) = u + \tfrac{1}{2}u^2 + \tfrac{1}{3}u^3 + \cdots,$$

vorausgesetzt, daß $|x|$ groß genug ist, um $|u| < 1$ zu machen; dies ist immer möglich, da u mit unendlich zunehmendem x nach Null konvergiert. Umgekehrt ist

$$(26) \qquad u = 1 - e^{-v} = \frac{v}{1} - \frac{v^2}{1 \cdot 2} + \frac{v^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \cdots.$$

Bezeichnen wir nun mit

$$\mathop{\mathrm{S}}_{p}^{r} \varepsilon_i$$

die Summe aller Produkte $\varepsilon_{i_1}\varepsilon_{i_2}\varepsilon_{i_3} \ldots \varepsilon_{i_r}$, in welchen die $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_r$ als positive ganze Zahlen vorausgesetzt werden, die gleich oder ungleich sind und die Summe p haben. Setzen wir mit andern Worten

$$\mathop{\mathrm{S}}_{p}^{1} \varepsilon_i = \varepsilon_p, \quad \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{2} \varepsilon_i = \varepsilon_1\varepsilon_{p-1} + \varepsilon_2\varepsilon_{p-2} + \cdots + \varepsilon_{p-1}\varepsilon_1, \quad \ldots, \quad \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{p} \varepsilon_i = \varepsilon_1^p.$$

Dies vorausgeschickt braucht man nur die Koeffizienten von x^{-p} in

---

1) Ein geistreicher anschaulicher Beweis findet sich bei Lucas „Théorie des nombres" (p. 268).

den Relationen (25) und (26) miteinander zu vergleichen, um die Formeln von Waring zu erhalten:

$$s_p = p\sum_{r=1}^{r=p}\left(\frac{(-1)^{p-r}}{r}\underset{p}{\mathrm{S}}\, c_i\right), \quad c_p = \sum_{r=1}^{r=p}\left(\frac{(-1)^{p-r}}{r!}\cdot\underset{p}{\overset{r}{\mathrm{S}}}\frac{s_i}{i}\right).$$

468. Theorem. Jede ganze symmetrische Funktion ist eine ganze rationale Funktion der elementaren symmetrischen Funktionen.

Dieses wichtige Theorem haben wir bereits bewiesen für die Funktionen $s_1, s_2, s_3, \ldots$, d. h. für die Funktionen vom Typus (24) in dem speziellen Falle $\nu = 1$. Es genügt also zu zeigen, daß es für einen gegebenen Wert von ν gilt, wenn es für jeden kleineren Wert richtig ist. Führt man nun bei der Funktion (24) eine erste Summation aus, so läßt sich dieselbe folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned}
&\sum \alpha_1^{p_1}\alpha_2^{p_2}\ldots\alpha_{\nu-1}^{p_{\nu-1}}\left(s_{p_\nu} - \alpha_1^{p_\nu} - \alpha_2^{p_\nu} - \cdots - \alpha_{\nu-1}^{p_\nu}\right)\\
&= \sum \alpha_1^{p_1}\alpha_2^{p_2}\ldots\alpha_{\nu-1}^{p_{\nu-1}}\cdot\sum\alpha_1^{p_\nu} - \sum\alpha_1^{p_1+p_\nu}\alpha_2^{p_2}\ldots\alpha_{\nu-1}^{p_{\nu-1}}\\
&- \sum\alpha_1^{p_1}\alpha_2^{p_2+p_\nu}\ldots\alpha_{\nu-1}^{p_{\nu-1}} - \cdots - \sum\alpha_1^{p_1}\alpha_2^{p_2}\ldots\alpha_{\nu-1}^{p_{\nu-1}+p_\nu}.
\end{aligned}$$

Die Funktionen, welche auf der rechten Seite auftreten, sind alle vom Typus (24), abgesehen von der Verwandlung von ν in $\nu - 1$ oder in 1. Sie lassen sich daher als ganze rationale Funktionen der elementaren symmetrischen Funktionen ausdrücken, und das Gleiche läßt sich also von der linken Seite behaupten. Faktisch setzt die vorstehende Umformung voraus, daß die Exponenten p alle verschieden seien; aber wenn es passiert, daß zwei oder mehr Exponenten einander gleich sind, so sind die Reduktionen, die man dann erhält, nicht derart, daß sie das Theorem zu Falle bringen. Es genügt ferner, sich die s durch die entsprechenden Ausdrücke in den c ersetzt zu denken, um sich von der Richtigkeit des ausgesprochenen Satzes zu überzeugen.

469. Hier einige Beispiele. Die Funktion (24) ist für $\nu = 2$ gleich

$$\sum\alpha_1^{p_1}\left(\alpha_2^{p_2} + \alpha_3^{p_2} + \cdots + \alpha_n^{p_2}\right) = \sum\alpha_1^{p_1}\left(s_{p_2} - \alpha_1^{p_2}\right).$$

Also ist

$$(27) \qquad \sum\alpha_1^{p_1}\alpha_2^{p_2} = s_{p_1}s_{p_2} - s_{p_1+p_2};$$

wenn aber $p_1 = p_2 = p$ ist, so ist jedes Glied zweimal gerechnet, und man muß daher das, was aus dem Ausdruck (27) wird, auf die Hälfte reduzieren:

$$\sum\alpha_1^p\alpha_2^p = \tfrac{1}{2}\left(s_p^2 - s_{2p}\right).$$

Ebenso ist

$$\sum\alpha_1^{p_1}\alpha_2^{p_2}\alpha_3^{p_3} = \sum\alpha_1^{p_1}\alpha_2^{p_2}\left(s_{p_3} - \alpha_1^{p_3} - \alpha_2^{p_3}\right).$$

Benutzt man jetzt (27), so kann man für den letzten Ausdruck schreiben

$$s_{p_3}(s_{p_1}s_{p_2} - s_{p_1+p_2}) - (s_{p_1+p_3}s_{p_2} - s_{p_1+p_2+p_3}) - (s_{p_1}s_{p_2+p_3} - s_{p_1+p_2+p_3}).$$

Also wird

$$(28)\qquad \sum \alpha_1^{p_1}\alpha_2^{p_2}\alpha_3^{p_3} = s_{p_1}s_{p_2}s_{p_3} - (s_{p_1}s_{p_2+p_3} + s_{p_2}s_{p_3+p_1} + s_{p_3}s_{p_1+p_2}) + 2\, s_{p_1+p_2+p_3},$$

aber, wenn $p_1 = p_2 = p_3$ ist,

$$\sum \alpha_1^p \alpha_2^p \alpha_3^p = \tfrac{1}{6}\left(s_p^3 - 3\, s_p s_{2p} + 2\, s_{3p}\right).$$

470. Bei der praktischen Rechnung ist es zweckmäßig, den Umweg über die Funktionen s zu vermeiden, und dieses Ziel erreicht man, wenn man sich von der Betrachtung des Gewichts und des Grades des gesuchten Ausdrucks leiten läßt. In den Gliedern dieses Ausdrucks können nicht mehr als p Faktoren c vorkommen, wenn p der größte Exponent in der Funktion (24) ist; denn jedes c ist vom ersten Grade in jedem α. Dagegen ist der Grad eines jeden c in allen Veränderlichen genau gleich seinem Index, und das Gewicht des gesuchten Ausdrucks muß daher gleich der Totalanzahl der gleichen oder ungleichen Veränderlichen sein, die in jedem Gliede von (24) vorkommen, d. h. gleich $p_1 + p_2 + \cdots + p_\nu$ sein. Es werde z. B. verlangt,

$$\sum \alpha_1 \alpha_2^2 \alpha_3^3$$

durch die elementaren symmetrischen Funktionen auszudrücken. Die Formel (28) gibt sofort

$$\sum \alpha_1 \alpha_2^2 \alpha_3^3 = s_1 s_2 s_3 - (s_1 s_5 + s_2 s_4 + s_3^2) + 2 s_6.$$

Aber man müßte jetzt noch alle s durch ihre Ausdrücke in den c ersetzen, und die auszuführende Rechnung wäre zu lang, und ihr Resultat ließe sich nicht leicht verifizieren. Dagegen gestatten die vorhin gemachten Bemerkungen sofort zu schreiben

$$\sum \alpha_1 \alpha_2^2 \alpha_3^3 = k_0 c_6 + k_1 c_1 c_5 + k_2 c_2 c_4 + k_3 c_3^2 + k_4 c_1^2 c_4 + k_5 c_2^3 + k_6 c_1 c_2 c_3.$$

Man bestimmt dann die numerischen Konstanten k, indem man diese Gleichung sieben Mal schreibt für sieben beliebig gewählte spezielle Fälle. Auf diese Weise gelangt man im allgemeinen zur Aufstellung eines Systems von linearen Gleichungen, welches die Werte der k liefert. Im vorliegenden Falle erhält man[1])

$$\sum \alpha_1 \alpha_2^2 \alpha_3^3 = -12 c_6 + 7 c_1 c_5 + 4 c_2 c_4 - 3 c_3^2 - 3 c_1^2 c_4 + c_1 c_2 c_3.$$

471. Berechnung der Diskriminante. Von großem Interesse ist die symmetrische Funktion

$$\Delta = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_1 - \alpha_3)^2 (\alpha_2 - \alpha_3)^2 \ldots (\alpha_{n-1} - \alpha_n)^2,$$

1) Man hat Tafeln der symmetrischen Funktionen bis zum dreizehnten Grade konstruiert, wo man ihre Ausdrücke durch die elementaren Funktionen findet. Siehe die „Algebra der linearen Transformationen“ von Salmon-Fiedler (2. Aufl., S. 444).

welche man die Diskriminante (§ 33, b) der Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ nennt. Da ihr Verschwinden notwendig und hinreichend für die Gleichheit zwischen zwei oder mehr Größen α ist, so ist klar (§ 457), daß die Diskriminante einer algebraischen Gleichung sich von der Diskriminante ihrer Wurzeln nur um einen konstanten Faktor unterscheiden kann. Wir haben also eine neue Methode für die Berechnung der Diskriminante einer gegebenen Gleichung. Die Diskriminante der Gleichung dritten Grades

$$x^3 - c_1 x^2 + c_2 x - c_3 = 0$$

ist z. B.

$$\varDelta = (\alpha_2 - \alpha_3)^2 (\alpha_3 - \alpha_1)^2 (\alpha_1 - \alpha_2)^2,$$

wenn α_1, α_2, α_3 die Wurzeln dieser Gleichung sind. Um dieselbe durch die c auszudrücken, wollen wir die im vorigen Paragraphen auseinandergesetzte Methode anwenden. Beachten wir, daß jedes α in der Entwickelung von $\varDelta$ im vierten Grade vorkommt, daß jedes Glied der Entwickelung aus sechs Faktoren besteht, die gleich oder ungleich sind, und endlich, daß $c_p = 0$ ist, wenn p größer als 3 ist, so müssen wir vor allem die Zerlegungen von 6 in Summen von vier ganzen Zahlen aufsuchen, die zwischen 0 und 3 einschließlich enthalten sind. Es sind dies folgende:

$$0 + 0 + 3 + 3, \quad 1 + 1 + 2 + 2, \quad 0 + 2 + 2 + 2, \quad 1 + 1 + 1 + 3,$$
$$0 + 1 + 2 + 3.$$

Jetzt können wir sofort setzen

$$\varDelta = k_0 c_3^2 + k_1 c_1^2 c_2^2 + k_2 c_2^3 + k_3 c_1^3 c_3 + k_4 c_1 c_2 c_3.$$

Um die k zu bestimmen, erteilen wir den α verschiedene Systeme von Werten. Zunächst bemerken wir, daß für $\alpha_3 = 0$ die vorstehende Gleichung in

$$(\alpha_1 - \alpha_2)^2 = k_1 (\alpha_1 + \alpha_2)^2 + k_2 \alpha_1 \alpha_2$$

übergeht. Es ist also $k_1 = 1$, $k_2 = -4$. Nehmen wir ferner an, die α seien gleich den kubischen Einheitswurzeln, und beachten wir, daß $\omega^2 - 1 = \omega(\omega - \omega^2)$, $1 - \omega = \omega^2(\omega - \omega^2)$ ist, so ergibt sich $\varDelta = (\omega - \omega^2)^6 = (\sqrt{-3})^6 = -27$. Andererseits wird, da $c_1 = c_2 = 0$, $c_3 = 1$ ist, $\varDelta = k_0$. Also ist $k_0 = -27$. Setzen wir noch die α gleich 2, 2, -1, so daß $c_1 = 3$, $c_2 = 0$, $c_3 = -4$ wird, so finden wir $4k_0 = 27k_3$, woraus wir entnehmen $k_3 = -4$. Setzen wir dagegen die α gleich 1, 1, -1, sodaß also $c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = -1$ wird, so erhalten wir $k_0 + k_1 - k_2 - k_3 + k_4 = 0$, also $k_4 = 18$. Mithin ist (vgl. § 458)

$$\varDelta = -27 c_3^2 + c_1^2 c_2^2 - 4 c_2^3 - 4 c_1^3 c_3 + 18 c_1 c_2 c_3. \tag{29}$$

Man bemerke, daß in der Diskriminante einer Gleichung n-ten Grades immer das Glied $-n^n c_n^{n-1}$ auftritt. Endlich ist es zweckmäßig, hier daran zu erinnern (§ 33, b), daß $\varDelta$ sich in den s durch das Quadrat der Vandermondeschen Determinante ausdrückt. Bei der Gleichung dritten Grades ist

$$\varDelta = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = -3s_3^2 - s_2^3 + 2s_1 s_2 s_3 - s_1^2 s_4 + 3s_2 s_4,$$

ein Ausdruck, der sich mit Hilfe der Formeln am Schlusse des § 466 auf die Form (29) reduzieren läßt.

472. Die Theorie der symmetrischen Funktionen führt zu einer Eliminationsmethode, die man vom theoretischen Gesichtspunkte aus als die befriedigendste betrachten kann. Wenn f und g zwei ganze Funktionen sind, welche die Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ bezw. $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ haben, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß f für eine Wurzel von g gleich Null wird, das Verschwinden des Produktes $f(\beta_1) f(\beta_2) \ldots f(\beta_m)$, welches eine symmetrische Funktion der Wurzeln von g ist. Die Theorie der symmetrischen Funktionen lehrt uns das vorstehende Produkt in eine ganze rationale Funktion der Koeffizienten der beiden Polynome zu verwandeln, und man hat auf diese Weise eine neue Methode zur Bestimmung der Resultante. Die Resultante von f und g kann sich also nur um konstante Faktoren von den Produkten

$$f(\beta_1) f(\beta_2) \ldots f(\beta_m), \quad g(\alpha_1) g(\alpha_2) \ldots g(\alpha_n)$$

unterscheiden. Hiernach ist das Theorem von Bézout (§ 443) evident. Bringt man ferner, was immer geschehen kann, die Polynome auf die Form

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n), \quad g(x) = (x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_m),$$

so sieht man nach dem Obigen sofort, daß die Resultante gleich

$$\prod_{i=1}^{i=n} (\alpha_i - \beta_1)(\alpha_i - \beta_2) \ldots (\alpha_i - \beta_m) = \prod_{i,\,j}^{n,\,m} (\alpha_i - \beta_j)$$

ist, d. h. gleich dem Produkt der Differenzen zwischen allen Wurzeln des einen Polynoms und allen denen des andern.

473. Die letzte Eliminationsmethode kann auch zur Berechnung gewisser Determinanten dienen. So ist z. B. die Resultante der Funktionen

$$x^n - 1, \quad f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a_n x^{n-1}$$

nach der Eulerschen Methode

$$\mathfrak{R} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \dots & a_{n-1} & a_n & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \dots & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \dots & 0 & a_1 & a_2 & a_3 \dots & a_n \\ -1 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \dots & -1 & 0 & 0 & 0 \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Addiert man zu den $n-1$ ersten Vertikalreihen der Reihe nach die $n-1$ letzten, so erhält man

$$(30) \qquad \mathfrak{R} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 \dots & a_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 & a_3 & a_4 \dots & a_1 \end{vmatrix}.$$

Zu dieser Resultante gelangt man sofort mit Hilfe der Methode von Bézout. Andererseits haben wir gesehen, daß die gesuchte Resultante gleich $f(1)f(\omega)f(\omega^2)\dots f(\omega^{n-1})$ ist, wo $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$ die n-ten Einheitswurzeln sind. Durch Vergleichung leitet man den Wert der Zirkulante (30) ab (vgl. § 33, c). Z. B. ist

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c).$$

Führt man die Multiplikation aus und berücksichtigt die Relationen $\omega+\omega^2=-1$ und $\omega^3=1$, so wird die rechte Seite

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab) = a^3+b^3+c^3-3abc.$$

474. Funktionen mit zwei oder mehr Werten. Für jedes System von Werten, die man ihren n Veränderlichen beilegt, ist eine Funktion im allgemeinen fähig $n!$ Werte anzunehmen, d. h. so viele Werte, als es Permutationen gibt, die sich mit den Veränderlichen vornehmen lassen. Es versteht sich jedoch, daß die Zahl der Werte für spezielle Funktionen niedriger sein kann. So haben z. B. die symmetrischen Funktionen nur einen Wert für jedes System von Werten, die den Veränderlichen beigelegt werden, und man kann leicht zeigen[1]), daß diese Eigenschaft jene Funktionen charakterisiert.

1) Siehe die „Substitutionentheorie“ von Netto, S. 1.

Die Determinante von Vandermonde (§ 27, d; § 471) oder $\sqrt{\Delta}$ ist nur imstande zwei Werte anzunehmen, da sie bei jeder Transposition zweier Veränderlicher nur ihr Zeichen ändert, so daß jede gerade Substitution sie ungeändert läßt, während eine ungerade Substitution sie in $-\sqrt{\Delta}$ verwandelt. Die Funktionen, welche wie $\sqrt{\Delta}$ nur zweier Werte fähig sind, die sich nur im Vorzeichen unterscheiden, heißen alternierend.

475. Die allgemeine Form der alternierenden Funktionen ist $\varsigma\sqrt{\Delta}$, wo ς eine symmetrische Funktion bezeichnet. Es gibt mindestens eine Transposition, welche die gegebene Funktion φ in $-\varphi$ verwandelt. Sonst bliebe φ überhaupt bei jeder Substitution (§ 5) ungeändert, wäre also symmetrisch. $(\alpha_i\alpha_j)$ sei die Transposition um welche es sich handelt. Sie bringt keine Änderung in φ mit sich, wenn $\alpha_i = \alpha_j$ ist, und es muß daher unter dieser Voraussetzung $\varphi = -\varphi$ sein, d. h. φ muß gleichzeitig mit $\alpha_i - \alpha_j$ verschwinden. Daraus folgt, daß die Funktion φ, die wir in dieser ganzen Theorie als ganz und rational in jeder ihrer Veränderlichen voraussetzen, durch $\alpha_i - \alpha_j$ teilbar ist, mithin φ^2 teilbar durch $(\alpha_i - \alpha_j)^2$. Aber die Funktion φ^2, die offenbar symmetrisch ist, kann nicht den Faktor $(\alpha_i - \alpha_j)^2$ zulassen, ohne gleichzeitig alle anderen analogen Faktoren zu besitzen. Sie ist also teilbar durch Δ, mithin φ teilbar durch $\sqrt{\Delta}$. Es sei ν der Exponent der höchsten Potenz von $\sqrt{\Delta}$, welche in φ enthalten ist. Wenn ν gerade wäre, so wäre der Quotient von φ durch die symmetrische Funktion $(\sqrt{\Delta})^\nu$ eine alternierende Funktion, und φ müßte also noch andere Faktoren $\sqrt{\Delta}$ enthalten gegen die Voraussetzung. Also muß ν eine ungerade Zahl $2k+1$ sein und der Quotient von φ durch $(\sqrt{\Delta})^\nu$ ist notwendig eine symmetrische Funktion ς'. Man kann daher setzen

$$\varphi = \varsigma'(\sqrt{\Delta})^{2k+1} = \varsigma\sqrt{\Delta},$$

wenn man mit ς die symmetrische Funktion $\varsigma'\Delta^k$ bezeichnet. Man bemerke endlich, daß die Substitutionen, für welche φ ungeändert bleibt, dieselben sind, die $\sqrt{\Delta}$ ungeändert lassen, d. h. die geraden Substitutionen. Dies hätte man a priori nicht behaupten können.

476. Die allgemeine Form der zweiwertigen Funktionen ist $\varsigma_1 \pm \varsigma_2\sqrt{\Delta}$, wo ς_1 und ς_2 symmetrische Funktionen darstellen. φ_1 und φ_2 seien die beiden Werte der Funktion. Jede Substitution, die man mit den Veränderlichen vornimmt, läßt immer φ_1 von φ_2 verschieden, da man mit einer solchen Substitution nur eine andere Benennung der Veränderlichen bewirkt. Daraus folgt, daß jede beliebige Substitution entweder φ_1 und φ_2 beide ungeändert läßt oder sie miteinander vertauscht. Also ist $\varphi_1 + \varphi_2$ eine symmetrische Funktion, während $\varphi_1 - \varphi_2$ alternierend ist. Daraus ergibt sich, daß man setzen kann

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 2\varsigma_1, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = 2\varsigma_2\sqrt{\Delta},$$

mithin

$$\varphi_1 = \varsigma_1 + \varsigma_2\sqrt{\Delta}, \quad \varphi_2 = \varsigma_1 - \varsigma_2\sqrt{\Delta}.$$

477. Die Funktionen, welche bei jeder geraden Substitution oder bei jeder zirkularen Substitution zwischen drei Veränderlichen ungeändert bleiben, haben nicht mehr als zwei Werte. Zunächst bemerke man, daß eine Funktion, wenn sie bei jeder zirkularen Substitution in drei Veränderlichen sich nicht ändert, auch bei jeder geraden Substitution ungeändert bleibt (§ 10). Wenn die Funktion nun, außer den Werten φ_1 und φ_2 noch einen dritten Wert φ_3 hätte, so sind die Substitutionen, die φ_1 in φ_2 und φ_2 in φ_3 verwandeln, notwendig ungerade und zusammengenommen mit einer geraden Substitution äquivalent. Es könnte sich also unmöglich φ_3 von φ_1 unterscheiden. Das Theorem läßt sich leicht ausdehnen auf Funktionen, die bei jeder zirkularen Substitution in einer bestimmten ungeraden Zahl von Veränderlichen ungeändert bleiben.

478. Die symmetrischen und die alternierenden Funktionen sind die einzigen, die symmetrische Potenzen haben können. φ sei eine nicht symmetrische Funktion, aber von der Beschaffenheit, daß φ^p symmetrisch ist. Man kann sich leicht überzeugen, indem man den Exponenten in Primfaktoren zerlegt, daß man die Aufsuchung der Funktionen φ auf den Fall eines Primzahlexponenten p beschränken darf. Es gibt wenigstens eine Transposition, welche einen der Werte der Funktion, z. B. φ_1, in einen andern von ihren Werten, etwa φ_2, verwandelt. Nun ist für jede Substitution nach der Voraussetzung $\varphi_1{}^p = \varphi_2{}^p$, mithin $\varphi_2 = \omega\varphi_1$, wo ω wie gewöhnlich eine von 1 verschiedene p-te Einheitswurzel bedeutet. Wendet man dieselbe Transposition noch einmal an, so geht die Relation $\varphi_2 = \omega\varphi_1$ über in $\varphi_1 = \omega\varphi_2$, woraus sich durch Multiplikation $\omega^2 = 1$ ergibt. Es ist also, da p als Primzahl vorausgesetzt wird, notwendig $p = 2$, mithin $\varphi_2 = -\varphi_1$, so daß die Funktion alternierend ist, wenn sie nicht symmetrisch ist.

479. Die einzigen Funktionen von mehr als vier Veränderlichen, welche zweiwertige Potenzen haben können, sind notwendig zweiwertig. Auch hier können wir uns darauf beschränken, den Fall eines Primzahlexponenten zu betrachten. Wenn die Funktion φ mehr als zwei Werte hat, so gibt es (§ 477) wenigstens eine zirkulare Substitution in drei Veränderlichen, welche einen ihrer Werte φ_1 in einen andern φ_2 verwandelt. Dagegen ändert dieselbe Substitution nicht die Potenz φ^p, die als zweiwertig vorausgesetzt wird. Es wird also sein $\varphi_1^p = \varphi_2^p$ und daher $\varphi_2 = \omega\varphi_1$. Wendet man die betrachtete Substitution wiederholt an, so kommt $\varphi_3 = \omega\varphi_2$ und dann $\varphi_1 = \omega\varphi_3$, folglich $\omega^3 = 1$. Also ist $p = 3$. Alles obige läßt sich wiederholen für eine zirkulare Substitution in fünf Veränderlichen. Man findet $p = 5$, und dieses Resultat ist nicht vereinbar mit dem vorigen. Es ist also absurd anzunehmen, daß φ mehr als zwei Werte haben kann, wenn die Zahl der Veränderlichen nicht kleiner ist als fünf, in welchem Falle man nicht mehr von Substitutionen in fünf Veränderlichen sprechen kann.

480. Es ist leicht zu zeigen, daß für $n \leqq 4$ Funktionen mit mehr als zwei Werten existieren, die eine zweiwertige Potenz haben. Man betrachte z. B. die Funktion

$$\varphi_1 = \alpha_1 + \omega\alpha_2 + \omega^2\alpha_3,$$

wo

$$\omega = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}, \quad \omega^2 = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}$$

ist. Wenn man zwei Mal nacheinander die Substitution $(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3)$ anwendet, so verwandelt sich φ_1 successiv in

$$\varphi_2 = \alpha_2 + \omega\alpha_3 + \omega^2\alpha_1 = \omega^2(\alpha_1 + \omega\alpha_2 + \omega^2\alpha_3) = \omega^2\varphi_1,$$
$$\varphi_3 = \alpha_3 + \omega\alpha_1 + \omega^2\alpha_2 = \omega(\alpha_1 + \omega\alpha_2 + \omega^2\alpha_3) = \omega\varphi_1.$$

Nun hat man für jeden von diesen Werten

$$\varphi^3 = \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + 6\alpha_1\alpha_2\alpha_3$$
$$+ 3\omega(\alpha_3\alpha_2^2 + \alpha_1\alpha_3^2 + \alpha_2\alpha_1^2) + 3\omega^2(\alpha_2\alpha_3^2 + \alpha_3\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2^2).$$

Die Funktion φ^3, welche zweiwertig ist, muß sich (§§ 468, 476) durch die elementaren symmetrischen Funktionen

$$c_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad c_2 = \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2, \quad c_3 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3$$

und die Diskriminante (29) ausdrücken lassen. In der Tat hat man unter Benutzung der am Ende des § 473 gefundenen Identität

$$\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + 6\alpha_1\alpha_2\alpha_3$$
$$= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_2\alpha_3 - \alpha_3\alpha_1 - \alpha_1\alpha_2) + 9\alpha_1\alpha_2\alpha_3$$
$$= c_1(c_1^2 - 3c_2) + 9c_3.$$

Ferner ist

$$(\alpha_2\alpha_3^2 + \alpha_3\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2^2) + (\alpha_3\alpha_2^2 + \alpha_1\alpha_3^2 + \alpha_2\alpha_1^2)$$
$$= \alpha_2\alpha_3(c_1 - \alpha_1) + \alpha_3\alpha_1(c_1 - \alpha_2) + \alpha_1\alpha_2(c_1 - \alpha_3) = c_1c_2 - 3c_3.$$

Dagegen ist

$$(\alpha_2\alpha_3^2 + \alpha_3\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2^2) - (\alpha_3\alpha_2^2 + \alpha_1\alpha_3^2 + \alpha_2\alpha_1^2)$$
$$= (\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_2) = \pm\sqrt{\Delta}.$$

Also ist

$$\varphi^3 = \tfrac{1}{2}(2c_1^3 - 9c_1c_2 + 27c_3) \pm \tfrac{3}{2}\sqrt{-3\Delta}. \tag{31}$$

481. Ebenso ist die Funktion in vier Veränderlichen

$$\varphi = (\alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3) + \omega(\alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_1) + \omega^2(\alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_2)$$

von der Beschaffenheit, daß ihr Kubus eine zweiwertige Funktion ist. Setzt man in der Tat

$$\beta_1 = \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\,,\quad \beta_2 = \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_1\,,\quad \beta_3 = \alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_2\,,$$

so zieht die Substitution $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$ die andere $(\beta_1\beta_2\beta_3)$ nach sich, und man wird daher den Ausdruck von φ^3 erhalten, indem man auf der rechten Seite von (31) c_1 durch die Summe der β, d. h. durch c_2, ersetzt, c_2 durch

$$\beta_2\beta_3 + \beta_3\beta_1 + \beta_1\beta_2 = c_1c_3 - 4c_4\,,$$

c_3 durch

$$\beta_1\beta_2\beta_3 = c_1^2c_4 - 4c_2c_4 + c_3^2$$

und endlich $\pm\sqrt{\Delta}$ durch

$$(\beta_2 - \beta_3)(\beta_3 - \beta_1)(\beta_1 - \beta_2)$$
$$= (\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_3) = \pm\sqrt{\Delta}\,.$$

Also ist

$$\varphi^3 = \tfrac{1}{2}(2c_2^3 - 9c_1c_2c_3 + 27c_1^2c_4 - 72c_2c_4 + 27c_3^2) \pm \tfrac{3}{2}\sqrt{-3\Delta}\,.$$

Im folgenden werden wir sehen, daß gerade auf der Existenz dieser Ausnahmefunktionen die Möglichkeit beruht, die Gleichungen der ersten vier Grade durch Wurzelzeichen aufzulösen.

Berechnung der Invarianten und andere Anwendungen.

482. Von den Betrachtungen des § 470 kann man eine nützliche Anwendung machen auf die Bildung der Invarianten der binären Formen, wenn man von der Bemerkung ausgeht, daß eine Invariante als ganze rationale Funktion der Koeffizienten einer Form $f(x, y)$, die man (wie in § 457) durch Homogenmachen der ganzen Funktion $f(x)$ erhält, eine symmetrische Funktion der Wurzeln von $f(x)$ mit folgender Eigenschaft ist: Sie bleibt ungeändert, wenn man in $f(x, y)$ die Veränderlichen einer beliebigen linearen Transformation unterwirft oder, was offenbar dasselbe bedeutet, in $f(x)$ an Stelle von x einsetzt $\dfrac{ax + b}{cx + d}\cdot$ Dabei verwandelt sich die Differenz $\alpha_i - \alpha_j$ zweier Wurzeln in

$$\frac{a\alpha_i + b}{c\alpha_i + d} - \frac{a\alpha_j + b}{c\alpha_j + d} = \frac{(ad - bc)(\alpha_i - \alpha_j)}{(c\alpha_i + d)(c\alpha_j + d)}\,.$$

Damit eine Funktion der Differenzen $\alpha_i - \alpha_j$ sich, abgesehen von einem Faktor, in sich selbst transformiere, ist offenbar notwendig, daß alle

Wurzeln dieselbe Zahl von Malen in jedem Gliede vorkommen, was bei der Diskriminante der Fall ist. Z. B. ist die Funktion

$$(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\alpha_1 - \alpha_3)^2 + (\alpha_2 - \alpha_3)^2 + \cdots + (\alpha_{n-1} - \alpha_n)^2$$

nur für $n = 2$ eine Invariante. Ihr Wert ist (§ 30)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} = (n-1)c_1^{\,2} - 2nc_2\,.$$

Ebenso ist für die biquadratische Binärform eine Invariante die folgende Funktion

$$(\alpha_2 - \alpha_3)^2(\alpha_1 - \alpha_4)^2 + (\alpha_3 - \alpha_1)^2(\alpha_2 - \alpha_4)^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)^2(\alpha_3 - \alpha_4)^2,$$

welche sich unter Benutzung der früher angegebenen Methode durch die Koeffizienten ausdrückt. Setzt man, wie es geschehen muß (§ 470),

$$\tfrac{1}{2}\sum(\alpha_2 - \alpha_3)^2(\alpha_1 - \alpha_4)^2 = k_0 c_2^{\,2} + k_1 c_1 c_3 + k_2 c_4\,,$$

so erhält man für $\alpha_1 = \alpha_3$ und $\alpha_2 = \alpha_4$

$$(\alpha_1 - \alpha_2)^4 = k_0(\alpha_1^{\,2} + \alpha_2^{\,2} + 4\alpha_1\alpha_2)^2 + 4k_1\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + k_2\alpha_1^{\,2}\alpha_2^{\,2};$$

mithin ist $k_0 = 1$, $k_1 = -3$, $k_2 = 12$. Auf diese Weise findet man die quadratische Invariante der biquadratischen Binärform wieder:

$$I = c_2^{\,2} - 3c_1 c_3 + 12 c_4\,. \tag{32}$$

Es ist bemerkenswert, daß der ursprüngliche Ausdruck von I in den Wurzeln α sich in zwei Faktoren zerlegen läßt, die in den α ganz und rational sind. Führt man nämlich die Funktionen β der Wurzeln ein, die im vorigen Paragraphen definiert worden sind, und bemerkt, daß

$$\beta_2 - \beta_3 = (\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_4 - \alpha_1), \quad \beta_3 - \beta_1 = (\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_2),$$
$$\beta_1 - \beta_2 = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_3)$$

ist, so hat man

$$\begin{aligned} I &= \tfrac{1}{2}[(\beta_2 - \beta_3)^2 + (\beta_3 - \beta_1)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2] \\ &= \beta_1^{\,2} + \beta_2^{\,2} + \beta_3^{\,2} - \beta_2\beta_3 - \beta_3\beta_1 - \beta_1\beta_2 \end{aligned}$$

und daher (§ 473)

$$\left\{\begin{aligned} I &= [\alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \omega(\alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_1) + \omega^2(\alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_2)] \\ &\times [\alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \omega^2(\alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_1) + \omega(\alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_2)]. \end{aligned}\right. \tag{33}$$

Allgemeiner ist bei jeder binären Form von geradem Grade[1])

$$f(x, y) = a_0 x^n + \frac{n}{1} a_1 x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a_2 x^{n-2} y^2 + \cdots + a_n y^n$$

eine Invariante die symmetrische Funktion

$$\sum(\alpha_1 - \alpha_2)^2(\alpha_3 - \alpha_4)^2 \dots (\alpha_{n-1} - \alpha_n)^2$$

---

1) Siehe die „Algebra der linearen Transformationen" von Salmon-Fiedler (2. Aufl., S. 160).

der Wurzeln von $f(x, 1)$. Sie drückt sich, abgesehen von einem numerischen Faktor, folgendermaßen aus:

$$I = \frac{1}{2}(a - a)^n = \frac{1}{2}\left(a_0 a_n - \frac{n}{1} a_1 a_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a_2 a_{n-1} - \cdots + a_n a_0\right).$$

483. Zu der kubischen Invariante

$$J = \tfrac{1}{2}(2c_2^3 - 9c_1c_2c_3 + 27c_1^2c_4 - 72c_2c_4 + 27c_3^2) \tag{34}$$

der biquadratischen Form $f(x, y)$ wird man ferner geführt, indem man die symmetrische Funktion

$$\begin{aligned} J = {} & (\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_4)(\alpha_1 - \alpha_2)^2(\alpha_3 - \alpha_4)^2 \\ & + (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_4)(\alpha_2 - \alpha_3)^2(\alpha_1 - \alpha_4)^2 \\ & + (\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)(\alpha_3 - \alpha_1)^2(\alpha_2 - \alpha_4)^2 \end{aligned} \tag{35}$$

der Wurzeln von $f(x, 1)$ betrachtet. Die Rechnungen des § 481 gestatten uns einen andern Ausdruck für J zu finden, der sich leicht in drei Faktoren zerlegen läßt, welche in den α ganz und rational sind. Schreibt man in der Tat den Ausdruck (34) von $2J$ in folgender Form

$$2c_2^3 - 9c_2(c_1c_3 - 4c_4) + 27(c_1^2c_4 - 4c_2c_4 + c_3^2),$$

so transformiert er sich sofort in

$$\begin{aligned} -c_2^3 + 3c_2^2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) - 9c_2(\beta_2\beta_3 + \beta_3\beta_1 + \beta_1\beta_2) + 27\beta_1\beta_2\beta_3 \\ = (3\beta_1 - c_2)(3\beta_2 - c_2)(3\beta_3 - c_2) \\ = (2\beta_1 - \beta_2 - \beta_3)(2\beta_2 - \beta_3 - \beta_1)(2\beta_3 - \beta_1 - \beta_2). \end{aligned}$$

Es ist leicht zu erkennen, daß auch der Ausdruck (35) oder

$$(\beta_1 - \beta_3)(\beta_2 - \beta_1)^2 + (\beta_2 - \beta_1)(\beta_3 - \beta_2)^2 + (\beta_3 - \beta_2)(\beta_1 - \beta_3)^2$$

auf dieselbe Form reduzierbar ist. Man hat also

$$\begin{aligned} J = {} & \tfrac{1}{2}[2(\alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3) - (\alpha_1 + \alpha_4)(\alpha_2 + \alpha_3)] \\ & \times [2(\alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_1) - (\alpha_2 + \alpha_4)(\alpha_3 + \alpha_1)] \\ & \times [2(\alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_2) - (\alpha_3 + \alpha_4)(\alpha_1 + \alpha_2)]. \end{aligned} \tag{36}$$

Die Ausdrücke (32) und (34) von I und J unterscheiden sich nur um numerische Faktoren von den uns bereits bekannten (§ 87). Aber die in § 458 angegebene Relation von Boole modifiziert sich folgendermaßen:

$$\Delta = \tfrac{4}{27}(I^3 - J^2). \tag{37}$$

484. Übungen. a) Man soll die durch die Wurzeln

$$\gamma_1 = \beta_2 + \beta_3 - 2\beta_1, \quad \gamma_2 = \beta_3 + \beta_1 - 2\beta_2, \quad \gamma_3 = \beta_1 + \beta_2 - 2\beta_3$$

definierte kubische Form konstruieren. Die Summe dieser Zahlen ist 0, ihr Produkt wurde gleich $-2J$ gefunden, und die Summe ihrer Produkte zu je zweien ist

$$-\tfrac{1}{2}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) = -3(\beta_1^2 + \cdots - \beta_2\beta_3 - \cdots) = -3I.$$

Die gesuchte kubische Form ist also (§ 465)

$$\Omega(x) = x^3 - 3Ix + 2J.$$

Sie ist bemerkenswert, weil sie dieselbe Diskriminante hat wie die biquadratische Form, welche durch die Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ definiert ist. In der Tat ist

$$\gamma_2 - \gamma_3 = -3(\beta_2 - \beta_3) = -3(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_4 - \alpha_1) \text{ u. s. w.}$$

und daher die in Rede stehende Diskriminante

$$\Pi(\gamma_2 - \gamma_3)^2 = 9^3\Delta.$$

Wenn wir ihren Ausdruck in den Koeffizienten der kubischen Form suchen, so erhalten wir successiv auf Grund von (29)

$$9^3\Delta = -27 \cdot 4J^2 + 4 \cdot 27 I^3, \quad \Delta = \tfrac{4}{27}(I^3 - J^2).$$

Es bestätigt sich also die Formel (37).

b) Die Gleichung zu konstruieren, welche die Werte des Doppelverhältnisses von vier Zahlen liefert, wenn diese durch die Gleichung definiert ist, die sie als Wurzeln zuläßt. Die Werte, um welche es sich handelt, sind folgende (§ 417)

$$(\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_4) = \lambda_1 = \frac{\beta_1 - \beta_3}{\beta_1 - \beta_2}, \quad (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4) = 1 - \lambda_2 = \frac{1}{\lambda_3},$$

$$(\alpha_1\alpha_3\alpha_2\alpha_4) = \lambda_2 = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_2 - \beta_3}, \quad (\alpha_2\alpha_3\alpha_1\alpha_4) = 1 - \lambda_3 = \frac{1}{\lambda_1},$$

$$(\alpha_2\alpha_1\alpha_3\alpha_4) = \lambda_3 = \frac{\beta_3 - \beta_2}{\beta_3 - \beta_1}, \quad (\alpha_3\alpha_1\alpha_2\alpha_4) = 1 - \lambda_1 = \frac{1}{\lambda_2}.$$

Sie sind die Wurzeln einer Gleichung sechsten Grades, welche ungeändert bleiben muß, wenn die Unbekannte λ in $\frac{1}{\lambda}$ oder in $1-\lambda$ verwandelt wird. Um der ersten Bedingung zu genügen, ist offenbar notwendig, daß die Koeffizienten der äußersten Glieder und die der von den Enden gleich weit entfernten Glieder einander gleich sind. Beachtet man ferner, daß die Summe der sechs Werte 3 ist und ihr Produkt 1, so sieht man (§ 465), daß die gesuchte Gleichung die Form hat

$$\lambda^6 - 3\lambda^5 + a\lambda^4 - b\lambda^3 + a\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0. \tag{38}$$

Damit sie ungeändert bleibe, wenn man λ in $1 - \lambda$ verwandelt, ist außerdem nötig, daß die Summe aller Koeffizienten 1 ist, so daß man hat $2a - b = 5$. Es genügt also a zu berechnen. Erinnert man sich daran, daß a die Summe der Produkte der Wurzeln zu je zweien und daß die Summe dieser Wurzeln gleich 3 ist, so hat man

$$9 - 2a = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2}.$$

Bemerkt man andererseits, daß die Invariante $I = \beta_1^2 + \cdots - \beta_2\beta_3 - \cdots$ sich auch auf die Form bringen läßt

$$I = (\beta_2 - \beta_3)^2 + (\beta_1 - \beta_2)(\beta_1 - \beta_3),$$

so sieht man, daß

$$\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1} = \frac{2I - (\beta_2 - \beta_3)^2}{(\beta_1 - \beta_2)(\beta_1 - \beta_3)} = 1 \pm (\beta_2 - \beta_3)\frac{I}{\sqrt{\varDelta}}$$

und analog

$$\lambda_2 + \frac{1}{\lambda_2} = 1 \pm (\beta_3 - \beta_1)\frac{I}{\sqrt{\varDelta}}, \quad \lambda_3 + \frac{1}{\lambda_3} = 1 \pm (\beta_1 - \beta_2)\frac{I}{\sqrt{\varDelta}}$$

ist. Daraus folgt durch Quadrieren und Addieren

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2} = -3 + 2\frac{I^3}{\varDelta},$$

mithin

$$a = 6 - \frac{I^3}{\varDelta}, \quad b = 7 - 2\frac{I^3}{\varDelta}.$$

Substituiert man diese Werte in (38), so erhält man

$$\frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(\lambda - 1)^2} = \frac{I^3}{\varDelta}.$$

Berücksichtigt man ferner die Formel (37), so kann man auch schreiben

$$\frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{(\lambda + 1)^2(\lambda - 2)^2(\lambda - \frac{1}{2})^2} = \frac{I^3}{J^2}.$$

Die rechte Seite ist (§ 87) die absolute Invariante. Daraus folgt, daß, wenn für zwei Gleichungen vierten Grades die absoluten Invarianten gleich sind, die beiden Quadrupel von Wurzeln dieselben Doppelverhältnisse haben. Man sieht überdies, daß das Verschwinden der quadratischen Invariante die äquianharmonische Lage der vier Wurzeln charakterisiert, wie das Verschwinden der kubischen Invariante die harmonische Lage charakterisiert. Diese beiden Eigenschaften, welche man sozusagen aus den Formeln (33) und (36) abliest, gestatten bemerkenswerte geometrische Interpretationen[1]).

485. Hessesche Funktion. Mit dem Studium der Funktion $f(x)$ verknüpft sich das der Hesseschen Funktion $H(x)$, d. h. einer andern ganzen Funktion, die homogen gemacht der Hesseschen Determinante (§ 378)

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}$$

proportional ist. Für $y = 1$ ist $f'_x = f'$, $f''_{xx} = f''$, und die andern partiellen Derivierten berechnet man unter Anwendung des Eulerschen Theorems (§ 372) auf die Funktionen f, f', f'_y:

$$xf' + f'_y = nf, \quad xf'' + f''_{xy} = (n-1)f', \quad xf''_{xy} + f''_{yy} = (n-1)f'_y.$$

Benutzt man diese Relationen zur Elimination der auf y bezüglichen Derivierten, so transformiert sich die obengenannte Determinante successiv in

1) Siehe die „Vorlesungen über Geometrie" von Clebsch (Bd. I, S. 297; Bd. II, S. 326).

$$\begin{vmatrix} f'' & (n-1)f' \\ f''_{xy} & (n-1)f'_y \end{vmatrix} = (n-1)\begin{vmatrix} f'' & f' \\ (n-1)f' & nf \end{vmatrix},$$

und wir werden übereinkommen zu setzen

$$H = \begin{vmatrix} f' & f'' \\ nf & (n-1)f' \end{vmatrix} = (n-1)f'^2 - nff'',$$

d. h.

$$H(x) = (n-1)f'^2(x) - nf(x)f''(x).$$

So gehört also zu jeder ganzen Funktion $f(x)$ vom Grade n eine Hessesche Funktion $H(x)$, deren Grad im allgemeinen $2n-4$ ist, wie man sofort erkennt, wenn man auf den ursprünglichen Ausdruck für H zurückgeht, aus welchem man unter der Annahme

$$f(x) = a_0x^n + na_1x^{n-1} + \tfrac{1}{2}n(n-1)a_2x^{n-2} + \cdots$$

ableitet

$$\frac{H(x)}{n^2(n-1)} = (a_1x^{n-2} + (n-2)a_2x^{n-3} + \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)a_3x^{n-4} + \cdots)^2$$
$$- (a_0x^{n-2} + (n-2)a_1x^{n-3} + \cdots)(a_2x^{n-2} + (n-2)a_3x^{n-3} + \cdots).$$

486. Dies vorausgeschickt wollen wir uns die Aufgabe stellen, $H(x)$ durch die Wurzeln von f auszudrücken. Wir gehen von der Gleichung aus

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-\alpha_1} + \frac{1}{x-\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{x-\alpha_n},$$

welche uns durch Derivation liefert

$$\frac{f'^2(x)}{f^2(x)} - \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{(x-\alpha_1)^2} + \frac{1}{(x-\alpha_2)^2} + \cdots + \frac{1}{(x-\alpha_n)^2}.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\sigma_p = \frac{1}{(x-\alpha_1)^p} + \frac{1}{(x-\alpha_2)^p} + \cdots + \frac{1}{(x-\alpha_n)^p},$$

so haben wir also

$$\frac{f'}{f} = \sigma_1, \quad \frac{f''}{f} = \sigma_1^2 - \sigma_2$$

und folglich

$$(39) \qquad \frac{H}{f^2} = (n-1)\frac{f'^2}{f^2} - n\frac{f''}{f} = n\sigma_2 - \sigma_1^2 = \begin{vmatrix} \sigma_0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 \end{vmatrix}.$$

Beachtet man, daß die rechte Seite das Quadrat der Matrix

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \dfrac{1}{x-\alpha_1} & \dfrac{1}{x-\alpha_2} & \ldots & \dfrac{1}{x-\alpha_n} \end{vmatrix}$$

ist, so kann man auch schreiben (§ 30)

$$\frac{H}{f^2} = \sum\left(\frac{1}{x-\alpha_i} - \frac{1}{x-\alpha_j}\right)^2 = \sum\frac{(\alpha_i-\alpha_j)^2}{(x-\alpha_i)^2(x-\alpha_j)^2}$$

und endlich

$$H(x) = \sum (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (x - \alpha_3)^2 (x - \alpha_4)^2 \ldots (x - \alpha_n)^2,$$

wobei die Summation über alle Wurzelpaare zu erstrecken ist. Wie man sieht, ist $H(x)$ eine Summe von Quadraten, die alle positiv sind, wenn x und die α reell sind, sodaß unter diesen Bedingungen H unmöglich verschwinden kann, falls nicht alle Quadrate gleichzeitig verschwinden. Dies letztere kann aber nur stattfinden, wenn alle α einander gleich sind. Also gilt der Satz[1]): Wenn eine ganze Funktion lauter reelle und einfache Wurzeln hat, so sind die Wurzeln der Hesseschen Funktion sämtlich imaginär.

487. Es ist nützlich zu bemerken, daß die vielfachen Wurzeln von f auch vielfache Wurzeln von H sind. In der Tat, wenn f den Divisor $(x - \alpha)^2$ hat, so gilt dasselbe von f'^2 und daher auch von H. Daraus folgt, daß die Diskriminante D von H immer verschwinden muß, wenn diejenige von f verschwindet. Damit dies der Fall sei, ist notwendig und hinreichend, daß D durch $\varDelta$ teilbar ist. Erinnern wir uns nun (§ 458), daß $\varDelta$ in den Koeffizienten von f den Grad $2(n-1)$ und das Gewicht $n(n-1)$ hat. Um das Gewicht von D zu erhalten, muß man zunächst beachten, daß das Gewicht jedes Koeffizienten von H, berechnet in Bezug auf die Koeffizienten von f, um 2 vermehrt erscheint, so daß das gesuchte Gewicht in den genannten Koeffizienten

$$(2n-4)(2n-5) + 2 \cdot 2(2n-5) = 2n(2n-5)$$

ist und das des Quotienten von D durch $\varDelta$

$$2n(2n-5) - n(n-1) = 3n(n-3).$$

Da für $n = 3$ diese Zahl null ist, so kann man behaupten, daß eine kubische Funktion und ihre Hessesche dieselbe Diskriminante haben. Dagegen spaltet sich die Diskriminante der Hesseschen Funktion einer biquadratischen Funktion in ein Produkt von zwei Ausdrücken gleichen Gewichts, von denen der eine die Diskriminante der betrachteten biquadratischen Funktion ist. Diesen letzten Umstand könnte man direkt bestätigen, indem man sich zunächst durch eine etwas umständliche Rechnung die Invarianten (die quadratische und die kubische) der Hesseschen Funktion verschafft, die sich gleich $16I^2$ und $64J^2$ erweisen müssen, und dann die Boolesche Relation benutzt, durch welche man erhält

$$D = 2^{12}(I^3 + J^2)\varDelta.$$

Aber die bewunderungswürdige Theorie der algebraischen Formen liefert viel schnellere und sichrere Berechnungsmittel.

488. Jacobische Funktion. Gleichfalls bemerkenswert ist die Jacobische Funktion $Q(x)$, welche der Determinante der ersten partiellen Derivierten der Funktionen f und H proportional ist. Sie ist eben-

---

1) Siehe die Noten von Gerbaldi und von Schoute in den „Rendiconti del Circolo matematico di Palermo" (1889).

falls eine ganze Funktion. Ihr Grad ist im allgemeinen $(n-1)+(2n-5) = 3(n-2)$. Da nach dem Eulerschen Theorem

$$xH' + H'_y = (2n-4)H$$

ist, so hat man

$$\begin{vmatrix} f'_x & H'_x \\ f'_y & H'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f' & H' \\ nf & (2n-4)H \end{vmatrix} = (2n-4)Hf' - nfH'.$$

Wir werden setzen

$$Q = (n-2)Hf' - \tfrac{1}{2}nfH'.$$

Jetzt wollen wir versuchen Q durch die Wurzeln von f auszudrücken. Aus (39) leitet man durch Derivation ab, wenn man beachtet, daß $\sigma'_p = -p\sigma_{p+1}$ ist,

$$\frac{H'}{2f^2} = \frac{Hf'}{f^3} + \sigma_1\sigma_2 - n\sigma_3 .$$

Mithin ist

$$\frac{Q}{f^3} = n(n\sigma_3 - \sigma_1\sigma_2) - 2\sigma_1(n\sigma_2 - \sigma_1{}^2) = n^2\sigma_3 - 3n\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_1{}^3.$$

Wenn wir für einen Augenblick mit $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die Brüche $\frac{1}{x-\alpha_i}$ bezeichnen und die rechte Seite der letzten Gleichung folgendermaßen schreiben

$$\begin{aligned} n^2(\alpha^3+\beta^3+\cdots) - 3n(\alpha+\beta+\cdots)(\alpha^2+\beta^2+\cdots) + 2(\alpha+\beta+\cdots)^3 \\ = (n-1)(n-2)\Sigma\alpha^3 - 3(n-2)\Sigma\alpha\beta(\alpha+\beta) + 12\Sigma\alpha\beta\gamma, \end{aligned}$$

so erkennen wir sofort, daß dieser Ausdruck entsteht durch Addition aller analogen Größen zu der folgenden

$$2(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3) - 3\beta\gamma(\beta+\gamma) - 3\gamma\alpha(\gamma+\alpha) - 3\alpha\beta(\alpha+\beta) + 12\alpha\beta\gamma .$$

Da diese nur die Entwickelung des Produktes

$$(2\alpha-\beta-\gamma)(2\beta-\gamma-\alpha)(2\gamma-\alpha-\beta)$$

ist, so kann man schreiben

$$\begin{aligned} \frac{Q}{f^3} = \sum &\left(\frac{2}{x-\alpha_i} - \frac{1}{x-\alpha_j} - \frac{1}{x-\alpha_k}\right) \\ &\times \left(\frac{2}{x-\alpha_j} - \frac{1}{x-\alpha_k} - \frac{1}{x-\alpha_i}\right) \\ &\times \left(\frac{2}{x-\alpha_k} - \frac{1}{x-\alpha_i} - \frac{1}{x-\alpha_j}\right). \end{aligned}$$

Also ist endlich

$$\begin{aligned} Q(x) = \sum &[2(\alpha_1 x + \alpha_2\alpha_3) - (\alpha_2+\alpha_3)(x+\alpha_1)] \\ &\times [2(\alpha_2 x + \alpha_3\alpha_1) - (\alpha_3+\alpha_1)(x+\alpha_2)] \\ &\times [2(\alpha_3 x + \alpha_1\alpha_2) - (\alpha_1+\alpha_2)(x+\alpha_3)] \\ &\times (x-\alpha_4)^2(x-\alpha_5)^2\cdots(x-\alpha_n)^2, \end{aligned}$$

wobei sich die Summation über alle Ternen von Wurzeln erstreckt.

489. Kehren wir wieder zurück zu den Definitionsformeln

$$H = (n-1)f'^2 - nff'', \quad Q = (n-2)Hf' - \tfrac{1}{2}nfH'.$$

Erhebt man die zweite ins Quadrat und eliminiert f'^2 mit Hilfe der ersten, so erhält man

$$(n-1)Q^2 = (n-2)^2H^2(H + nff'') - n(n-1)(n-2)HH'ff' \\ + \tfrac{1}{4}n^2(n-1)f^2H'^2$$

oder

$$\Phi = n(n-2)Hf[(n-1)H'f' - (n-2)Hf''] - \tfrac{1}{4}n^2(n-1)f^2H'^2,$$

wenn man zur Abkürzung setzt

$$\Phi = (n-2)^2H^3 - (n-1)Q^2.$$

Ferner hat man $H' = (n-2)f'f'' - nff'''$ und folglich

$$(n-1)H'f' - (n-2)Hf'' = nf[(n-2)f''^2 - (n-1)f'f'''].$$

Mithin ist

$$\frac{\Phi}{n^2f^2} = (n-2)H[(n-2)f''^2 - (n-1)f'f'''] - \tfrac{1}{4}(n-1)H'^2.$$

Die rechte Seite ist eine ganze Funktion. Es gibt also eine lineare Kombination von H^3 und Q^2, die durch f^2 teilbar ist. Diese Bemerkung gestattet für jeden Wert von n wichtige Relationen zwischen f, H, Q zu finden. Noch ist zu beachten, daß Φ vom Grade $6(n-2)$ und sein Quotient durch f^2 also vom Grade $6(n-2) - 2n = 4(n-3)$ ist. Endlich ist es nützlich, die Glieder höchsten Grades in H, Q, Φ zu kennen. Geht man von

$$f = x^n - c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} - c_3x^{n-3} + \cdots$$

aus, so findet man

$$H = [(n-1)c_1{}^2 - 2nc_2]x^{2n-4} + \cdots$$

$$Q = [(n-1)(n-2)c_1{}^3 - 3n(n-2)c_1c_2 + 3n^2c_3]x^{3n-6} + \cdots$$

$$\Phi = [-9n^2(n-1)c_3{}^2 + 3(n-1)(n-2)^2c_1{}^2c_2{}^2 - 8n(n-2)^2c_2{}^3 \\ - 6(n-1)^2(n-2)c_1{}^3c_3 + 18n(n-1)(n-2)c_1c_2c_3]n^2x^{6n-12} + \cdots$$

490. Anwendungen auf die kubische Funktion. a) Bei der kubischen Funktion

$$f = x^3 - c_1x^2 + c_2x - c_3$$

sind die Hessesche und die Jacobische Funktion bezüglich eine quadratische und eine zweite kubische Funktion, die sich in den Wurzeln α_1, α_2, α_3 von f so ausdrücken:

$$(40)\quad H = (\alpha_2 - \alpha_3)^2(x-\alpha_1)^2 + (\alpha_3 - \alpha_1)^2(x-\alpha_2)^2 + (\alpha_1-\alpha_2)^2(x-\alpha_3)^2,$$

$$(41)\quad Q = [2(\alpha_1x + \alpha_2\alpha_3) - (\alpha_2+\alpha_3)(x+\alpha_1)] \\ \times [2(\alpha_2x + \alpha_3\alpha_1) - (\alpha_3+\alpha_1)(x+\alpha_2)] \\ \times [2(\alpha_3x + \alpha_1\alpha_2) - (\alpha_1+\alpha_2)(x+\alpha_3)].$$

Durch diese Ausdrücke treten bemerkenswerte geometrische Beziehungen zwischen den drei Funktionen hervor[1]). Die Wurzeln α_1', α_2', α_3' von Q sind rational ausdrückbar durch diejenigen von f. Sie sind gegeben durch die Gleichungen

$$2(\alpha_1\alpha_1' + \alpha_2\alpha_3) = (\alpha_1 + \alpha_1')(\alpha_2 + \alpha_3) \quad \text{u. s. w.},$$

welche ausdrücken, daß

$$(\alpha_1'\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = -1\,, \quad (\alpha_2'\alpha_2\alpha_3\alpha_1) = -1\,, \quad (\alpha_3'\alpha_3\alpha_1\alpha_2) = -1$$

ist oder daß jede Wurzel von Q in Bezug auf ein Paar von Wurzeln von f harmonisch konjugiert zu der dritten Wurzel ist. Daraus folgt (§ 417), daß, wenn die Wurzeln α_1, α_2, α_3 von f gegeben sind, diejenigen von Q auf den Kreis $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ fallen. Man kann jede von ihnen konstruieren, z. B. α_1', indem man bemerkt, daß die Tangenten des Kreises in α_1 und α_1' sich auf $\alpha_2\alpha_3$ treffen oder daß die Tangenten in α_2 und α_3 sich auf $\alpha_1\alpha_1'$ treffen. Diese Konstruktionen setzen die Reziprozität in Evidenz, welche zwischen den beiden kubischen Funktionen besteht, da die Tangenten in α_1 und α_1' auch auf $\alpha_2'\alpha_3'$ zusammentreffen und die Tangenten in α_2' und α_3' auf $\alpha_1\alpha_1'$. Die beiden Dreiecke haben ihren Lemoineschen Punkt gemeinsam, in welchem $\alpha_1\alpha_1'$, $\alpha_2\alpha_2'$, $\alpha_3\alpha_3'$ zusammentreffen, d. h. die Geraden, welche die Ecken jedes Dreiecks mit den Polen der gegenüberliegenden Seiten verbinden.

b) Betrachtet man die kubischen Einheitswurzeln

$$\omega = -\tfrac{1}{2}\left(1 - \sqrt{-3}\right), \quad \omega^2 = -\tfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{-3}\right)$$

als bekannte Größen, so zerfällt der Ausdruck (40) der Hesseschen Funktion sofort, sodaß es uns möglich wird, ihre Wurzeln rational durch die α auszudrücken. Zunächst bemerke man, daß, wenn drei Zahlen gleichzeitig den Relationen

$$\alpha + \beta + \gamma = 0\,, \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$$

genügen, ihre Kuben gleich sind. In der Tat ist $\alpha^2 = (\beta + \gamma)^2 = -\alpha^2 + 2\beta\gamma$, woraus sich ergibt $\alpha^2 = \beta\gamma$, mithin $\alpha^3 = \beta^3 = \gamma^3$. Daraus folgt, daß α, β, γ den kubischen Einheitswurzeln proportional sind. Nun bemerke man, daß der Ausdruck (40) die Summe der Quadrate dreier Zahlen ist, deren Summe

$$(\alpha_2 - \alpha_3)(x - \alpha_1) + (\alpha_3 - \alpha_1)(x - \alpha_2) + (\alpha_1 - \alpha_2)(x - \alpha_3)$$

identisch verschwindet. Setzt man also für x eine Wurzel von H, so kann das Verhältnis zwischen zweien von diesen Zahlen nur einen von den beiden Werten ω, ω^2 haben. Daraus folgt, wenn man mit τ und τ' die beiden Wurzeln bezeichnet,

$$(\tau\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = -\omega\,, \quad (\tau'\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = -\omega^2.$$

Also (§ 420) fallen die Wurzeln der Hesseschen Funktion einer kubischen Funktion in die isodynamischen Zentra des Dreiecks,

1) Siehe Clebsch, „Vorlesungen über Geometrie" (Bd. I, S. 275 u. 280).

das von den Wurzeln dieser kubischen Funktion gebildet wird[1]. Nun ist es zweckmäßig, daran zu erinnern, daß die Zahlen τ und τ' die gemeinsamen Punkte der drei Apollonischen Kreise des Dreiecks $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ darstellen. Da diese orthogonal zu dem Kreise $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ sind, so muß bekanntlich der Mittelpunkt O dieses letzteren auf $\tau\tau'$ fallen. Da ferner die Tangenten in α_i und α_i' an den zugehörigen Apollonischen Kreis in O, d. h. auf $\tau\tau'$, zusammentreffen, so sieht man, daß $(\tau\tau'\alpha_i\alpha_i') = -1$ ist für $i = 1, 2, 3$, d. h. die Wurzeln der kubischen Funktionen f und Q entsprechen sich derart, daß jedes Paar entsprechender Wurzeln inbezug auf die Wurzeln von H harmonisch konjugiert ist. Da ferner die Länge $O\alpha_i$ das geometrische Mittel zwischen $O\tau$ und $O\tau'$ ist, so sieht man, daß die Wurzeln der Hesseschen Funktion einer kubischen Funktion in Punkte fallen, die in Bezug auf den durch die Wurzeln der kubischen Funktion bestimmten Kreis reziprok sind, sodaß eine Wurzel immer innerhalb, die andere außerhalb des Kreises liegt. Bemerkt man endlich, daß O der Pol von $\alpha_1\alpha_1'$, $\alpha_2\alpha_2'$, $\alpha_3\alpha_3'$ in Bezug auf die drei Apollonischen Kreise ist, so ist klar, daß die drei genannten Sehnen sich auf $\tau\tau'$ treffen müssen, in dem zu O in Bezug auf $\tau\tau'$ harmonisch konjugierten Punkt, und die Punkte τ und τ' gehören daher demjenigen Durchmesser des umbeschriebenen Kreises an, welcher durch den Lemoineschen Punkt hindurchgeht. Sie werden harmonisch getrennt durch diesen Punkt und den Mittelpunkt des Kreises.

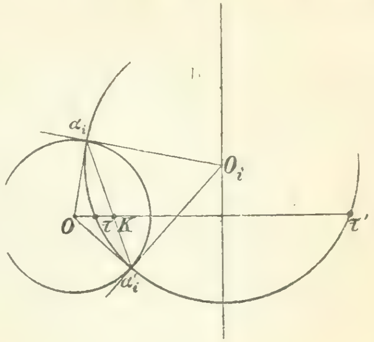

Fig. 23.

c) Ausgedrückt in den Koeffizienten von f lautet die Hessesche Funktion

$$H = 2[(c_1^2 - 3c_2)x^2 - (c_1c_2 - 9c_3)x + (c_2^2 - 3c_1c_3)].$$

Ihre Diskriminante (vgl. § 487) ist proportional zu

$$4[(c_1c_2 - 9c_3)^2 - 4(c_1^2 - 3c_2)(c_2^2 - 3c_1c_3)] = -12\varDelta.$$

Dies ist auch der Wert von H'^2, wenn $H = 0$ ist. Man braucht nur zu beachten, daß, wenn

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ist,

$$(2ax + b)^2 = 4a(ax^2 + bx) + b^2 = b^2 - 4ac$$

wird. Inzwischen bemerke man, daß für $n = 3$ die linke Seite (§ 489) von Φ gleich $54\varDelta$ wird. Also ist

$$H^3 - 2Q^2 = 54f^2\varDelta.$$

1) In Betreff dieses und anderer interessanter Theoreme siehe die „Ricerche sulla Geometria delle forme binarie cubiche“ von Beltrami (Memorie dell'Accademia di Bologna, 1870). Siehe auch „Involutions cubiques dans le plan complexe“ (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1901) von Jan de Vries.

Diese von Cayley[1]) angegebene Identität schließt die bekannte Relation von Boole zwischen den Invarianten der biquadratischen Funktion ein. Denkt man sich in den Formeln (40) und (41) x fixiert, so hat die durch die Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, x$ definierte biquadratische Funktion als quadratische Invariante (§ 482) gerade $\frac{1}{2}H$ und als kubische Invariante (§ 483) $\frac{1}{2}Q$. Setzt man jetzt $x = \alpha_4$ und infolgedessen $H = 2I$, $Q = 2J$ und substituiert für $f^2\Delta$ das Produkt der Quadrate der Differenzen von $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, x$, d. h. das Δ der biquadratischen Funktion, so findet man die Formel (37) wieder.

d) Zu der Relation von Cayley gelangt man auf verschiedene andere Weisen, indem man bemerkt, daß man zur Berechnung des konstanten Quotienten von $H^3 - 2Q^2$ durch f^2 das x beliebig fixieren darf. Wählt man z. B. x derart, daß $H = 0$ ist, so reduziert sich H'^2, wie gesagt worden ist, auf -12Δ, und man hat (§ 489)

$$\frac{H^3 - 2Q^2}{9f^2} = H(f''^2 - 2f'f''') - \frac{1}{2}H'^2 = -\frac{1}{2}H'^2 = 6\Delta.$$

Setzt man dagegen x gleich einer Wurzel von f, so hat man

$$f = 0, \quad f''' = 6, \quad f'^2(f''^2 - 16f') = 4\Delta, \quad H = 2f'^2, \quad H' = f'f'',$$

und die rechte Seite der vorigen Gleichung wird

$$2f'^2(f''^2 - 2f'f''') - \tfrac{1}{2}f'^2f''^2 = \tfrac{3}{2}f'^2(f''^2 - 16f') = 6\Delta.$$

Setzt man endlich für x eine Wurzel α_1' von Q, nachdem man bemerkt hat, daß

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1' - \alpha_1) &= -(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_1' - \alpha_2) \\ &= -(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1' - \alpha_3) = \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3}\end{aligned}$$

ist, so erhält man successiv

$$f = \frac{2\Delta}{(2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)^3}, \quad H = \frac{6\Delta}{(2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)^2}, \quad \frac{H^3 - 2Q^2}{f^2} = \frac{H^3}{f^2} = 54\Delta.$$

491. Anwendungen auf die biquadratische Funktion. a) Die Hessesche und die Jacobische Funktion einer biquadratischen Funktion sind bezüglich eine Funktion vierten und eine sechsten Grades, die sich beide durch die Summe der Quadrate und das Produkt von drei gewissen quadratischen Funktionen ausdrücken lassen. Zunächst ist es zweckmäßig Q auf eine etwas andere Form zu bringen als die, welche wir am Ende des § 488 gefunden haben. Hierzu ist es nützlich auf folgende Identität zurückzugreifen

$$\begin{aligned}&(2\beta - \gamma - \delta)(2\gamma - \delta - \beta)(2\delta - \beta - \gamma) + (2\gamma - \delta - \alpha)(2\delta - \alpha - \gamma)(2\alpha - \gamma - \delta) \\ &+ (2\delta - \alpha - \beta)(2\alpha - \beta - \delta)(2\beta - \delta - \alpha) + (2\alpha - \beta - \gamma)(2\beta - \gamma - \alpha)(2\gamma - \alpha - \beta) \\ &\quad = -6(\beta + \gamma - \alpha - \delta)(\gamma + \alpha - \beta - \delta)(\alpha + \beta - \gamma - \delta).\end{aligned}$$

1) Salmon-Fiedler: „Algebra“, Seite 240.

Wenn man α, β, γ, δ durch $\frac{1}{x-\alpha_1}$, $\frac{1}{x-\alpha_2}$, $\frac{1}{x-\alpha_3}$, $\frac{1}{x-\alpha_4}$ ersetzt, so verwandelt sich die linke Seite in (§ 488) $\frac{Q}{f^3}$, und auf der rechten Seite wird z. B. der Faktor $\beta+\gamma-\alpha-\delta$

$$\frac{1}{x-\alpha_2}+\frac{1}{x-\alpha_3}-\frac{1}{x-\alpha_1}-\frac{1}{x-\alpha_4}=\frac{f_1}{f},$$

wenn man mit f_1 die erste der drei folgenden quadratischen Funktionen bezeichnet:

$$f_1=(\alpha_2+\alpha_3-\alpha_1-\alpha_4)x^2-2(\alpha_2\alpha_3-\alpha_1\alpha_4)x+\alpha_2\alpha_3(\alpha_1+\alpha_4)-\alpha_1\alpha_4(\alpha_2+\alpha_3),$$
$$f_2=(\alpha_3+\alpha_1-\alpha_2-\alpha_4)x^2-2(\alpha_3\alpha_1-\alpha_2\alpha_4)x+\alpha_3\alpha_1(\alpha_2+\alpha_4)-\alpha_2\alpha_4(\alpha_3+\alpha_1),$$
$$f_3=(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4)x^2-2(\alpha_1\alpha_2-\alpha_3\alpha_4)x+\alpha_1\alpha_2(\alpha_3+\alpha_4)-\alpha_3\alpha_4(\alpha_1+\alpha_2).$$

Wir finden also die Jacobische Funktion in drei quadratische Faktoren zerlegt:

$$Q(x)=-6f_1(x)f_2(x)f_3(x).$$

Betrachtet man andererseits alle Zahlenpaare, welche zwei gegebene Zahlen z_0 und z_0' harmonisch trennen, so pflegt man zu sagen, daß sie eine quadratische Involution bilden, welche bestimmt ist, sobald man zwei Paare (z_1, z_1') und (z_2, z_2') kennt. Jedes andere Paar (z, z') ist nämlich mit den beiden ersten durch die Bedingung

$$\begin{vmatrix} 1 & z+z' & zz' \\ 1 & z_1+z_1' & z_1z_1' \\ 1 & z_2+z_2' & z_2z_2' \end{vmatrix}=0$$

verknüpft, die man erhält, wenn man z_0+z_0' und z_0z_0' aus den Relationen

$$2(z_0z_0'+zz')=(z_0+z_0')(z+z'),$$
$$2(z_0z_0'+z_1z_1')=(z_0+z_0')(z_1+z_1'),\quad 2(z_0z_0'+z_2z_2')=(z_0+z_0')(z_2+z_2')$$

eliminiert. Beachtet man nun, daß sich den quadratischen Faktoren von Q die Form geben läßt

$$f_1=\begin{vmatrix} 1 & 2x & x^2 \\ 1 & \alpha_2+\alpha_3 & \alpha_2\alpha_3 \\ 1 & \alpha_1+\alpha_4 & \alpha_1\alpha_4 \end{vmatrix},\quad f_2=\begin{vmatrix} 1 & 2x & x^2 \\ 1 & \alpha_3+\alpha_1 & \alpha_3\alpha_1 \\ 1 & \alpha_2+\alpha_4 & \alpha_2\alpha_4 \end{vmatrix},\quad f_3=\begin{vmatrix} 1 & 2x & x^2 \\ 1 & \alpha_1+\alpha_2 & \alpha_1\alpha_2 \\ 1 & \alpha_3+\alpha_4 & \alpha_3\alpha_4 \end{vmatrix},$$

so sieht man, daß die Wurzeln der Jacobischen Funktion einer biquadratischen Funktion sich in drei Paare zerlegen, deren jedes zwei bestimmte Paare von Wurzeln der betrachteten Funktion harmonisch trennt. Sie stellen, um es geometrisch auszudrücken, die Doppelpunkte der drei Involutionen dar, die durch die Wurzeln der biquadratischen Funktion definiert werden. Es ist auch leicht zu zeigen, daß jeder quadratische Faktor dieselbe Eigenschaft hinsichtlich des Produkts der beiden andern hat.

b) Aus den ursprünglichen Ausdrücken von f_1, f_2, f_3 gehen die Gleichungen hervor

$$f_2 - f_3 = -2(\alpha_2-\alpha_3)(x-\alpha_1)(x-\alpha_4), \quad f_2+f_3 = 2(\alpha_1-\alpha_4)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3),$$
$$f_3 - f_1 = -2(\alpha_3-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_4), \quad f_3+f_1 = 2(\alpha_2-\alpha_4)(x-\alpha_3)(x-\alpha_1),$$
$$f_1 - f_2 = -2(\alpha_1-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4), \quad f_1+f_2 = 2(\alpha_3-\alpha_4)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2).$$

Sie führen zu verschiedenen interessanten Folgerungen. Quadriert man sie z. B. und summiert sie, so erlauben sie die Hessesche Funktion[1]) ebenfalls durch die quadratischen Faktoren auszudrücken:

$$H = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2.$$

Multipliziert man sie dagegen miteinander, so erhält man die Relationen

$$f_2^2 - f_3^2 = 4(\beta_2-\beta_3)f, \quad f_3^2 - f_1^2 = 4(\beta_3-\beta_1)f, \quad f_1^2 - f_2^2 = 4(\beta_1-\beta_2)f.$$

Auf diese Weise ist in drei verschiedenen Weisen unsere biquadratische Funktion in quadratische Funktionen zerlegt, und diese Faktoren setzen sich linear aus denen zusammen, welche die Jacobische Funktion zusammensetzen. Man beachte noch die Identität

$$(\beta_2-\beta_3)f_1^2 + (\beta_3-\beta_1)f_2^2 + (\beta_1-\beta_2)f_3^2 = 0,$$

aus welcher man sieht, daß die quadratischen Faktoren nicht voneinander unabhängig sind und daher nicht jede Funktion sechsten Grades als die Jacobische einer Funktion vierten Grades betrachtet werden kann[2]). Inzwischen leitet man aus der Identität $(f_3^2 - f_1^2) - (f_1^2 - f_2^2) = 4\gamma_1 f$ leicht die erste der folgenden ab:

$$3f_1^2 = H - 4\gamma_1 f, \quad 3f_2^2 = H - 4\gamma_2 f, \quad 3f_3^2 = H - 4\gamma_3 f.$$

Also sind die Quadrate der quadratischen Faktoren der Jacobischen Funktion linear ausdrückbar durch die gegebene biquadratische Funktion und ihre Hessesche Funktion. Wenn man ferner die drei letzten Identitäten miteinander multipliziert, so erhält man (§ 484, a)

$$27 f_1^2 f_2^2 f_3^2 = 4^3 f^3 \Omega\left(\frac{H}{4f}\right)$$
$$= H^3 - 3IH\cdot 4^2 f^2 + 2J\cdot 4^3 f^3 = H^3 - 16(3IH - 8Jf)f^2$$

und endlich, wenn man bemerkt, daß die linke Seite $\frac{3}{4}Q^2$ ist,

$$4H^3 - 3Q^2 = 64(3IH - 8Jf)f^2.$$

c) Zu dieser letzten Relation gelangt man auch auf einem andern Wege, indem man die Betrachtungen des § 489 anwendet. Für $n = 4$ sind die Funktionen

$$H = 3f'^2 - 4ff'', \quad Q = 2(Hf' - fH'), \quad \Phi = 4H^3 - 3Q^2$$

bezüglich vom vierten, vom sechsten und vom zwölften Grade, und wir

---

1) Wegen der Verteilung der vier Wurzeln von H in Bezug auf diejenigen von f siehe eine Note von R. Russell in den „Proceedings of the London Math. Society" (vol. XIX, p. 56).

2) Clebsch: „Theorie der binären algebraischen Formen", S. 447.

wissen, daß der Quotient von Φ durch $16 f^2$ eine ganze Funktion vom vierten Grade ist, die sich folgendermaßen ausdrückt:

$$\varphi = 2H(2f''^2 - 3f'f''') - \tfrac{3}{4}H'^2.$$

Es liegt nahe zu denken, φ ließe sich vielleicht erhalten durch lineare Kombination der beiden Funktionen vierten Grades, die sich hier darbieten, nämlich f und H. Setzt man $\varphi = \lambda f + \mu H$, so ist vor allen Dingen nötig, daß φ sich auf μH reduziert, sobald man für x eine Wurzel von f setzt. Unter dieser Voraussetzung hat man

$$H = 3f'^2, \quad H' = 2f'f'', \quad \tfrac{3}{4}H'^2 = Hf''^2,$$

ferner

$$\varphi = 2H(2f''^2 - 3f'f''') - Hf''^2 = 3H(f''^2 - 2f'f''').$$

Wenn wir, um die Rechnungen zu erleichtern, für den Augenblick mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ die Excesse von $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ über α_4 bezeichnen, so ist klar, daß man für $x = \alpha_4$ hat

$$f' = -\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3, \quad \tfrac{1}{2}f'' = \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2, \quad \tfrac{1}{6}f''' = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$$

und infolgedessen

$$\begin{aligned}\mu = 3(f''^2 - 2f'f''') &= 12\left[(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2)^2 - 3\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)\right] \\ &= 6\Sigma\varepsilon_1^2(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 = 6\Sigma(\alpha_1 - \alpha_4)^2(\alpha_2 - \alpha_3)^2 = 12I.\end{aligned}$$

Also verschwindet die Funktion $\varphi(x) - 12I \cdot H(x)$, wenn man für x eine beliebige Wurzel von $f(x)$ setzt, und da sie wie $f(x)$ vom vierten Grade ist, so können wir sie jetzt ohne weiteres mit λf bezeichnen. Um die Konstante λ zu berechnen, genügt es die Koeffizienten von x^4 miteinander zu vergleichen, indem man sich daran erinnert (§ 489), daß in φ der Koeffizient, um den es sich handelt, das Vierfache von

$$-4 \cdot 27c_3^2 + 9c_1^2c_2^2 - 32c_2^3 - 27c_1^3c_3 + 108c_1c_2c_3$$

ist. Von diesem Ausdruck muß man, um den Wert von $\frac{1}{4}\lambda$ zu erhalten, subtrahieren

$$\begin{aligned}&3(3c_1^2 - 8c_2)(c_2^2 - 3c_1c_3 + 12c_4) \\ &= 9c_1^2c_2^2 - 24c_2^3 - 27c_1^3c_3 + 72c_1c_2c_3 + 36(3c_1^2c_4 - 8c_2c_4).\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\tfrac{1}{4}\lambda = -4 \cdot 27c_3^2 - 8c_2^3 + 36(c_1c_2c_3 - 3c_1^2c_4 + 8c_2c_4) = -8J.$$

Endlich ist $\varphi = 12IH - 32Jf$, mithin $4H^3 - 3Q^2 = 64(3IH - 8Jf)f^2$.

492. Methode von Halphen. Um alle diese Rechnungen auszuführen, ist es nicht nötig, wie wir es in den vorigen Übungen zu machen für gut hielten, die verschiedenen Funktionen durch die Wurzeln von f auszudrücken. Man verdankt nämlich Halphen[1]) eine geistreiche Methode, bei welcher man ausschließlich die Funktionzeichen $f, f', f'', \ldots$ braucht.

---

1) „Nouvelles Annales de Mathématiques" (1885, p. 17).

Sie beruht auf folgender Bemerkung. Wenn f und g ganze Funktionen vom Grade n sind, so reduziert sich der Ausdruck

$$fg^{(n)} - f'g^{(n-1)} + f''g^{(n-2)} - \cdots \pm f^{(n)}g$$

auf eine Konstante. In der Tat ist die Derivierte dieses Ausdrucks

$$fg^{(n+1)} \pm gf^{(n+1)} = 0.$$

Die Berechnung dieser Konstanten, die von Halphen mit dem Symbol (fg) bezeichnet wird, ist sehr leicht und einfach. Man braucht nur dem x in der Definitionsformel irgend einen Wert beizulegen. Setzt man $x = 0$, so sieht man z. B. sofort, daß (ff) gerade die quadratische Invariante der binären Formen ist, die wir am Ende des § 482 angegeben haben. Wir wollen jetzt einige leichte Anwendungen von der Methode machen.

a) Um die Diskriminante der kubischen Funktion

$$f = x^3 - c_1x^2 + c_2x - c_3$$

zu berechnen, wenden wir die Konstanten $(f'f')$ und $(H'f'')$ an. Man erhält sofort, wenn man $x = 0$ setzt,

$$(f'f') = 2f'f''' - f''^2 = -4(c_1^2 - 3c_2).$$

Ebenso erhält man, wenn man bemerkt, daß

$$H = 2f'^2 - 3ff'', \quad H' = f'f'' - 3ff''', \quad H'' = f''^2 - 2f'f'''$$

ist,

$$(H'f'') = H'f''' - H''f'' = -f''^3 + 3f'f''f''' - 3ff'''^2,$$

ferner, wenn man $x = 0$ setzt,

$$(H'f'') = 4(2c_1^3 - 9c_1c_2 + 27c_3).$$

Zurückkehrend zu den ursprünglichen Ausdrücken der beiden Konstanten in den Funktionalsymbolen bemerken wir, daß, wenn f eine vielfache Wurzel zuläßt und man für x gerade eine solche Wurzel setzt, die beiden Konstanten werden

$$(f'f') = -f''^2, \quad (H'f'') = -f''^3.$$

Also ist $(f'f')^3 + (H'f'')^2$ eine Funktion der Koeffizienten von f, die verschwindet wie die Diskriminante Δ, wenn f eine vielfache Wurzel hat. Nun ist leicht zu sehen, daß die genannte Funktion das Gewicht 6 hat, d. h. (§ 487) gerade das Gewicht, welches Δ haben muß. Sie kann sich also von Δ nur um einen numerischen Faktor unterscheiden. Verfügt man über diesen Faktor in passender Weise, so kann man schreiben (vgl. § 471)

$$\begin{aligned}\Delta &= \tfrac{1}{27}\left[4(c_1^2 - 3c_2)^3 - (2c_1^3 - 9c_1c_2 + 27c_3)^2\right] \\ &= -27c_3^2 + c_1^2c_2^2 - 4c_2^3 - 4c_1^3c_3 + 18c_1c_2c_3.\end{aligned}$$

b) Bei der biquadratischen Funktion

$$f = x^4 - c_1x^3 + c_2x^2 - c_3x + c_4$$

ist es leicht zu verifizieren, daß die Konstanten (ff) und (Hf) gerade die Invarianten I und J sind. Multipliziert man sie mit geeigneten numerischen Faktoren derart, daß für I und J die in § 482 und § 483 angegebenen Ausdrücke bewahrt bleiben, so findet man

$$I = \frac{1}{4}(ff), \quad J = \frac{1}{16}(Hf).$$

Nun bemerke man, daß man, wenn f eine vielfache Wurzel zuläßt und x gleich dieser Wurzel gesetzt wird, successiv hat

$$(ff) = f''^2, \quad (Hf) = 2f''^3, \quad 4(ff)^3 - (Hf)^2 = 0.$$

Wenn man also so wie vorhin schließt und einen passenden Proportionalitätsfaktor wählt, so kommt

$$\Delta = \frac{4(ff)^3 - (Hf)^2}{64 \cdot 27} = \frac{4}{27}(I^3 - J^2).$$

c) Auch bei der letzten Rechnung des vorigen Paragraphen lassen sich erhebliche Vereinfachungen erreichen, wenn man das Symbol (fg) benutzt. Es gelingt auf diese Weise, anstatt versuchsweise vorzugehen, direkt zu beweisen, daß die Funktion φ linear ausdrückbar durch f und H ist, indem man sie auf folgende Form bringt:

$$\varphi = 3H(ff) - 2f(Hf).$$

Zählung der Wurzeln.

493. Die Ermittelung der Wurzeln algebraischer Gleichungen läßt sich immer abhängig machen von der Bestimmung der reellen Wurzeln von Gleichungen mit reellen Koeffizienten. In der Tat wird die Funktion $f(z)$, wenn man darin die reellen Teile der Koeffizienten und der Veränderlichen z von den rein imaginären Teilen trennt,

$$f(x + iy) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y),$$

und man muß gleichzeitig haben

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \psi(x, y) = 0,$$

damit $f(z)$ verschwindet. Die Elimination von y aus den letzten Gleichungen liefert eine Gleichung mit reellen Koeffizienten, deren reelle Wurzeln die Werte von x sind. Man erhält entsprechend durch Elimination von x die Werte von y. In diesem Kapitel und in den folgenden werden wir uns, indem wir uns auf das soeben Gesagte stützen, ausschließlich mit den reellen Wurzeln der ganzen Funktionen mit reellen Koeffizienten beschäftigen. Da die Methoden, welche wir im folgenden zur Ermittelung dieser Wurzeln auseinandersetzen werden, erfordern, daß man a priori zu sagen weiß, wie viele von ihnen in ein gegebenes Intervall fallen, so werden wir uns in den beiden ersten Kapiteln speziell auf die verschiedenen Mittel beschränken, die man zur Erreichung dieses Zieles ausgedacht hat.

494. Hilfssätze. a) In der Umgebung jeder reellen Wurzel einer ganzen Funktion nimmt die Derivierte rechts dasselbe Zeichen wie die Funktion, links das entgegengesetzte Zeichen an. Man wähle eine positive Zahl h so klein, daß in das Intervall $(\alpha - h,\ \alpha + h)$ außer α keine Wurzeln von f und von f' fallen, sodaß jede von diesen Funktionen in $(\alpha - h,\ \alpha)$ und in $(\alpha,\ \alpha + h)$ mit Ausschluß von α ein bestimmtes Vorzeichen bewahrt. Bekanntlich ist (§ 306) $f(x) = (x - \alpha) f'(\xi)$, wobei ξ zwischen α und x liegt. Wenn x dem betrachteten Intervalle angehört, so gehört auch ξ ihm an, und das Zeichen von $f'(\xi)$ ist das von $f'(x)$. Also haben für $|x - \alpha| < h$ die Funktionen $f(x)$ und $f'(x)$ dasselbe Zeichen oder entgegengesetzte Zeichen, je nachdem $x > \alpha$ oder $x < \alpha$ ist.

b) Rechts von jeder reellen Wurzel α von der Ordnung r nimmt $f(x)$ das Zeichen von $f^{(r)}(\alpha)$ an. Links nimmt sie dieses Zeichen oder das entgegengesetzte Zeichen an, je nachdem r gerade oder ungerade ist. In der Tat, konstruiert man um α ein Intervall, in welchem die stetige und für $x = \alpha$ nicht verschwindende (§ 450, c) Funktion $f^{(r)}$ ein bestimmtes Zeichen bewahrt, so ist klar, daß rechts von α auf Grund des vorigen Hilfssatzes $f^{(r-1)}, f^{(r-2)}, \ldots, f$ das Zeichen von $f^{(r)}(\alpha)$ haben, während links $f^{(r-1)}$ das entgegengesetzte, $f^{(r-2)}$ dasselbe Zeichen hat u. s. w., endlich f dasselbe oder das entgegengesetzte Zeichen, je nachdem r gerade oder ungerade ist.

c) Ein beliebiges Intervall enthält eine ungerade Zahl von Wurzeln der ganzen Funktion f, wenn dieselbe an den Grenzen entgegengesetzte Zeichen annimmt. Es enthält eine gerade Anzahl oder keine Wurzel, wenn die Werte der Funktion an den Grenzen dasselbe Zeichen haben. In der Tat, wenn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ die sämtlichen gleichen oder ungleichen Wurzeln von f sind, die in dem Intervall (a, b) enthalten sind, so kann man schreiben

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_\nu)\, \varphi(x),$$

wobei $\varphi(x)$ eine ganze Funktion bezeichnet, welche in (a, b) nicht verschwindet und daher (§ 275) an den Grenzen ein bestimmtes Zeichen annehmen muß, sodaß $\varphi(a)\varphi(b) > 0$ ist. Nun hat man

$$f(a) = (a - \alpha_1)(a - \alpha_2) \ldots (a - \alpha_\nu)\, \varphi(a),$$
$$f(b) = (b - \alpha_1)(b - \alpha_2) \ldots (b - \alpha_\nu)\, \varphi(b),$$

woraus folgt, daß $f(a) f(b)$ das Zeichen von

$$(a - \alpha_1)(a - \alpha_2) \cdots (a - \alpha_\nu) \cdot (b - \alpha_1)(b - \alpha_2) \cdots (b - \alpha_\nu)$$

oder das Zeichen von $(-1)^\nu$ hat, da die ν letzten Faktoren alle positiv und die ν ersten alle negativ sind. Also ist ν gerade oder ungerade, je nachdem $f(a)$ und $f(b)$ dasselbe Zeichen oder entgegengesetzte Zeichen haben.

495. Theorem von Rolle. Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Wurzeln einer ganzen Funktion liegt eine ungerade Anzahl von Wurzeln der Derivierten.

Wenn α und β aufeinanderfolgende Wurzeln von f sind, so bedeutet dies, daß in (α, β) diese Funktion niemals verschwindet und daher ein bestimmtes Zeichen bewahrt. Man kann nun auf Grund des ersten Hilfssatzes rechts von α ein Intervall (α, a) konstruieren, in welchem f' immer das Zeichen von f hat, und links von β ein Intervall (b, β), in welchem f' das entgegengesetzte Zeichen bewahrt. Also hat auf Grund des dritten Hilfssatzes die Funktion f', die an den Grenzen von (a, b) entgegengesetzte Zeichen annimmt, eine ungerade Zahl von Wurzeln in diesem Intervalle und daher auch in dem Intervalle (α, β) mit Ausschluß der Grenzen.

496. Folgerungen. a) Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Wurzeln von f' liegt nicht mehr als eine Wurzel von f. In der Tat, wäre es möglich, daß zwei dazwischen liegen, so würde zwischen ihnen keine Wurzel von f' existieren gegen das Rollesche Theorem. Man pflegt auch zu sagen, daß die reellen Wurzeln von f' diejenigen von f trennen.

b) Wenn alle Wurzeln von f reell und einfach sind, so gilt dasselbe für f', f'' u. s. w. Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ die Wurzeln von f, alle verschieden und nach zunehmender Größe geordnet. In jedem der $n-1$ Intervalle $(\alpha_1 \alpha_2)$, $(\alpha_2 \alpha_3)$, ... gibt es wenigstens eine Wurzel von f'. Also hat f' wenigstens $n-1$ reelle und verschiedene Wurzeln, und andererseits kann es bekanntlich nicht mehr als $n-1$ geben. Was von f gesagt worden ist, kann man für f', ferner für f'' u. s. w. wiederholen.

497. Theorem von Descartes. Bei jeder algebraischen Gleichung ist die Anzahl der positiven Wurzeln nicht größer als die Zahl der Zeichenwechsel.

Wir schicken voraus, daß in einer Reihe von nicht verschwindenden Zahlen die Aufeinanderfolge von zwei entgegengesetzten Vorzeichen ein Zeichenwechsel und die Aufeinanderfolge von zwei identischen Vorzeichen eine Zeichenfolge heißt. Man pflegt ferner unter Zeichenwechseln und Zeichenfolgen der Gleichung

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0 \tag{42}$$

kurz die Zeichenwechsel und Zeichenfolgen in der Reihe der nicht verschwindenden Koeffizienten zu verstehen, wobei diese so zu nehmen sind, wie sie in (42) geschrieben stehen. Der zu beweisende Satz liegt auf der Hand, wenn die Anzahl der Zeichenwechsel null ist, weil in diesem Falle $f(x)$ das den nicht verschwindenden Koeffizienten gemeinsame Zeichen für jeden positiven Wert von x bewahrt und daher keine positiven Wurzeln haben kann. Es wird also genügen zu zeigen, daß unser Satz, wenn er für weniger als u Zeichenwechsel als richtig angenommen wird, auch für u Zeichenwechsel besteht. Nun hat die Funktion $x^{-k}f$ dieselben p positiven Wurzeln wie f, die linke Seite von (42), und da man auf sie in jedem Intervall, welches die Null nicht im Innern enthält, das Theorem von Rolle anwenden kann (vgl. § 303), so kann man behaupten, daß die Derivierte

$$x^{-k}f' - kx^{-k-1}f = x^{-k-1}(xf' - kf)$$

und daher auch $xf' - kf$, d. h.

$$(43) \quad (n-k)a_0x^n + (n-k-1)a_1x^{n-1} + \cdots + (1-k)a_{n-1}x - ka_n,$$

in jedem der $p-1$ Intervalle, welche zwischen den genannten p Wurzeln liegen, wenigstens eine Wurzel zuläßt, daß sie also wenigstens $p-1$ positive Wurzeln besitzt. Hat man nun in (42) einen Zeichenwechsel, wenn man z. B. von dem Koeffizienten von x^ν zu dem von $x^{\nu-1}$ übergeht, so braucht man nur k irgend einen zwischen ν und $\nu-1$ liegenden Wert zu erteilen, damit jener Zeichenwechsel sich in (43) in eine Zeichenfolge verwandelt, während alle andern Zeichenwechsel und Zeichenfolgen ungeändert bleiben, weil alle Koeffizienten links ihre Zeichen bewahren, während die rechts sie gleichzeitig ändern. Es ist also immer möglich, über k so zu verfügen, daß die Gleichung (43) $u-1$ Zeichenwechsel bietet und daher nach der gemachten Voraussetzung nicht mehr als $u-1$ positive Wurzeln besitzt. Da sie nun wenigstens $p-1$ solche Wurzeln hat, so muß $p \leqq u$ sein, was wir beweisen wollten[1]).

498. Ergänzende Sätze. a) Der Überschuß der Anzahl der Zeichenwechsel über die der positiven Wurzeln ist immer gerade. Wählt man a so groß (§ 445), daß $f(x)$ für $x \geqq a$ das Vorzeichen von a_0 hat, so ist klar, daß ins Innere von $(0, a)$ alle positiven Wurzeln von f fallen. Ihre Anzahl ist (§ 494, c) gerade oder ungerade, je nachdem $f(0)$ und $f(a)$ oder a_n und a_0 dasselbe Zeichen oder entgegengesetzte Zeichen haben, je nachdem also u gerade oder ungerade ist. Folglich ist $u-p$ immer gerade.

b) Die Anzahl der negativen Wurzeln von $f(x)$ übertrifft nicht die Zahl der Zeichenwechsel von $f(-x)$. Man erhält in der Tat die negativen Wurzeln von $f(x)$, indem man das Zeichen der positiven Wurzeln von $f(-x)$ umkehrt.

---

1) Diesen geistreichen Beweis verdankt man Laguerre. Siehe die „Nouvelles Annales de Mathématiques“ (1879, p. 5).

499. Bemerkungen. a) Wenn eine Gleichung einen einzigen Zeichenwechsel bietet, so hat sie eine einzige positive Wurzel. In der Tat ist p auf Grund des cartesischen Theorems nur fähig die Werte 0 und 1 anzunehmen. Es kann aber, wie wir gesehen haben, $1-p$ nicht ungerade sein. Folglich ist $p=1$.

b) Eine Gleichung ohne imaginäre Wurzeln hat so viele positive Wurzeln, als es Zeichenwechsel in ihr gibt, und so viele negative Wurzeln, als die Gleichung, welche man durch Verwandlung von x in $-x$ erhält, Zeichenwechsel aufweist. Wenn das Polynom $f(x)$ vollständig ist, d. h. wenn alle seine Koeffizienten von Null verschieden sind, so ist klar, daß bei Verwandlung von x in $-x$ die Zeichenwechsel in Zeichenfolgen übergehen und die Zeichenfolgen in Zeichenwechsel, weil von zwei benachbarten Gliedern nur eins sein Zeichen ändert. Die Anzahl v der Zeichenwechsel in $f(-x)$ ist also gleich der Zahl der Zeichenfolgen in $f(x)$, und man hat daher, wenn man mit u die Zahl der Zeichenwechsel in $f(x)$ bezeichnet, $u+v=n$. Wenn man $f(x)$ unvollständig macht, so liegt auf der Hand, daß u und v nicht zunehmen können. Man hat also immer $u+v \leq n$. Andererseits ist, wenn die Gleichung nur reelle Wurzeln hat, von welchen p positiv und q negativ sind, $p+q=n$. Mithin ist

$$u+v \leqq p+q \quad \text{oder} \quad (u-p)+(v-q) \leqq 0,$$

und da auf Grund des cartesischen Theorems die Zahlen $u-p$ und $v-q$ nicht negativ sein können, so müssen sie null sein. Folglich ist $u=p$, $v=q$, wie wir beweisen wollten.

c) Wenn ein Glied zwischen zwei Gliedern gleichen Zeichens fehlt, so hat die Gleichung imaginäre Wurzeln. Es sei $a_{n-\nu+1}=0$. Wenn $a_{n-\nu}$ das Zeichen von $a_{n-\nu+2}$ hat, so bietet offenbar das Gliederpaar $a_{n-\nu}x^\nu + a_{n-\nu+2}x^{\nu-2}$ auch dann eine Zeichenfolge, wenn man x in $-x$ verwandelt. Betrachtet man nun die Gesamtzahl der Zeichenwechsel in $f(x)$ und $f(-x)$, so sieht man sofort, daß

$$u+v \leqq n-\nu+\nu-2=n-2$$

ist. A fortiori ist $p+q \leqq n-2$. Es existiert also wenigstens ein Paar imaginärer Wurzeln. Analog beweist man, daß die Gleichung wenigstens $2k$ imaginäre Wurzeln hat, wenn $2k$ aufeinanderfolgende Glieder fehlen, oder wenn $2k-1$ solche Glieder zwischen zwei Gliedern gleichen Zeichens fehlen.

d) Es ist von Wichtigkeit zu bemerken, daß der Beweis des Theorems von Descartes, wie wir ihn in § 497 gegeben haben, nicht notwendig voraussetzt, daß f eine ganze Funktion ist. Es genügt schon, wenn in f oder besser in der Entwickelung (42), die auch aus unendlich vielen Gliedern bestehen kann, die Potenzen von x so geordnet sind, daß die ganzen oder gebrochenen, positiven oder negativen Exponenten immer in demselben Sinne variierend aufeinanderfolgen.

500. Bevor wir weiter gehen ist es zweckmäßig die Ruffinischen Funktionen zu definieren. Aus der linken Seite f der Gleichung (42) lassen sich die Polynome

$$f_1 = a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}, \quad \ldots,$$
$$f_{n-2} = a_0 x^2 + a_1 x + a_2, \quad f_{n-1} = a_0 x + a_1, \quad f_n = a_0$$

herleiten. Die zu der betrachteten Gleichung gehörigen Ruffinischen Funktionen sind gerade $f, f_1, f_2, \ldots, f_n$. In dieser Anordnung geschrieben bilden sie die Ruffinische Reihe. Die Werte, welche sie annehmen, wenn man x einen bestimmten Wert a beilegt, lassen sich sehr leicht berechnen, indem man von $f_n = a_0$ ausgeht und bemerkt, daß

$$f_{n-1}(a) = af_n(a) + a_1, \quad f_{n-2}(a) = af_{n-1}(a) + a_2, \quad \ldots$$

und endlich $f(a) = af_1(a) + a_n$ ist. Es ist dies sogar das einfachste Mittel, welches man zur Berechnung von $f(a)$ kennt. Dies vorausgeschickt bemerke man, daß aus

$$f(x) - f(a) = a_0(x^n - a^n) + a_1(x^{n-1} - a^{n-1}) + \cdots + a_{n-1}(x - a)$$

sich sofort ergibt

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = a_0(x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-1}) + \cdots + a_{n-2}(x + a) + a_{n-1},$$

d. h.

$$(44) \qquad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = x^{n-1} f_n(a) + x^{n-2} f_{n-1}(a) + \cdots + f_1(a).$$

501. Theorem von Laguerre. Die Anzahl der reellen Wurzeln von $f(x)$, welche größer sind als die positive Zahl a, übertrifft nicht die Zahl der Zeichenwechsel, die für $x = a$ in der Ruffinischen Reihe auftreten, und in jedem Falle ist die Differenz zwischen beiden Zahlen gerade[1]).

Aus (44) leitet man für $x > a$ ab

$$\frac{f(x)}{x - a} = x^{n-1} f_n(a) + \cdots + f_1(a) + x^{-1} f(a) + ax^{-2} f(a) + a^2 x^{-3} f(a) + \cdots.$$

Ist a positiv, so bietet die rechte Seite u Zeichenwechsel, wenn u die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe

$$(45) \qquad f(a), \ f_1(a), \ f_2(a), \ \ldots, \ f_n(a)$$

darstellt. Es kann also nicht mehr als u positive Werte von x

1) „Nouvelles Annales de Mathématiques" (1880, p. 52).

geben, welche die genannte rechte Seite zu Null machen. Diese Werte, welche notwendig größer als a sind, sind gerade alle diejenigen Wurzeln von f, die a übertreffen. Um ferner den zweiten Teil des Theorems zu beweisen, bestimme man zunächst eine Zahl b, die so groß ist, daß $f(x)$ für $x \geqq b$ das Zeichen von a_0 hat. Es fallen also alle betrachteten Wurzeln in das Intervall (a, b), und ihre Anzahl ist gerade oder ungerade, je nachdem $f(a)$ das Zeichen von $f(b)$, d. h. von $f_n(a)$, oder das entgegengesetzte Zeichen hat, je nachdem also die Zahl u gerade bezw. ungerade ist. Dieses Theorem gestattet, wenn man es auf $f\left(\frac{1}{x}\right)$ oder auf $f(-x)$ anwendet, auch eine obere Grenze für die Anzahl der positiven Wurzeln von $f(x)$ zu finden, die kleiner als eine gegebene Zahl sind, oder für die Anzahl der Wurzeln, die kleiner sind als eine gegebene negative Zahl.

502. Theorem von Budan. Die Anzahl der Wurzeln, die eine ganze Funktion $f(x)$ in einem gegebenen Intervall zuläßt, übertrifft nicht die Zahl der Zeichenwechsel, die der Reihe

$$f,\ f',\ f'',\ f''',\ \ldots \tag{46}$$

verloren gehen, wenn die Veränderliche das betrachtete Intervall wachsend durchläuft, und in jedem Falle ist die Differenz zwischen beiden Zahlen gerade.

Die Anzahl der Zeichenwechsel in (46) bleibt, wenn die Veränderliche x kontinuierlich wächst, ungeändert, solange kein Glied der Reihe verschwindet. In der Tat besteht dieselbe aus stetigen Funktionen, d. h. aus Funktionen, die nicht ihr Zeichen wechseln können ohne zu verschwinden. Versuchen wir also zunächst zu erkennen, was passiert, wenn x durch einen Wert α hindurchgeht, der eine Wurzel von f ist. Wenn r der Grad der Vielfachheit von α ist, so bieten, wie uns bekannt ist (§ 494, b), rechts von α die $r+1$ ersten Glieder der Reihe (46) keinen Zeichenwechsel dar, während sie links r solche aufweisen. Man hat also beim Durchgang von x durch α einen Verlust von r Zeichenwechseln, also gerade so vieler Zeichenwechsel, als Wurzeln in α angehäuft sind (§ 450, b). Es bleibt noch zu untersuchen, ob die Reihe (46) andere Verluste oder Gewinne von Zeichenwechseln erfahren kann, wenn x durch einen Wert α hindurchgeht, der ohne eine Wurzel von f zu sein irgend eine Derivierte, z. B. $f^{(i)}$, zum Verschwinden bringt. Man kann immer annehmen $f^{(i-1)}(\alpha) \neq 0$, und wenn r der Grad der Vielfachheit von α ist, so muß man auch voraussetzen $f^{(i+r)}(\alpha) \neq 0$. Dies vorausgeschickt konstruiere man um α ein Intervall, in welchem die Funktionen $f^{(i-1)}$ und $f^{(i+r)}$ jede ein konstantes Vorzeichen bewahren. Wenn dieses für beide dasselbe ist, so bietet die Reihe

$$(47) \qquad f^{(i-1)},\ f^{(i)},\ f^{(i+1)},\ \ldots,\ f^{(i+r)},$$

welche ein Teil von (46) ist, rechts von α keinen Zeichenwechsel dar, während sie links deren r oder $r+1$ aufweist, je nachdem r gerade oder ungerade ist. Die Zahl der verlorenen Zeichenwechsel ist also gerade. Wenn dagegen das Zeichen von $f^{(i-1)}(\alpha)$ demjenigen von $f^{(i+r)}(\alpha)$ entgegengesetzt ist, so bietet die betrachtete Partialreihe einen Zeichenwechsel rechts von α und links $r+1$ oder r, je nachdem r gerade oder ungerade ist, sodaß ein Verlust von r oder von $r-1$, d. h. immer einer geraden Zahl von Zeichenwechseln eintritt. Aus alledem folgt, daß, wenn x von einer Grenze irgend eines Intervalles bis zu der andern wächst, die Reihe (46) nur Zeichenwechsel verlieren kann und die Anzahl der verlorenen Zeichenwechsel gleich ist der Anzahl der gleichen oder ungleichen Wurzeln, die in dem betrachteten Intervalle liegen, vermehrt um eine gerade Zahl, die sich in besonderen Fällen auf Null reduzieren kann[1]).

503. Bemerkungen. a) Das Theorem von Descartes ist eine unmittelbare Folgerung sowohl des Theorems von Budan wie des Theorems von Laguerre. Um sich davon zu überzeugen, braucht man nur zu bemerken, daß für $a = 0$ und für $x = 0$ die Reihen (45) und (46) sich abgesehen von positiven Faktoren auf die Reihe der Koeffizienten reduzieren, da

$$f(0) = a_n, \quad f_1(0) = f'(0) = a_{n-1}, \quad f_2(0) = \tfrac{1}{2} f''(0) = a_{n-2}, \quad \ldots$$

ist, während für hinreichend großes x alle Funktionen (46) schließlich das Vorzeichen von a_0 annehmen und bewahren. Die Zeichenwechsel, welche verloren gehen, wenn x von 0 nach Unendlich zunimmt, sind also alle diejenigen, welche in der Reihe $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ auftreten können, nachdem man die verschwindenden Glieder beseitigt hat. Um diese Beseitigung zu rechtfertigen, braucht man nur als untere Grenze des Intervalles, auf welches man das Theorem von Budan anwendet, anstatt der Null eine beliebig kleine positive Zahl zu wählen. Dann hat man zu bemerken, daß, wenn für $x = 0$ nur die Zwischenglieder der Reihe (47) null sind, diese Reihe rechts von der Null gerade so viele Zeichenwechsel aufweist, als die äußersten Glieder allein bieten, d. h. einen einzigen oder keinen.

b) Das Theorem von Budan gestattet nicht wie ein anderes, welches wir in kurzem beweisen werden, genau anzugeben, wie viele Wurzeln es in einem gegebenen Intervalle gibt. Es ist nichtsdestoweniger bei der praktischen Rechnung sehr nützlich. Noch nützlicher ist ein Theorem von Laguerre[2]), welches dem in § 501 analog ist.

---

1) Ein etwas einfacherer Beweis ist von Fouret veröffentlicht worden in den „Nouv. Ann. de Math." (1892).

2) „Nouvelles Annales de Mathématiques" (1880, p. 55).

Sylvester verdankt man ferner eine bemerkenswerte Vervollkommnung des Theorems von Budan, welche naturgemäß eine Vervollkommnung des Theorems von Descartes einschließt, die von Campbell[1]) herrührt.

504. Übungen. a) Gegeben ist eine ganze Funktion f, deren n Wurzeln sämtlich reell sind. Man will beweisen, daß, wenn das Intervall zwischen irgend zwei aufeinanderfolgenden Wurzeln in n gleiche Teile geteilt wird, die Derivierte f' in den äußersten Teilintervallen nicht verschwindet. Es seien α und β die beiden Wurzeln, und man setze gleich Null

$$\frac{f'}{f} = \cdots + \frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{x-\beta} + \cdots,$$

indem man auf einer Seite die Wurzeln läßt, welche α nicht übertreffen, und auf die andere diejenigen bringt, welche gleich β oder größer als β sind, ferner x einen Wert erteilt denkt, der zwischen α und β liegt und f' zum Verschwinden bringt. Man erhält auf diese Weise

$$\cdots + \frac{1}{x-\alpha} = \frac{1}{\beta - x} + \cdots,$$

eine Gleichung zwischen zwei Summen von wesentlich positiven Brüchen, von denen, wie man sieht, auf jeder Seite nur die größten geschrieben sind. Daraus folgt

$$(48) \qquad \frac{1}{x-\alpha} \leqq \frac{n-1}{\beta - x}, \quad \frac{n-1}{x-\alpha} \geqq \frac{1}{\beta - x},$$

mithin

$$\alpha + \frac{\beta - \alpha}{n} \leqq x \leqq \beta - \frac{\beta - \alpha}{n}.$$

Ist insbesondere $n = 2$, so teilt die einzige Wurzel von f' das Intervall (α, β) in zwei gleiche Teile.

b) Zu beweisen, daß, wenn alle n Wurzeln von f reell und einfach sind und wenn k eine positive Zahl ist, $f^2 + kf'^2$ lauter imaginäre Wurzeln hat und für jede von ihnen der Koeffizient von i dem absoluten Betrage nach kleiner als $n\sqrt{k}$ ist. Schreibt man die zu betrachtende Gleichung in der Form

$$\frac{f'}{f} = \frac{1}{x-\alpha_1} + \frac{1}{x-\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{x-\alpha_n} = \pm \frac{i}{\sqrt{k}}$$

und setzt $x = \alpha + i\beta$, so muß man haben

$$\frac{\alpha - \alpha_1 - i\beta}{(\alpha - \alpha_1)^2 + \beta^2} + \frac{\alpha - \alpha_2 - i\beta}{(\alpha - \alpha_2)^2 + \beta^2} + \cdots + \frac{\alpha - \alpha_n - i\beta}{(\alpha - \alpha_n)^2 + \beta^2} = \pm \frac{i}{\sqrt{k}}.$$

Daraus folgt, wenn man die rein imaginären Teile der beiden Seiten gleichsetzt, nachdem man bemerkt hat, daß β nicht verschwinden kann,

1) Todhunter, „Algebra" (3. ed., p. 218). Petersen, „Algebraische Gleichungen" (S. 212). Siehe auch eine Note von Poulain in den Comptes-rendus der Pariser Akademie (1888, p. 470).

$$\frac{1}{(\alpha-\alpha_1)^2+\beta^2}+\frac{1}{(\alpha-\alpha_2)^2+\beta^2}+\cdots+\frac{1}{(\alpha-\alpha_n)^2+\beta^2}=\frac{1}{|\beta|\sqrt{k}}.$$

Die Nenner auf der linken Seite sind wenigstens gleich β^2. Es ist also successiv

$$\frac{n}{\beta^2}>\frac{1}{|\beta|\sqrt{k}},\quad |\beta|<n\sqrt{k}.$$

Mit anderen Worten: Wenn man im Abstande $n\sqrt{k}$ die Parallelen zur Achse der reellen Zahlen zieht, so liegen in dem von ihnen begrenzten Streifen alle Wurzeln von $f^2+kf'^2$, aber keine auf der Achse[1]).

c) Wenn dagegen k negativ wäre, so würden alle Wurzeln reell sein, wie man sofort aus einer interessanten Verallgemeinerung des Theorems von Rolle herleitet, die von Waring herrührt. Bezeichnet man mit α, β, γ, . . . die Wurzeln von f, mit r, s, t, . . . die zugehörigen Ordnungszahlen, mit k irgend eine reelle Zahl, und setzt man die Funktion $f+kf'$ gleich Null, so erhält man die Gleichung

$$\frac{r}{x-\alpha}+\frac{s}{x-\beta}+\frac{t}{x-\gamma}+\cdots+\frac{1}{k}=0.$$

Die linke Seite ist eine Funktion $\varphi(x)$, die in jedem Intervalle stetig ist, von welchem α, β, γ, . . . ausgeschlossen sind. Es liegt auf der Hand, daß in der Umgebung einer Wurzel α in φ das zugehörige Glied $\frac{r}{x-\alpha}$ überwiegt, sodaß die Funktion links von α negativ, rechts von α positiv ist. Folglich wechselt φ sein Zeichen, wenn x zwischen zwei benachbarten Wurzeln von f variiert, und verschwindet daher wenigstens einmal. Beachtet man ferner, daß für genügend großes $|x|$ die Funktion $\varphi(x)$ schließlich das Zeichen von k annimmt und bewahrt, so wird es evident, daß φ noch eine Wurzel zuläßt, die kleiner oder größer ist als alle Wurzeln von f, je nachdem k positiv oder negativ ist. Wenn also ν die Anzahl der verschiedenen Wurzeln von f ist, so ist klar, daß die Funktion $f+kf'$ wenigstens ν reelle Wurzeln besitzt, die von denen von f verschieden sind, und da sie (§ 450, c) für alle vielfachen Wurzeln von f verschwindet, so hat sie außerdem noch $(r-1)+(s-1)+\cdots=n-\nu$ Wurzeln mit f gemeinsam. Wenn also f lauter reelle Wurzeln hat, so läßt sich dasselbe von $f+kf'$ behaupten.

d) Wenn man für k verschiedene reelle Werte setzt, so gelingt es leicht, den letzten Satz zu verallgemeinern. Setzt man immer noch voraus, daß f lauter reelle Wurzeln hat, so kann man dasselbe zunächst von $f+k_1f'$ behaupten, ferner aber von

$$f+k_1f'+k_2(f'+k_1f'')=f+(k_1+k_2)f'+k_1k_2f'' \text{ u. s. w.}$$

behaupten. Folglich gilt der Satz: Wenn die n Wurzeln von f reell sind, so hat auch $af+bf'+cf''+\cdots$ lauter reelle Wurzeln, vorausgesetzt, daß man dasselbe von $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots$

1) In Betreff anderer nützlicher Übungen siehe „Nouvelles Annales de Mathématiques" 1885, p. 321; 1887, p. 36.

sagen kann. Auf diese Weise läßt sich z. B. zeigen, daß alle Wurzeln der folgenden Gleichungen[1]) reell sind:

$$x^n + \frac{n^2}{1} x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{1 \cdot 2} x^{n-2} + \cdots = 0,$$

$$x^n + \frac{n}{1 \cdot 2} x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^{n-2} + \cdots = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

e) Zu beweisen, daß, wenn f lauter reelle Wurzeln hat, das Quadrat jedes Koeffizienten größer ist als das Produkt der benachbarten Koeffizienten. Es seien

$$\cdots + a_{\nu-1} x^{n-\nu+1} + a_\nu x^{n-\nu} + a_{\nu+1} x^{n-\nu-1} + a_{\nu+2} x^{n-\nu-2} + \cdots$$

vier Glieder von f. Bei Multiplikation mit $x - h$ werden sie

$$\cdots + (a_\nu - h a_{\nu-1}) x^{n-\nu+1} + \cdots + (a_{\nu+2} - h a_{\nu+1}) x^{n-\nu-1} + \cdots.$$

Wenn a_ν null wäre, so wäre der zu beweisende Satz auf Grund einer früheren Bemerkung (§ 499, c) evident. Nehmen wir also an $a_\nu \neq 0$. Nach derselben Bemerkung müssen, wenn wir $h = \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$ setzen, die Koeffizienten $a_\nu - h a_{\nu-1}$ und $a_{\nu+2} - h a_{\nu+1}$ entgegengesetzte Zeichen annehmen, da alle Wurzeln von $(x-h)f$ reell sind. Nun hat man

$$a_\nu - h a_{\nu-1} = \frac{a_\nu^2 - a_{\nu-1} a_{\nu+1}}{a_\nu}, \qquad a_{\nu+2} - h a_{\nu+1} = \frac{a_\nu a_{\nu+2} - a_{\nu+1}^2}{a_\nu}.$$

Also hat $a_\nu^2 - a_{\nu-1} a_{\nu+1}$ das Zeichen von $a_{\nu+1}^2 - a_\nu a_{\nu+2}$, d. h. ein von ν unabhängiges Zeichen. Nun werden bei der Multiplikation mit $x - h$ die drei ersten Glieder

$$a_0 x^{n+1} + (a_1 - h a_0) x^n + (a_2 - h a_1) x^{n-1} + \cdots.$$

Da $a_0 \neq 0$ ist, so kann man $h = \frac{a_1}{a_0}$ setzen, und es ist notwendig, daß das Zeichen von a_0 demjenigen von

$$a_2 - h a_1 = \frac{a_0 a_2 - a_1^2}{a_0}$$

entgegengesetzt sei. Also ist $a_1^2 > a_0 a_2$, mithin $a_\nu^2 > a_{\nu-1} a_{\nu+1}$, was auch ν sein mag. Dieses von De Gua herrührende Theorem gestattet oft die Existenz imaginärer Wurzeln zu konstatieren, wenn dies mit Hilfe des Theorems von Descartes nicht gelingt. Unter den Folgerungen heben wir hervor die Existenz imaginärer Wurzeln bei gewissen Gleichungen, z. B. bei denjenigen, bei welchen drei aufeinander folgende Glieder eine geometrische Progression oder vier eine arithmetische Progression bilden.

f) Wir fordern den Leser auf, die verschiedenen in diesem Kapitel behandelten Fragen noch einmal in Angriff zu nehmen, um zu versuchen, sie direkt in der Ebene zu behandeln. Man beginne mit folgender Bemerkung: Wenn man durch eine Wurzel x von f' irgend eine Gerade

---

1) In betreff anderer analoger Übungen siehe den „Traité“ von Laurent, III. Teil, 4. Aufl., S. 70.

zieht, die um θ gegen die Achse der reellen Zahlen geneigt ist, und mit $r_1, r_2, \ldots$ die Abstände zwischen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ und x bezeichnet, ferner mit $\theta_1, \theta_2, \ldots$ die Neigungen der Geraden, die von x nach $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ führen, gegen die betrachtete Gerade, so hat man

$$\frac{x-\alpha_1}{r_1 e^{i\theta_1}} = \frac{x-\alpha_2}{r_2 e^{i\theta_2}} = \cdots = \frac{x-\alpha_n}{r_n e^{i\theta_n}} = -e^{i\theta}.$$

Die Gleichung

$$\frac{1}{x-\alpha_1} + \frac{1}{x-\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{x-\alpha_n} = 0 \tag{49}$$

nimmt eine von θ unabhängige Form an. Sie spaltet sich in zwei Gleichungen, von denen eine die folgende ist

$$\frac{\sin\theta_1}{r_1} + \frac{\sin\theta_2}{r_2} + \cdots + \frac{\sin\theta_n}{r_n} = 0.$$

Diese sagt uns, daß die Abstände $r_1 \sin\theta_1$, $r_2 \sin\theta_2, \ldots$ zwischen α_1, $\alpha_2, \ldots$ und der betrachteten Geraden nicht alle positiv oder alle negativ sein können. Also liegen die Wurzeln von f auf beiden Seiten jeder Geraden, die durch irgend eine Wurzel von f' gezogen ist, wenn sie nicht alle auf die Gerade fallen, unter welcher Annahme dasselbe von den Wurzeln von f' gelten muß. Wir gelangen auf diese Weise dazu, uns ein früheres Theorem (§ 496, b) klar zu machen, und wir erkennen überdies noch folgendes[1]): Wenn die Wurzeln von f alle einem gegebenen Gebiet in der Ebene angehören, welches von einem konvexen Kontur begrenzt ist, so fallen in dasselbe Gebiet alle Wurzeln von f'. Andere Einschränkungen für die Lage der Wurzeln von f' kann man finden, indem man in der Ebene die erste Übung wiederholt. Man braucht nur α und β als die zu einer bestimmten Wurzel x von f' am meisten benachbarten Wurzeln zu betrachten. Da der Modul jedes Bruches auf der linken Seite von (49) nicht größer sein kann als die Summe der Moduln der andern, so erhält man sofort an Stelle von (48) die Einschränkungen

$$|x-\beta| \leqq (n-1)|x-\alpha|, \quad |x-\alpha| \leqq (n-1)|x-\beta|.$$

Daraus ergibt sich folgendes: Wenn man unter den Kreisen, die α von β harmonisch trennen, die beiden zeichnet, welche die Strecke $\alpha\beta$ in den Verhältnissen 1 zu $n-1$ und $n-1$ zu 1 teilen, so erreicht man dadurch, α und β von der Wurzel x von f' zu trennen. Errichtet man ferner auf den geradlinigen Strecken, welche α und β mit den übrigen Wurzeln verbinden, die Mittelsenkrechten, so ergeben sich in dem Teil der Ebene, der außerhalb der beiden Kreise liegt, neue Einschränkungen für die Lage von x, da dieser Punkt nach der Voraussetzung nicht weiter von α und β entfernt liegen darf als von irgend einer andern Wurzel. So gelingt es mit Hilfe von Geraden und Kreisen immer, wenn die Wurzeln von f gegeben sind, die Grenzen von Gebieten zu bezeichnen, in welche notwendig die verschiedenen Wurzeln von f' fallen.

---

1) Wegen dieser und anderer Fragen derselben Art siehe die zahlreichen Arbeiten, welche Mansion in seinen „Mélanges mathématiques" zitiert (p. 26).

g) Beim Studium der gegenseitigen Verteilung der Wurzeln von f und f' tritt ein bemerkenswertes Gesetz hervor, welches sich auf die Erhaltung gewisser Elemente bezieht. So bleibt, wenn man von f zu f' und zu den folgenden Derivierten übergeht, der Schwerpunkt der Wurzeln

$$\xi_0 = \frac{1}{n}(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)$$

erhalten, da (§ 465) die Summe der Wurzeln von

$$f = x^n - c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} - \cdots \pm c_n$$

$c_1 = n\xi_0$ ist, während die der Wurzeln von $f' = nx^{n-1} - (n-1)c_1 x^{n-2} + \cdots$ gleich $\frac{n-1}{n} c_1 = (n-1)\xi_0$ ist, sodaß das arithmetische Mittel immer ξ_0 ist. Dies ist auch die einzige Wurzel von $f^{(n-1)}$. Die Wurzeln ξ und ξ' von $f^{(n-2)}$, deren Summe $2\xi_0$ ist, haben ein Produkt, welches das arithmetische Mittel der Produkte der Wurzeln von f zu je zweien ist, ebenso der Wurzeln von f' u. s. w. Wir wollen uns auf die Betrachtung der Zahlen ξ_0 und $\xi\xi'$ beschränken und bemerken, daß sich aus

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots = n\xi_0,$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 + \cdots = \tfrac{1}{2} n(n-1)\xi\xi'$$

ergibt

$$(\alpha_1 - \xi_0)^2 + (\alpha_2 - \xi_0)^2 + \cdots + (\alpha_n - \xi_0)^2$$
$$= n(n-1)(\xi_0{}^2 - \xi\xi') = \tfrac{1}{4} n(n-1)(\xi - \xi')^2.$$

Wenn wir nun mit ξ_ν und η_ν die rechtwinkligen cartesischen Koordinaten von α_ν in bezug auf den Anfangspunkt ξ_0 und die Gerade $\xi'\xi$ als Achse der ξ bezeichnen, so haben wir

$$\frac{\alpha_1 - \xi_0}{\xi_1 + i\eta_1} = \frac{\alpha_2 - \xi_0}{\xi_2 + i\eta_2} = \cdots = \frac{\alpha_n - \xi_0}{\xi_n + i\eta_n} = \frac{\xi - \xi'}{2c},$$

wenn mit c die Entfernung von ξ und ξ' nach ξ_0 bezeichnet wird. Also ist

$$(\xi_1 + i\eta_1)^2 + (\xi_2 + i\eta_2)^2 + \cdots + (\xi_n + i\eta_n)^2 = n(n-1)c^2,$$

folglich

$$\sum(\xi_\nu{}^2 - \eta_\nu{}^2) = n(n-1)c^2, \quad \sum \xi_\nu\eta_\nu = 0,$$

wobei sich die Summationen über die Werte 1, 2, 3, ..., n von ν erstrecken. Nun bemerke man, daß auch

$$\sum \xi_\nu = 0, \quad \sum \eta_\nu = 0$$

ist und daß man daher hat

$$\sum(\xi_\nu \sin\theta - \eta_\nu \cos\theta + h)^2 = \tfrac{1}{2}\sum(\xi_\nu{}^2 + \eta_\nu{}^2) - \tfrac{1}{2} n(n-1)c^2 \cos 2\theta + nh^2.$$

Man sieht sofort, daß diese Summe ein Minimum ist für $\theta = 0$ und $h = 0$. Daraus folgt, daß die Gerade $\xi\xi'$ unter allen Geraden der Ebene diejenige ist, für welche die Summe der Quadrate aller Abstände von den Wurzeln von f ihren kleinsten Wert erreicht. Aus dem oben Gesagten geht hervor, daß dieselbe Gerade diese charakteristische Eigenschaft auch in bezug auf f', f'', ... genießt. In dem besonderen Falle der kubischen Gleichung folgt, wenn man

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 6a^2, \quad \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = 6b^2$$

setzt, sodaß $a^2 - b^2 = c^2$ ist, aus den Relationen

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0, \quad \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3 = 0$$

und den vorstehenden:

$$\frac{\eta_1}{\xi_2 - \xi_3} = \frac{\eta_2}{\xi_3 - \xi_1} = \frac{\eta_3}{\xi_1 - \xi_2} = \pm \frac{b}{a\sqrt{3}},$$

mithin

$$\frac{\xi_1^2}{a^2} + \frac{\eta_1^2}{b^2} = \frac{3\xi_1^2 + (\xi_2 - \xi_3)^2}{3a^2} = \frac{2\xi_1^2 + (\xi_2 + \xi_3)^2 + (\xi_2 - \xi_3)^2}{3a^2} = 4.$$

Das Gleiche gilt von den anderen beiden Punkten. Also geht die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, welche als Brennpunkte die Wurzeln ξ und ξ' der Derivierten hat, durch die Punkte $\left(-\frac{1}{2}\xi_1, -\frac{1}{2}\eta_1\right)$ u. s. w., d. h. durch die Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$. Man findet so ein bekanntes Theorem (§ 415) wieder.

Das Theorem von Sturm.

505. Es sei f eine ganze Funktion (mit reellen Koeffizienten). Wir können immer annehmen (§ 456), daß sie keine vielfachen Wurzeln hat. f_1 sei ihre Derivierte. Man dividiere f durch f_1, und der Rest mit umgekehrtem Vorzeichen werde mit f_2 bezeichnet. Ebenso teile man f_1 durch f_2, und f_3 sei der Rest mit umgekehrtem Vorzeichen. Fährt man so fort, so gelangt man zur Bildung einer Reihe von Funktionen, deren Grad abnimmt,

$$f(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots .$$

Die letzte von ihnen ist eine von Null verschiedene Konstante. Die Polynome f und f_1 sind nämlich, weil f keine vielfachen Wurzeln hat, relativ prim, und es können daher die ausgeführten Operationen, welche, abgesehen von den Zeichenumkehrungen, gerade die zur Aufsuchung des größten gemeinsamen Teilers von f und f_1 notwendigen sind, nicht zu einem verschwindenden Rest führen. Die erhaltenen Funktionen sind die Sturmschen Funktionen, und die von ihnen gebildete Reihe heißt die Sturmsche Reihe.

506. Theorem von Sturm[1]. Wenn x von a bis b wächst, so verliert die zur Funktion f gehörige Sturmsche Reihe so

---

1) Diesem Theorem ist das ganze 8. Kapitel des Lehrbuches von Weber gewidmet (Bd. 1, S. 316—358).

viele Zeichenwechsel, als es Wurzeln von f in dem Intervalle (a, b) gibt.

Es liegt auf der Hand, daß, wenn man x in stetiger Weise von a bis b variieren läßt, die Anzahl der Zeichenwechsel in der Sturmschen Reihe immer dieselbe bleibt, so lange nicht irgend eine Funktion in der Reihe ihr Zeichen ändert. Wir müssen deshalb wegen der Stetigkeit dieser Funktionen untersuchen, was eintritt, wenn x eine von ihnen zum Verschwinden bringt. Bemerken wir vor allem, daß zwei aufeinanderfolgende Funktionen nicht gleichzeitig verschwinden können. Dies ist leicht bewiesen für f und f_1, da f keine vielfachen Wurzeln hat. Da überdies zwischen drei aufeinanderfolgenden Funktionen die Relation $f_{i-1} = f_i\varphi_i - f_{i+1}$ besteht, wo φ_i eine ganze Funktion ist, so würde, wenn f_i und f_{i+1} gleichzeitig verschwinden könnten, dasselbe von f_{i-1} und f_i gelten, ferner von f_{i-2} und f_{i-1} u. s. w., endlich von f und f_1. Wenn also f_i verschwindet, so verschwinden die benachbarten Funktionen nicht. Sie nehmen entgegengesetzte Zeichen an; denn wenn man für $x = \alpha$ hat $f_i = 0$, so ist $f_{i-1} = -f_{i+1}$. Wir können uns um α ein Intervall denken so klein, daß die Funktionen f_{i-1} und f_{i+1}, welche für $x = \alpha$ stetig und von Null verschieden sind, in dem Intervall das Zeichen bewahren, welches sie für diesen Wert von x haben. Um eine bestimmte Vorstellung zu haben, sei $+$ das Zeichen von f_{i-1} und infolgedessen $-$ das Zeichen von f_{i+1}. Alsdann haben f_{i-1}, f_i, f_{i+1} links wie rechts von α die Zeichen $+, \pm, -$. Welches auch das Zeichen von f_i vor und nach seinem Verschwinden sein mag, sicher ist, daß die Reihe f_{i-1}, f_i, f_{i+1} einen einzigen Zeichenwechsel links von α bietet und einen einzigen rechts. Wir ersehen daraus, daß der Durchgang von x durch eine Wurzel irgend einer Zwischenfunktion, wenn es nicht gleichzeitig eine Wurzel von f ist, keine Änderung in der Zahl der Zeichenwechsel der Sturmschen Reihe hervorbringt. Eine solche Änderung kann also nur stattfinden, wenn x gleich einer Wurzel von f wird. Und in diesem Falle geht tatsächlich ein Zeichenwechsel verloren, da, wie wir gesehen haben (§ 494, a), f_1 rechts von α das Zeichen von f und links von α das entgegengesetzte Zeichen hat. Während also jedesmal ein Zeichenwechsel verloren geht, wenn x durch eine Wurzel α von f hindurchgeht, so geht für jeden andern Wert von x weder einer verloren noch kommt einer hinzu. Es ist also klar, daß beim Übergang der Veränderlichen x von dem Werte a zu dem Werte b so viele Zeichenwechsel verloren gehen, als f in dem Intervalle (a, b) Wurzeln hat.

507. Bemerkungen. a) Bei der Bildung der Sturmschen Reihe ist es erlaubt, die verschiedenen Funktionen, welche im Laufe der Rechnung auftreten, mit positiven Zahlen zu multiplizieren, und es ist nützlich, diese Multiplikationen bei den numerischen Anwendungen passend einzurichten, um die gebrochenen Koeffizienten zu vermeiden, welche durch die successiven Divisionen hereinkommen.

b) Beim Beweise des Theorems kommt das letzte Glied der Reihe, welches konstant ist, nicht vor, aber nur deshalb, weil es als von Null verschieden ein bestimmtes Vorzeichen bewahrt. Daraus folgt, daß, wenn eine der Funktionen der Reihe in dem betrachteten Intervalle ihr Zeichen nicht ändert, mit ihr die Sturmsche Reihe geschlossen werden darf.

c) Dies läßt sich auch in anderer Weise rechtfertigen, wenn man das Wechseln der Zeichen in der Sturmschen Reihe näher untersucht. Betrachtet man z. B. einen Zeichenwechsel, der z. B. zwischen f_i und f_{i+1} für $x = a$ bestehen mag, so wird er, während x in stetiger Weise wächst, links von f_i oder rechts von f_{i+1} hinrücken, sobald eine dieser Funktionen ihr Zeichen wechselt. Wenn also die erste, die ihr Zeichen zu wechseln hat, f_i ist, so wird der Zeichenwechsel nach links rücken, und auf dieselbe Weise wird er, wenn er von dem Umstand begünstigt wird, daß die Funktion links ihr Zeichen eher wechselt als die rechts, nach links fortschreiten, bis er in der Reihe der Zeichenwechsel und Zeichenfolgen die erste Stelle einnimmt. Dann wird er sich schließlich sicher in eine Zeichenfolge verwandeln, sobald x eine Wurzel von f trifft. Nun bildet eine Sturmsche Funktion, die in dem betrachteten Intervalle ihr Zeichen nicht wechselt, ein Hindernis dagegen, daß die Zeichenwechsel von rechts nach links übergehen oder umgekehrt. Gerade hieran liegt es, daß von den beiden Teilen, in welche sie die Sturmsche Reihe zerlegt, die Teilreihe rechts bei der Abzählung der verlorenen Zeichenwechsel nicht in Frage kommt, da keiner von den Zeichenwechseln, die sie aufweist, an den Anfang der ganzen Reihe gelangen kann, um sich dort in eine Zeichenfolge zu verwandeln.

d) Bisher ist stillschweigend vorausgesetzt, daß für $x = a$ und für $x = b$ keine Sturmsche Funktion verschwindet. Sonst hätten wir garnicht gewußt, wie wir uns bei der Zählung der Zeichenwechsel zu verhalten haben. Von jetzt ab wollen wir vereinbaren, diese Zählung so vorzunehmen, daß wir von den verschwindenden Gliedern absehen. Hiernach wird es aber notwendig zuzusehen, ob nicht die Fassung des Theorems modifiziert werden muß. Wie wir bereits gesehen haben, weist links wie rechts von einer Wurzel von f_i die Terne f_{i-1}, f_i, f_{i+1} einen einzigen Zeichenwechsel auf, und gerade einen würde man auch zwischen f_{i-1} und f_{i+1} zählen, nachdem man $f_i = 0$ unterdrückt hat. Eine Modifikation in der Formulierung des Theorems könnte also nur in dem Falle eintreten, wo eine Grenze des Intervalles eine Wurzel von f ist. Wird alsdann der zu $x = a$ oder $x = b$ gehörige verschwindende Wert von f unterdrückt, so kommen wir sicherlich dahin, einen Zeichenwechsel nicht zu zählen, und die Sache liegt dann so, als ob wir ohne f zu unterdrücken Werte $a' > a$ und $b' > b$ betrachtet hätten, die genügend nahe an a und b liegen. Die Zahl der Zeichenwechsel, welche wir in dieser Weise berechnen, wird also dieselbe sein wie die, welche wir in dem Intervall (a', b') erhalten hätten, d. h. es ist in dieser Zahl eventuell eingeschlossen nur die Wurzel b. Aus alledem folgt, daß die Fassung des Sturmschen Theorems sich folgendermaßen modifiziert: Die Zeichenwechsel, welche die Sturmsche Reihe verliert, wenn die Veränderliche von einer Grenze eines Intervalles bis zu der andern wächst, sind ebensoviele wie die in dem Intervall mit Ausschluß der unteren Grenze enthaltenen Wurzeln. Wenn man daher für $x = a$ oder $x = b$ in der Sturmschen Reihe $f = 0$ findet und nach Unterdrückung dieses wie jedes andern verschwindenden Gliedes beim Übergange der Veränderlichen x vom Werte a zum Werte b einen Verlust von v Zeichenwechseln konstatiert, so wird man folgendes behaupten können: Außer der Wurzel a gibt es noch v Wurzeln in dem Intervalle (a, b). Dagegen gibt es außer b nur $v - 1$ Wurzeln, die diesem Intervalle angehören, a nicht mitgerechnet.

e) Das Theorem von Sturm gilt auch in dem Falle, wo die Funktion f mehrfache Wurzeln hat, vorausgesetzt, daß sie ihres Grades der Vielfachheit beraubt werden. Man wird in der Tat als letztes Glied der Sturmschen Reihe eine Funktion finden, die dem größten gemeinsamen Teiler von f und f_1 proportional ist. Nennt man φ_i den Quotienten von f_i durch diesen Divisor (der offenbar alle Funktionen der Reihe teilt), so ist klar, daß die Zeichenwechsel von $f, f_1, f_2, \ldots$ dieselben sind wie die, welche die Reihe $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ aufweist. Diese Reihe hat dieselben Eigenschaften wie die zu der Funktion φ gehörige Sturmsche Reihe, d. h. zu einer Funktion, welche als einfache Wurzeln alle Wurzeln von f hat (und nur diese).

508. Anwendungen. a) Das Theorem von Sturm lehrt genau die Anzahl der reellen Wurzeln einer gegebenen Gleichung kennen und gestattet anzugeben, wie viele positive und wie viele negative es gibt. So besteht für $f = x^4 - 2x^2 + x - 1$ die Sturmsche Reihe aus dieser Funktion und folgenden andern:

$$f_1 = 4x^3 - 4x + 1,\quad f_2 = 4x^2 - 3x + 4,\quad f_3 = 23x + 8,\quad f_4 = -2924.$$

Für negatives und dem absoluten Betrage nach hinreichend großes x ist die Folge der Zeichen

$$+ \quad - \quad + \quad - \quad - \quad \text{(drei Zeichenwechsel).}$$

Für $x = 0$ sind die Zeichen die der unabhängigen Glieder, d. h.

$$- \quad + \quad + \quad + \quad - \quad \text{(zwei Zeichenwechsel).}$$

Wir haben einen verlorenen Zeichenwechsel, also eine einzige negative

Wurzel. Für hinreichend großes x sind die Zeichen die der ersten Glieder, d. h.

$$+ \quad + \quad + \quad + \quad - \quad \text{(ein Zeichenwechsel).}$$

Also hat die Gleichung $x^4 - 2x^2 + x - 1 = 0$ eine positive, eine negative und zwei konjugiert imaginäre Wurzeln. Wir können hinzufügen, daß die positive Wurzel zwischen 1 und 2, die negative zwischen -2 und -1 liegt. Das Theorem von Descartes sagt uns nur, daß die Gleichung eine negative und eine positive Wurzel hat, läßt aber den Zweifel, daß die beiden andern reell und positiv sein könnten.

b) Man kann das Sturmsche Theorem anwenden auf die Ermittelung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß eine algebraische Gleichung

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

lauter reelle Wurzeln hat. Zunächst muß die Sturmsche Reihe, damit sie n Zeichenwechsel verlieren kann, vollständig sein, muß also aus $n+1$ Funktionen von den Graden n, $n-1$, $n-2, \ldots, 1$, 0 bestehen. Zweitens darf für hinreichend großes x die genannte Reihe nur noch Zeichenfolgen haben, und es muß daher, wenn $a_0 > 0$ vorausgesetzt wird, das erste Glied jeder Sturmschen Funktion positiv sein. Diese Bedingungen sind hinreichend. Wenn wir sie nämlich als erfüllt annehmen und x einen negativen Wert beilegen, der dem absoluten Betrage nach hinreichend groß ist, so nehmen die Funktionen alternierende Vorzeichen an, und ihre Reihe bietet genau n Zeichenwechsel. Grenzt man also ein Intervall $(-l, l)$ ab, sodaß außerhalb desselben keine reellen Wurzeln von f existieren, so gehen beim Übergang der Veränderlichen x von $-l$ nach l gerade n Zeichenwechsel verloren, und man hat daher nach dem Sturmschen Theorem n reelle Wurzeln. So sind bei der Gleichung $x^3 + px + q = 0$ die Sturmschen Funktionen folgende:

$$f = x^3 + px + q, \quad f_1 = 3x^2 + p, \quad f_2 = -2px - 3q, \quad f_3 = -4p^3 - 27q^2.$$

Es muß also sein $p < 0$, $4p^3 + 27q^2 < 0$. Aber die erste Bedingung ist in der zweiten enthalten. Wäre nämlich p null oder positiv, so könnte $4p^3 + 27q^2$ nicht negativ sein. Folglich ist (vgl. § 314, e) die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $x^3 + px + q$ lauter reelle und einfache Wurzeln hat, $4p^3 + 27q^2 < 0$.

509. Auf die Fragen des vorigen Paragraphen werden wir in allgemeiner Weise antworten können, wenn es uns gelingt die Ausdrücke der Sturmschen Funktionen zu erhalten. Der ganze Quotient von

$$f = x^n - cx^{n-1} + \cdots \quad \text{durch} \quad f_1 = nx^{n-1} - (n-1)cx^{n-2} + \cdots$$

ist notwendig $\frac{1}{n}\left(x - \frac{c}{n}\right)$, und man hat daher

$$f = \frac{1}{n}\left(x - \frac{c}{n}\right)f_1 - f_2,$$

woraus folgt

$$\frac{f_2}{f} = \frac{1}{n}\left(x - \frac{c}{n}\right)\sum_i \frac{1}{x-\alpha_i} - 1 = \frac{1}{n^2}\sum_i \frac{n\alpha_i - c}{x - \alpha_i}.$$

Bemerkt man ferner, daß

$$n\alpha_i - c = (\alpha_i - \alpha_1) + (\alpha_i - \alpha_2) + \cdots + (\alpha_i - \alpha_n)$$

ist, so kann man auch schreiben

$$\frac{f_2}{f} = \frac{1}{n^2}\sum_{i,j}\left(\frac{\alpha_i - \alpha_j}{x - \alpha_i} + \frac{\alpha_j - \alpha_i}{x - \alpha_j}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i,j}\frac{(\alpha_i - \alpha_j)^2}{(x-\alpha_i)(x-\alpha_j)}.$$

Vergleicht man diese Formel mit der für $\frac{f_1}{f}$, so kann man das allgemeine Resultat erraten, welches von Sylvester[1]) gefunden worden ist. Wenn man von gewissen Faktoren absieht, die im Falle von Gleichungen mit reellen Koeffizienten immer positiv sind (und infolgedessen vernachlässigt werden können), so hat man

$$\frac{f_i}{f} = \sum \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2(\alpha_1 - \alpha_3)^2 \cdots (\alpha_{i-1} - \alpha_i)^2}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_i)},$$

wobei sich die Summation auf alle Systeme von i Indices erstreckt, die wie $1, 2, 3, \ldots, i$ unter den Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$ gewählt sind. Im besonderen ist, wie vorauszusehen war, f_n nichts anderes als Δ, die Diskriminante von f. Die letzte Formel zeigt, daß f_i ein Polynom $(n-i)$-ten Grades ist, dessen Koeffizienten ganze symmetrische Funktionen der Wurzeln von f sind und sich folglich als ganze rationale Funktionen der Koeffizienten von f ausdrücken lassen. Nach dem im vorigen Paragraphen Gesagten ist es wichtig, den ersten Koeffizienten von f_i zu kennen, den wir mit σ_i bezeichnen werden. Man hat

$$\sigma_i = \sum(\alpha_1 - \alpha_2)^2(\alpha_1 - \alpha_3)^2 \cdots (\alpha_{i-1} - \alpha_i)^2$$

$$= \sum \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_i \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_i^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{i-1} & \alpha_2^{i-1} & \ldots & \alpha_i^{i-1} \end{vmatrix}^2,$$

und man sieht (§ 30), daß σ_i das Quadrat der Matrix

1) Philosophical Magazine (1839), Journal de Liouville (1862, p. 368). Wegen des Beweises siehe die „Höhere Algebra" von Serret, deutsch von Wertheim (Bd. 1, S. 465) oder das Buch von Salmon-Fiedler (S. 58). Siehe auch über die Sturmschen Funktionen eine Note von Gilbert in den „Nouvelles Annales de Math." (1866, p. 263) und die „Determinanti" von Trudi (Applicazioni, § V).

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{i-1} & \alpha_2^{i-1} & \alpha_3^{i-1} & \dots & \alpha_n^{i-1} \end{vmatrix}$$

ist, sodaß man auch schreiben kann

$$\sigma_i = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{i-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_i \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{i+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{i-1} & s_i & s_{i+1} & \dots & s_{2i-2} \end{vmatrix}.$$

Also ist (§ 466)

$$\sigma_1 = s_0 = n,\ \sigma_2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} = n s_2 - s_1^2 = (n-1)c_1^2 - 2nc_2 \quad \text{u. s. w.},$$

endlich $\sigma_n = \varDelta$.

510. Theorem. Die Anzahl der Paare imaginärer Wurzeln einer ganzen Funktion, die keine vielfachen Wurzeln hat, ist gleich der Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n$.

Dieser Satz läßt sich leicht aus dem Sturmschen Theorem ableiten, wenn man die Bemerkungen des § 508 beachtet. In der Tat, wenn v die Anzahl der Zeichenwechsel in $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ ist, so haben wir offenbar dieselbe Zahl bei der Reihe $f, f_1, f_2, \dots, f_n$ für genügend großes x, da die beiden ersten Funktionen zu einer Zeichenfolge Veranlassung geben. Wenn dagegen x negativ und dem absoluten Betrage nach hinreichend groß ist, so verwandelt sich jede Zeichenfolge in einen Zeichenwechsel und umgekehrt, sodaß die Sturmsche Reihe schließlich $n - v$ Zeichenwechsel bietet. Der Verlust an Zeichenwechseln, wenn x das Intervall $(-l, l)$ wachsend durchläuft, wobei außerhalb des Intervalles keine reellen Wurzeln von f liegen, ist also $n - 2v$, und wir haben daher auf Grund des Sturmschen Theorems $n - 2v$ reelle Wurzeln und infolgedessen v Paare imaginäre Wurzeln.

511. Für das vorstehende Theorem können wir einen andern interessanten Beweis[1]) geben, der unabhängig von der Kenntnis der Sturmschen Funktionen ist. Man betrachte die quadratische Form, welche als Diskriminante

---

1) Siehe eine Abhandlung von Borchardt in Liouvilles Journal, 1847, S. 58.

$$\varDelta = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \ldots & s_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

hat, d. h. gerade die Diskriminante der vorgelegten Gleichung. $\varDelta$ ist von Null verschieden, weil die Wurzeln der Gleichung sämtlich einfach sind, und es ist daher die betrachtete quadratische Form, die sich auch so schreiben läßt

$$\begin{aligned} \varphi = &(s_0 x_1 + s_1 x_2 + s_2 x_3 + \cdots + s_{n-1} x_n) x_1 \\ &+ (s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3 + \cdots + s_n x_n) x_2 \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &+ (s_{n-1} x_1 + s_n x_2 + s_{n+1} x_3 + \cdots + s_{2n-2} x_n) x_n, \end{aligned}$$

reduzierbar auf eine Summe von n nicht verschwindenden Quadraten. Wir müssen hier daran erinnern (§ 98), daß die Anzahl der negativen Quadrate gerade gleich der Anzahl der Zeichenwechsel ist, von der in der Formulierung des Theorems die Rede ist. Es genügt daher φ auf die kanonische Form zu reduzieren und zu zeigen, daß die Zahl der negativen Quadrate gleich der Anzahl der Paare imaginärer Wurzeln der gegebenen Gleichung ist. Im vorliegenden Falle läßt sich die Reduktion auf die kanonische Form unmittelbar ausführen, indem man von dem vollständigen Ausdruck von φ alles absondert, was sich auf eine gegebene Wurzel α bezieht. Man erhält auf diese Weise

$$\begin{aligned} &(x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \cdots + \alpha^{n-1} x_n) x_1 \\ &+ (\alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha^3 x_3 + \cdots + \alpha^n x_n) x_2 \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &+ (\alpha^{n-1} x_1 + \alpha^n x_2 + \alpha^{n+1} x_3 + \cdots + \alpha^{2n-2} x_n) x_n \\ &= (x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \cdots + \alpha^{n-1} x_n)^2. \end{aligned}$$

Setzt man also

$$y_i = x_1 + \alpha_i x_2 + \alpha_i^2 x_3 + \cdots + \alpha_i^{n-1} x_n,$$

so hat man

$$\varphi = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \cdots + y_n^2.$$

Wenn α_i reell ist, so ist y_i^2 positiv. Ist α_i imaginär, so sei α_j die konjugierte Wurzel. Alsdann sind auch y_i und y_j konjugiert und daher in der Form $p \pm q\sqrt{-1}$ mit reellen p, q ausdrückbar. Daraus folgt

$$y_i^2 + y_j^2 = (p + q\sqrt{-1})^2 + (p - q\sqrt{-1})^2 = 2(p^2 - q^2).$$

Wir sehen auf diese Weise, daß jedes Paar konjugiert imaginärer Wurzeln in den kanonischen Ausdrücken zu zwei reellen Quadraten, einem positiven und einem negativen, Veranlassung gibt, während jede reelle Wurzel ein positives Quadrat liefert. Es ist also richtig, daß jedes negative Quadrat die Existenz eines Paares imaginärer Wurzeln anzeigt[1]).

512. Bemerkungen. a) Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Realität aller Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit reellen Koeffizienten sind

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} > 0, \quad \ldots, \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n-1} & s_n & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix} > 0.$$

Diese Ungleichungen in den s lassen sich immer mit Hilfe der Theorie der symmetrischen Funktionen in solche in den c übersetzen.

b) Die Bedingung $\varDelta > 0$ ist notwendig für die Realität aller Wurzeln. Wenn sie aber erfüllt ist, so kann man nur behaupten, daß, wenn die Gleichung imaginäre Wurzeln hat, diese eine gerade Anzahl von Paaren bilden. Wenn $\varDelta < 0$ ist, so besitzt die Gleichung eine ungerade Zahl von Paaren imaginärer Wurzeln. Dies kann man auch direkt aus dem Ausdruck

$$\varDelta = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_1 - \alpha_3)^2 (\alpha_2 - \alpha_3)^2 \ldots (\alpha_{n-1} - \alpha_n)^2$$

folgern, der uns sofort zeigt, daß $\varDelta$ immer positiv ist, wenn die α alle reell sind. Ferner bringt jedes Paar α_i, α_j von konjugiert imaginären Wurzeln in $\varDelta$ den negativen Faktor $(\alpha_i - \alpha_j)^2$ hinein, während alle andern Faktoren wie $\alpha_i - \alpha_r$ und $\alpha_j - \alpha_s$ (α_r und α_s als konjugiert gedacht) sich derart paaren, daß sie positive Produkte liefern.

513. Beispiele. a) Bei der vollständigen Gleichung dritten Grades

$$a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 + 3 a_2 x + a_3 = 0$$

erhält man als notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß die drei Wurzeln reell und verschieden sind,

$$a_1{}^2 - a_0 a_2 > 0, \quad \varDelta > 0,$$

wo $\varDelta$ die bekannte Diskriminante (§ 87)

$$\varDelta = 4\,(a_1{}^2 - a_0 a_2)\,(a_2{}^2 - a_1 a_3) - (a_1 a_2 - a_0 a_3)^2$$

---

1) Analoge Betrachtungen gestatten ein allgemeineres Theorem aufzustellen, welches wir Brioschi verdanken. Siehe die „Determinanti" von Trudi, p. 250. Siehe auch in den „Philosophical Transactions" von 1853 eine Abhandlung von Sylvester über die Verallgemeinerung des Sturmschen Theorems und eine von Brioschi in den „Nouvelles Annales de Math.", 1856, p. 275.

ist. Hier muß die Bedingung $\varDelta > 0$ genügen, da es unmöglich ist, daß die Gleichung vier imaginäre Wurzeln hat. Also muß die Bedingung $a_1^2 - a_0 a_2 > 0$ in $\varDelta > 0$ enthalten sein (vgl. § 508, b), und man bestätigt, daß dies tatsächlich der Fall ist, wenn man die Identität beachtet

$$a_0^2 \varDelta = 4\,(a_1^2 - a_0 a_2)^3 - (2\,a_1^3 - 3\,a_0 a_1 a_2 + a_0^2 a_3)^2.$$

b) Dagegen reicht bei der Gleichung vierten Grades

$$a_0 x^4 + 4\,a_1 x^3 + 6\,a_2 x^2 + 4\,a_3 x + a_4 = 0$$

die Bedingung $\varDelta > 0$ nicht aus um zu entscheiden, ob die Wurzeln alle reell oder alle imaginär sind. Aus dem Vorzeichen von $\varDelta$ kann man mit Sicherheit nur schließen, daß, wenn $\varDelta < 0$ ist, die Gleichung zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln hat. Wenn $\varDelta > 0$ ist, so muß man auf die andern Sturmschen Funktionen zurückgehen, deren erste Koeffizienten sich nur um positive Faktoren von

$$a_1^2 - a_0 a_2\,, \qquad (a_1^2 - a_0 a_2)\,I + \tfrac{3}{2}\,a_0 J$$

unterscheiden[1]), wo (§ 87)

$$I = a_0 a_4 - 4\,a_1 a_3 + 3\,a_2^2, \quad J = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

ist. Damit nun, wenn schon $\varDelta > 0$ ist, die Wurzeln alle reell und verschieden seien, ist notwendig und hinreichend, daß diese beiden Größen positiv sind. Wenn dies nicht der Fall ist, so sind die vier Wurzeln imaginär.

c) Auch bei der Gleichung fünften Grades kann man behaupten, daß, wenn die Diskriminante negativ ist, die Gleichung sicher zwei imaginäre und drei reelle Wurzeln hat. Ist die Diskriminante positiv, so hat die Gleichung, wenn ihre Wurzeln nicht alle reell sind, nur eine reelle Wurzel, und zwischen diesen beiden Möglichkeiten entscheidet man durch Untersuchung der Vorzeichen von drei gewissen Funktionen der Koeffizienten[2]).

Auflösung der Gleichungen.

Numerische Auflösung.

514. Wir gehen jetzt über zur numerischen Auflösung der algebraischen Gleichungen, d. h. zur Aufsuchung derjenigen Zahlen, die an Stelle der Veränderlichen gesetzt ein Polynom mit gegebenen numerischen Koeffizienten zum Verschwinden bringen. Wir können uns darauf beschränken Gleichungen von der Form

---

1) Cayley „Quarterly Journal", t. IV, p. 10. Siehe auch eine Note von Halphen in den „Nouvelles Annales de Math.", 1885, pp. 34, 35.

2) Roberts „Quarterly Journal", t. IV, p. 175.

$$(1) \qquad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

mit ganzzahligen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ und $a_0 > 0$ zu betrachten, indem wir bemerken, daß sich auf diese Form jede algebraische Gleichung mit algebraischen Koeffizienten reduzieren läßt, d. h. mit nicht transcendenten Koeffizienten, die also Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten sind. In der Tat, wenn ein Koeffizient a oder mehrere einer oder mehr algebraischen Gleichungen mit rationalen Koeffizienten genügen, so kann man aus diesen und der gegebenen Gleichung die genannten Koeffizienten a eliminieren (vgl. § 444) und die Rechnungen so einrichten, daß man eine Gleichung (höheren Grades) mit rationalen Koeffizienten erhält. Diese Koeffizienten lassen sich immer ganzzahlig machen, indem man sie alle mit einer und derselben passend gewählten ganzen Zahl multipliziert. Ist dies geschehen, so pflegt man in erster Linie zur Bestimmung der ganzzahligen Wurzeln zu schreiten, dann zu der der gebrochenen Wurzeln, ferner zur Vereinfachung der vielfachen Wurzeln und endlich zur näherungsweisen Berechnung der irrationalen Wurzeln. Was die imaginären Wurzeln betrifft, so erinnern wir daran (§ 493), daß ihre Bestimmung immer zurückführbar ist auf die der reellen Wurzeln von Gleichungen mit reellen Koeffizienten.

515. Einschränkung der Wurzeln. Vor allen Dingen ist die Einschränkung der Wurzeln notwendig, d. h. die Bestimmung eines Intervalles, außerhalb dessen keine reellen Wurzeln der vorgelegten Gleichung existieren. Die Grenzen eines solches Intervalles heißen untere Schranke und obere Schranke der Wurzeln. Die Frage reduziert sich sofort darauf, nur eine obere Schranke zu suchen; denn wenn $f(x)$ die linke Seite von (1) ist, so erhält man eine untere Schranke ihrer Wurzeln, indem man eine obere Schranke der Wurzeln von $f(-x)$ mit umgekehrtem Vorzeichen nimmt. Ebenso kann man eine untere Schranke nur für die positiven Wurzeln von $f(x)$ bestimmen, indem man den reziproken Wert einer oberen Schranke der Wurzeln von $f\left(\frac{1}{x}\right)$ nimmt, u. s. w. Für die Bestimmung einer oberen Schranke l kennt man viele Regeln:

a) **Regel von Newton.** Wenn eine Zahl l die Funktionen f, f', f'', ... positiv macht, so ist sie eine obere Schranke für die Wurzeln von f. In der Tat hat man für beliebiges $x > l$

$$f(x) = f(l) + (x-l) f'(l) + \tfrac{1}{2}(x-l)^2 f''(l) + \cdots > 0.$$

Übrigens kann man diesen Satz als eine unmittelbare Folgerung des Budanschen Theorems (§ 502) betrachten. Um ihn praktisch anzuwenden, beginnt man mit der Bestimmung der kleinsten ganzen Zahl, die von der Wurzel von $f^{(n-1)}$ nicht übertroffen wird. Dieser Wert wird an Stelle von x in $f^{(n-2)}$ eingesetzt, und wenn man ein negatives Resultat erhält, so fügt man zu dem genannten Wert successiv so viele Einheiten hinzu, als nötig sind, damit der entsprechende Wert von $f^{(n-2)}$ positiv wird. Der neue Wert von x wird dann in $f^{(n-3)}$ eingesetzt u. s. w., und man fährt in dieser Weise so lange fort, bis man eine Zahl findet, die f selbst positiv macht. Eine solche Zahl ist die gesuchte Schranke l.

b) **Regel von Laguerre.** Dasselbe Verfahren läßt sich einschlagen, wenn man an Stelle von $f, f', f'', \ldots$ die Reihe $f, f_1, f_2, \ldots$ der Ruffinischen Funktionen nimmt. Dies ergibt sich sofort aus dem Theorem von Laguerre (§ 501).

c) Man kennt noch andere Regeln, die hinsichtlich des Resultates, welches sie liefern, weniger befriedigend sind, sich aber rascher und leichter anwenden lassen. Es sei a_r der größte Koeffizient unter denen, die dem ersten negativen Koeffizienten a_s vorangehen, und a_t der dem absoluten Betrage nach größte unter den negativen Koeffizienten. Die Regeln von Mac-Laurin, Lagrange und Tillot drücken sich in folgenden Formeln aus:

$$l = 1 - \frac{a_t}{a_0}, \quad l = 1 + \sqrt[s]{-\frac{a_t}{a_0}}, \quad l = 1 + \sqrt[s-r]{-\frac{a_t}{a_r}}.$$

Eine andere Regel von Lagrange besteht in dem Summieren der beiden größten unter den Zahlen

$$\sqrt[s]{-\frac{a_s}{a_0}}, \quad \sqrt[t]{-\frac{a_t}{a_0}}$$

und den andern analogen, die sich auf alle negativen Koeffizienten beziehen.

d) Oft zerlegt man anstatt diese Regeln anzuwenden f in passend gewählte Teile und sucht durch direktes Probieren die oberen Schranken $l', l'', \ldots$ der verschiedenen Teile zu finden, worauf man für l die größte dieser Zahlen wählt. Aber von allen Regeln ist die befriedigendste die von Newton, sei es weil sie niemals zu einem größeren Resultate führt, als es eine der anderen Regeln liefert, sei es weil sie die nächstgrößere ganze Zahl zu der größten Wurzel liefert[1]), wenn die Wurzeln alle reell sind. Wenn in dem letzteren Falle die größte Wurzel eine ganze Zahl ist, so lehrt die Anwendung unserer Regel ihren Wert kennen. Dieser Vorzug der Newtonschen Regel ist eine unmittelbare Folge der Erhaltung des Schwerpunktes der Wurzeln (§ 504, g).

---

1) „Nouvelle Correspondance Mathématique", 1880, p. 174.

516. Ganzzahlige Wurzeln. Wenn α eine Wurzel von f ist, so hat man (§ 500, Formel 44)

$$(2) \qquad f(x) = (x - \alpha)(x^{n-1}f_n + x^{n-2}f_{n-1} + \cdots + f_1),$$

wenn einfach mit $f_1, f_2, \ldots$ die Werte der Ruffinischen Funktionen für $x = \alpha$ bezeichnet werden. Bemerken wir, daß diese Werte ganzzahlig sind, wenn es α ist, und erinnern wir uns daran, daß sie sich auseinander durch folgende Relationen ableiten lassen:

$$(3) \quad f_n = a_0, \ f_{n-1} = \alpha f_n + a_1, \ \ldots, \ f_1 = \alpha f_2 + a_{n-1}, \ 0 = \alpha f_1 + a_n.$$

Aus der letzten sieht man, daß α in a_n enthalten ist. Der Quotient ist $-f_1$. Die vorletzte zeigt, daß α in a_{n-1} enthalten ist, wenn dieses um den ersten Quotienten vermehrt wird. Der neue Quotient ist $-f_2$. Fährt man in dieser Weise fort, so findet man schließlich als letzten Quotienten $-f_n = -a_0$. Wenn alle diese Bedingungen erfüllt sind, so ist α sicher eine Wurzel von f, da die Relationen (3), wenn man sie bezüglich mit $\alpha^n, \alpha^{n-1}, \ldots, \alpha, 1$ multipliziert und addiert, gerade $f(\alpha) = 0$ liefern. Also gilt der Satz: *Damit eine ganze Zahl Wurzel einer algebraischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie in dem unabhängigen Glied aufgeht, ferner in dem Koeffizienten von x, vermehrt um den Quotienten der ersten Division, in dem Koeffizienten von x^2, vermehrt um den Quotienten der zweiten Division, ..., in dem Koeffizienten von x^{n-1}, vermehrt um den Quotienten der $(n-1)$-ten Division, und endlich, daß der Quotient der n-ten Division gleich ist dem Koeffizienten des ersten Gliedes mit umgekehrtem Vorzeichen.*

517. Die Aufsuchung der ganzzahligen Wurzeln einer algebraischen Gleichung beruht ganz und gar auf dem vorstehenden Theorem. Man braucht nur alle Teiler von a_n zu nehmen und für jeden von ihnen zu verifizieren, ob die angegebenen Bedingungen erfüllt sind. Um aber nicht zu viele überflüssige Rechnungen zu machen, ist es wichtig Kriterien zu kennen, die es ermöglichen *a priori* einen oder mehrere Teiler auszuschließen, die nicht Wurzeln der Gleichung sein können. Zunächst ist klar, daß man diejenigen Teiler von a_n ausschließen muß, die nicht innerhalb der Schranken der Wurzeln liegen. Ferner zeigt die Identität (2), wenn man darin $x = -1$ oder $x = 1$ setzt, daß $\alpha + 1$ in $f(-1)$ und $\alpha - 1$ in $f(1)$ aufgeht. Dies führt dazu, für die Aufsuchung der ganzzahligen Wurzeln folgendes Verfahren zu wählen: 1. Bestimmung der Schranken für die Wurzeln. 2. Vergewisserung darüber, ob 1 und -1 Wurzeln sind oder nicht, durch Berechnung von $f(1)$ und $f(-1)$, und im ersten Falle Befreiung der Gleichung von den etwa vorhandenen Wurzeln

± 1 mittels Division von $f(x)$ durch $x \mp 1$. 3. Aufschreiben der Divisoren von a_n (die von ± 1 verschieden sind), soweit sie innerhalb der gefundenen Schranken liegen. 4. Addition der Einheit zu allen diesen Divisoren und Streichung aller derjenigen, welche dabei nicht Teiler von $f(-1)$ ergeben; ferner Subtraktion der Einheit von den übrig bleibenden Divisoren und Fortlassung derjenigen, welche dabei nicht Teiler von $f(1)$ ergeben. 5. Anwendung des Fundamentaltheorems auf die zurückbleibenden Divisoren. 6. Nachdem man gefunden hat, daß α eine Wurzel ist, Teilung von $f(x)$ durch $x - \alpha$, ferner des Quotienten nochmals durch $x - \alpha$ u. s. f., um zu erkennen ob α eine einfache Wurzel ist oder eine zweifache u. s. w.

518. Übungsbeispiel. Die ganzzahligen Wurzeln der Gleichung

$$2x^4 + 4x^3 - 59x^2 - 61x + 30 = 0$$

zu finden. Die Newtonsche Regel liefert die Schranken -7 und 6. Die Divisoren von 30, welche zwischen diesen Schranken enthalten sind, sind, wenn wir 1 und -1 ausschließen,

$$-6, \quad -5, \quad -3, \quad -2, \quad 2, \quad 3, \quad 5.$$

Man sieht direkt, daß 1 und -1 nicht Wurzeln sind, da

$$f(1) = -84, \qquad f(-1) = 30$$

ist. Addiert man die Einheit zu den gefundenen Divisoren, so erhält man die Zahlen

$$-5, \quad -4, \quad -2, \quad -1, \quad 3, \quad 4, \quad 6,$$

von denen nur -4 und 4 nicht in 30 aufgehen. Man muß also -5 und 3 ausschließen, und es bleiben die Divisoren

$$-6, \quad -3, \quad -2, \quad 2, \quad 5.$$

Subtrahiert man von diesen die Einheit, so erhält man die Zahlen

$$-7, \quad -4, \quad -3, \quad 1, \quad 4,$$

welche in 84 aufgehen. Wir sehen also, daß die einzigen Zahlen, bei welchen wir mit Nutzen die in dem Fundamentaltheorem angegebenen Rechnungen versuchen können, -6, -3, -2, 2, 5 sind. Die Rechnungen lassen sich in folgender Weise anordnen, wenn man bei jeder Zahl die Operationen abbricht, sobald eine Division sich nicht exakt ausführen läßt:

	(— 61)		(— 59)		(+ 4)		(+ 2)
— 6	— 5	— 66	11	— 48	8	12	— 2
— 3	— 10	— 71					
— 2	— 15	— 76	38	— 21			
2	15	— 46	— 23	— 82	— 41	— 37	
5	6	— 55	— 11	— 70	— 14	— 10	— 2

Also hat die vorgelegte Gleichung nur die ganzzahligen Wurzeln -6 und 5. Man findet ferner leicht durch Division, daß es nur einfache Wurzeln sind:

$$f(x) = (x+6)(x-5)(2x^2+2x-1).$$

519. Gebrochene Wurzeln. Es sei $\frac{p}{q}$ ein irreduzibler Bruch, der der Gleichung (1) genügt, in der $a_0 = 1$ ist. Man muß, wenn man $x = \frac{p}{q}$ setzt und mit q^{n-1} multipliziert, haben

$$\frac{p^n}{q} + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} q + \cdots + a_n q^{n-1} = 0,$$

d. h. es muß der irreduzible Bruch $\frac{p^n}{q}$ gleich einer ganzen Zahl sein. Das ist aber unmöglich. Also haben wir den Satz: *Jede algebraische Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten, in welcher der Koeffizient des Gliedes höchsten Grades gleich der Einheit ist, hat keine gebrochenen Wurzeln.* Dieses Theorem ermöglicht es, die Aufsuchung der gebrochenen Wurzeln auf die ganzzahliger Wurzeln zu reduzieren. In der Tat, wenn die Gleichung nicht die in dem Theorem angegebene Form hat, so kann man ihr diese Form geben, indem man die Wurzeln mit einer passend gewählten Zahl k multipliziert. Die transformierte Gleichung

$$a_0 x^n + k a_1 x^{n-1} + k^2 a_2 x^{n-2} + \cdots + k^n a_n = 0$$

hat, sobald man über k derart verfügt, daß $k a_1, k^2 a_2, \ldots, k^n a_n$ alle durch a_0 teilbar werden, keine rationalen Wurzeln, die nicht ganzzahlig sind. Wenn $\alpha, \beta, \ldots$ diese ganzzahligen Wurzeln sind, so sind die rationalen Wurzeln der gegebenen Gleichung $\frac{\alpha}{k}, \frac{\beta}{k}, \cdots$. Unter diesen letzteren sind auch die ganzzahligen Wurzeln enthalten. Aber in der Praxis ist es zweckmäßig zuerst die Gleichung von den ganzzahligen Wurzeln zu befreien und erst dann zur Aufsuchung der gebrochenen zu schreiten.

520. Übungsbeispiel. *Die rationalen Wurzeln der Gleichung*

$$21x^4 - 41x^3 + 45x^2 - 24x + 4 = 0$$

zu finden. Die Newtonsche Regel liefert 1 als obere Schranke der reellen Wurzeln. Die Gleichung, welche durch Verwandlung von x in $-x$ entsteht, hat lauter positive Koeffizienten. Also sind die reellen Wurzeln der vorgelegten Gleichung alle zwischen 0 und 1 enthalten. Setzt man $y = 21x$, so erhält man

$$y^4 - 41y^3 + 945y^2 - 10584y + 37044 = 0,$$

und wir wissen bereits, daß die Wurzeln dieser Gleichung zwischen 0 und 21 enthalten sind. Zwischen diesen Schranken sind die Divisoren von 37044

2, 3, 4, 6, 7, 9, 12, 14, 18.

Die Zahlen

1, 2, 3, 5, 6, 8, 11, 13, 17

müßten 27365 teilen. Streicht man diejenigen, welche dieser Bedingung nicht genügen, so bleiben die Divisoren 2, 6, 14. Diese genügen auch der andern Bedingung, da 3, 7, 15 in 48615 aufgehen. Dies vorausgeschickt lassen sich die Rechnungen folgendermaßen zu einem Schema zusammenstellen:

	(− 10584)		(+ 945)		(− 41)		(+ 1)
2	18522	7938	3969	4914			
6	6174	− 4410	− 735	210	35	− 6	− 1
14	2646	− 7938	− 567	378	27	− 14	− 1

Die rationalen Wurzeln der gegebenen Gleichung sind $\frac{6}{21}$ und $\frac{14}{21}$, d. h. $\frac{2}{7}$ und $\frac{2}{3}$. Der linken Seite der vorgelegten Gleichung kann man jetzt die Form geben

$$(7x-2)(3x-2)(x^2-x+1).$$

521. Vielfache Wurzeln. Die Methode, welche wir im folgenden Kapitel zur Berechnung der irrationalen Wurzeln entwickeln werden, erfordert, daß dieselben einfach seien. Zu diesem Zweck verfährt man, nachdem die Gleichung von allen rationalen Wurzeln befreit worden ist, so, wie es oben (§ 456) angegeben wurde, und spaltet die Gleichung in andere, deren jede als einfache Wurzeln die einfachen oder die zweifachen oder die dreifachen u. s. f. der betrachteten Gleichung zuläßt. Hierzu bemerke man folgendes:

a) Wenn eine Gleichung mit rationalen Koeffizienten nur eine einzige Wurzel von einer bestimmten Vielfachheit hat, so ist dieselbe rational. In der Tat sind die Operationen, welche zur Bildung der Gleichung $x-\alpha=0$, die sich auf diese Wurzel bezieht, erforderlich sind, nicht derart, daß sie irrationale Koeffizienten hineinbringen. Soll aber $x-\alpha$ rationale Koeffizienten haben, so bedeutet das eben, daß α rational ist.

b) Bei den Gleichungen der fünf ersten Grade hat man nicht Gelegenheit die Methode zur Aufsuchung der vielfachen Wurzeln anzuwenden. Es würde in der Tat nötig sein, daß die Gleichung, die wir uns immer bereits von ihren rationalen Wurzeln befreit denken, mindestens zwei Doppelwurzeln hätte und daher wenigstens vom vierten Grade wäre. Auch wenn sie vom fünften Grade wäre, würde die zurückbleibende einfache Wurzel rational sein, und wir kämen wieder zu dem Fall einer Gleichung vierten Grades mit zwei Doppelwurzeln. Mit andern Worten, wenn eine Gleichung vierten Grades mit rationalen Koeffizienten nicht rationale Wurzeln hat, so kann sie nicht vielfache Wurzeln haben, außer, wenn es möglich ist die linke Seite auf die Form eines Quadrates eines Trinoms zweiten Grades zu bringen. Hierzu gelangt man in jedem besondern Falle leicht, ohne daß es nötig wäre auf die Methode der vielfachen Wurzeln zurückzugreifen. Übrigens sieht man, wenn man die Hessesche Funktion $H = 3f''^2 - 4ff''$ betrachtet, sofort, daß es, damit f ein Quadrat sei, notwendig und hinreichend ist, daß H und f sich nur um einen konstanten Faktor unterscheiden[1]). Ebenso ist es unnötig die genannte Methode anzuwenden, wenn eine Gleichung fünften Grades mit rationalen Koeffizienten nicht rationale Wurzeln hat, da man a priori behaupten kann, daß die Wurzeln alle einfach sind.

Näherungsweise Berechnung der Wurzeln.

522. In dem vorigen Kapitel haben wir gesehen, daß eine algebraische Gleichung sich so reduzieren läßt, daß sie nur noch einfache und irrationale Wurzeln hat. Und mit der Aufsuchung solcher Wurzeln müssen wir uns jetzt beschäftigen. Eine wichtige Näherungsmethode, die von Newton erdacht und von Fourier vervollkommnet worden ist, ermöglicht es die Berechnung der irrationalen Wurzeln der algebraischen Funktionen rasch auszuführen und auch die der Wurzeln jeder transcendenten Funktion, die eine zweite Derivierte besitzt. Diese Methode setzt nur voraus, es sei bereits die Trennung der Wurzeln vollzogen derart, daß die unbekannte Wurzel α z. B. schon isoliert in dem Intervalle (a, b) liegt. Es ist allerdings, wenn ein solches Intervall gefunden ist, theoretisch sehr leicht sich der Wurzel beliebig zu nähern. In der Tat, man erinnere sich (§ 494, c), daß $f(a)$ und $f(b)$ entgegengesetzte Zeichen haben, wähle eine Zahl c beliebig im Innern von (a, b), z. B. $c = \frac{1}{2}(a + b)$, und berechne $f(c)$. Wenn es passiert, daß $f(c) = 0$ ist, so bedeutet dies, daß $\alpha = c$ ist. Andernfalls wird $f(c)$ ein Zeichen haben, das von $f(a)$ z. B. In diesem Falle kann man das Intervall (a, b) durch (c, b) ersetzen und in dem Falle, wo $f(c)$ das Zeichen von $f(b)$ hat, kann man (a, c) als neues Intervall nehmen. Die Wurzel ist dann in ein Intervall eingeschlossen, welches die Hälfte des ursprünglichen ist, und in analoger Weise fortfahrend gelangt man dazu, sie mit beliebig vorgeschriebener Genauigkeit zu berechnen. Aber dieses theoretisch so einfache Verfahren wird bei den Anwendungen zu mühsam haupt-

---

1) Vgl. Halphen, a. a. O. p. 26 und Clebsch „Vorlesungen über Geometrie“ (Bd. 1, S. 300).

sächlich deshalb, weil es Resultate liefert, die nicht rasch genug gegen die gewünschte Wurzel konvergieren. Immerhin wird es benutzt, um das ursprüngliche Intervall zu verengern, bevor man überhaupt eine Näherungsmethode anwendet, und zur Erleichterung der numerischen Rechnung pflegt man das Intervall nicht in zwei, sondern in zehn gleiche Teile zu teilen.

523. Methode von Newton und Fourier. Nehmen wir an, die Wurzel α liege isoliert in einem Intervalle (a, b), und denken wir uns dieses Intervall bereits hinreichend verengert, damit f'' ein bestimmtes Zeichen in ihm bewahrt. Wenn dieses nicht das Zeichen von $f(a)$ ist, so ist es das von $f(b)$. Von jetzt an wollen wir unter a nicht die untere Grenze des Intervalles verstehen, sondern diejenige Grenze, es sei die untere oder obere, an welcher f das Zeichen von f'' hat. Dies vorausgeschickt hat man

$$f(\alpha) = f(a) + (\alpha - a) f'(a) + \tfrac{1}{2} (\alpha - a)^2 f''(\xi)$$

für einen passenden Wert ξ, der zwischen a und α gewählt ist. Da $f(\alpha) = 0$ ist, so gibt die letzte Gleichung

$$\alpha = a - \frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{(\alpha - a)^2}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(a)}.$$

Nimmt man also als ersten Näherungswert der Wurzel die Zahl

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)},$$

so hat man

$$a_1 - \alpha = \frac{(\alpha - a)^2}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(a)},$$

mithin

$$\frac{a_1 - \alpha}{a - a_1} = \frac{(\alpha - a)^2}{2} \frac{f''(\xi)}{f(a)}.$$

Da nach Voraussetzung $f(a)$ das Zeichen von $f''(\xi)$ hat, so sieht man, daß $a_1 - \alpha$ das Vorzeichen von $a - a_1$ hat, daß also a_1 immer zwischen a und α liegt. Inzwischen bemerke man, daß $f(a_1)$ wie $f(a)$ das Zeichen hat, welches f'' in dem ganzen Intervalle bewahrt, da zwischen a und a_1 keine Wurzeln von f fallen. Hat man also eine Zahl a_1 erhalten, die näher an α liegt als a, so kann man eine andere a_2, dann noch eine a_3 herstellen u. s. w. Jede von ihnen wird näher an α liegen als die vorhergehende. Alle diese Zahlen lassen sich der Reihe nach berechnen mit Hilfe der Relation

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}.$$

Es muß noch gezeigt werden, daß sie sich dem Grenzwert α nähern. Zu diesem Zweck bemerke man zunächst, daß die genannten

Zahlen sicherlich einem Grenzwert α' zustreben, da sie immer in demselben Sinne variierend aufeinanderfolgen. Wenn man nun in

$$f(a_n) = (a_n - a_{n+1}) f'(a_n)$$

n unendlich zunehmen läßt, so erhält man $f(\alpha') = 0$, da nach den gemachten Voraussetzungen f stetig und f' in dem betrachteten Intervalle endlich ist. Daraus folgt $\alpha' = \alpha$, da α die einzige Wurzel ist, die f in dem genannten Intervalle besitzt. Um endlich die praktische Nützlichkeit der Newtonschen Methode ins rechte Licht zu rücken, muß noch das rasche Konvergieren von a_n nach α konstatiert werden. Zu dem Ende werden wir zeigen, daß die Zahlen

$$f(a_1), \quad f(a_2), \quad f(a_3), \quad \ldots$$

nicht nur nach Null konvergieren, sondern von solcher Beschaffenheit sind, daß das Verhältnis einer jeden von ihnen zu der vorhergehenden den Grenzwert Null hat. In der Tat hat man für einen passenden Wert ξ_n, der zwischen a_n und a_{n+1} liegt und daher nach α konvergiert,

$$f(a_n) - f(a_{n+1}) = (a_n - a_{n+1}) f'(\xi_n),$$

mithin

$$1 - \frac{f(a_{n+1})}{f(a_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{f'(a_n)}$$

und endlich

$$\lim_{n=\infty} \frac{f(a_{n+1})}{f(a_n)} = 0,$$

da $f'(\xi_n)$ und $f'(a_n)$ sich dem gemeinsamen Grenzwert $f'(\alpha) \neq 0$ nähern. Man kann mit andern Worten sagen, daß die Newtonsche Methode den Wert der unbekannten Wurzel als Summe der folgenden Reihe liefert:

$$\alpha = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots.$$

Diese Reihe konvergiert sehr rasch (§ 200, b). In der Tat ist das Verhältnis eines Gliedes zu dem vorhergehenden

$$\frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n} = \frac{f(a_{n+1})}{f(a_n)} \cdot \frac{f'(a_n)}{f'(a_{n+1})}$$

und hat den Grenzwert Null, da der erste Faktor nach Null konvergiert und der zweite nach der Einheit[1]).

---

1) Über die Methode von Newton und Fourier siehe auch eine Note von Darboux (1869) in den „Nouv. Annales de Math." und eine von Fouret (1890). Wegen anderer Methoden siehe Petersen: „Theorie der algebraischen Gleichungen" (3. Abschnitt); Serret: „Höhere Algebra", deutsch von Wertheim (Bd. I), Weber: „Lehrbuch der Algebra" (Bd. I) und eine interessante Abhandlung von Laguerre in den „Nouv. Annales de Math." 1880, p. 161. Es gibt auch sehr schöne Methoden zur graphischen Auflösung der Gleichungen. Siehe die Nomographie von d'Ocagne.

524. Eine andere Folge $b_1, b_2, b_3, \ldots$ von Zahlen, die rasch nach der unbekannten Wurzel konvergieren, und zwar in entgegengesetztem Sinne wie die Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$, kann man mit Hilfe der folgenden Relation herstellen:

$$b_{n+1} = \frac{b_n f(a_n) - a_n f(b_n)}{f(a_n) - f(b_n)}.$$

Geht man von b aus, so erhält man eine Zahl b_1, die man unter folgenden Formen schreiben kann:

$$b_1 = a - \frac{f(a)}{f'(c)}, \quad b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(c)},$$

nachdem man gesetzt hat

$$f(a) - f(b) = (a - b) f'(c).$$

Da man hat

$$\frac{b_1 - a}{b_1 - b} = \frac{f(a)}{f(b)} < 0,$$

so sieht man, daß b_1 innerhalb des Intervalles (a, b) liegt. Dies vorausgeschickt betrachte man die Funktion

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - (x - a) f'(c),$$

welche für $x = a$ wie für $x = b$ sich auf Null reduziert, und bemerke, daß $\varphi(b_1) = f(b_1)$ ist. Ihre Derivierte

$$\varphi'(x) = f'(x) - f'(c) = (x - c) f''(\xi)$$

hat das Zeichen von $x - c$ oder das entgegengesetzte Zeichen, je nachdem f'' in (a, b) positiv oder negativ bleibt. Daraus folgt im ersten Falle, daß die Funktion in dem Teil von (a, b), der links von c liegt, abnehmend, während sie rechts zunehmend ist. Sie ist also in dem ganzen Intervall negativ. Das Gegenteil tritt ein, wenn $f'' < 0$ ist. Also bewahren die Funktionen φ und f'' entgegengesetzte Zeichen in dem betrachteten Intervalle. Insbesondere sieht man für $x = b_1$, daß $f(b_1)$ wie $f(b)$ das entgegengesetzte Zeichen zu dem von f'' hat und daher b_1 zwischen b und α fällt. Da ferner $f(a_1)$ und $f(b_1)$ entgegengesetzte Zeichen haben, so lassen sich die vorigen Schlüsse auch auf b_2 anwenden, d. h. b_2 fällt zwischen b_1 und α, u. s. w. Fährt man in dieser Weise fort, so sieht man, daß die Zahlen $b, b_1, b_2, \ldots$ immer näher an die unbekannte Wurzel heranrücken. Es sei β ihr Grenzwert. Aus

$$\{ f(a_n) - f(b_n) \} b_{n+1} = b_n f(a_n) - a_n f(b_n)$$

leitet man für unendlich zunehmendes n ab $(\alpha - \beta) f(\beta) = 0$. Also ist $\beta = \alpha$ oder $f(\beta) = 0$ und daher wieder $\beta = \alpha$. Um endlich die rasche Konvergenz zu konstatieren, schreibe man

$$f(b_n) - f(b_{n+1}) = (b_n - b_{n+1}) f'(\eta_n) = \frac{f(b_n)}{f'(c_n)} f'(\eta_n),$$

wobei η_n und c_n zwei Zahlen bedeuten, die bezüglich den Intervallen (b_n, b_{n+1}) und (a_n, b_n) angehören. Diese Zahlen konvergieren nach α, wenn n unbegrenzt zunimmt, und es ist daher

$$\lim \frac{f(b_{n+1})}{f(b_n)} = \lim \left(1 - \frac{f'(\eta_n)}{f'(c_n)}\right) = 0.$$

525. Bemerkungen. a) Wenn man bei der Anwendung der Newtonschen Methode sich die Mühe nimmt, auch die Folge der Zahlen $b_1, b_2, b_3, \ldots$ zu berechnen, so hat man den Vorteil, in jedem Augenblick eine obere Schranke des Fehlers[1]) zu kennen, den man macht, wenn man bei a_n oder bei b_n aufhört. Sie ist der absolute Betrag von $a_n - b_n$.

b) Die Newtonsche Methode gestattet auch die Wurzeln zu trennen. Die Hauptschwierigkeit, auf welche man stoßen kann, wenn man zu diesem Zwecke, wie es gewöhnlich geschieht (vgl. § 522), eine Reihe successiver Substitutionen von Werten von x macht, besteht in folgendem: Ist ein Intervall gefunden, an dessen Grenzen die Funktion dasselbe Zeichen annimmt, so weiß man (solange man nicht das Sturmsche Theorem anwendet), nicht zu entscheiden, ob in einem solchen Intervall Wurzeln von f vorhanden sind oder keine solche darin vorkommt. Diese Schwierigkeit bietet sich, wenn die Funktion für zwei Werte α und β verschwindet, die sehr nahe aneinander liegen, oder wenn sie nicht verschwindet, aber dem absoluten Betrage nach sehr kleine Werte annimmt. Im ersten Falle muß die Newtonsche Methode, wenn man sie auf beide Grenzen anwendet, zwei Zahlenfolgen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ und $b_1, b_2, b_3, \ldots$ liefern, die bezüglich nach α und nach β konvergieren. Wenn es passiert, daß man für einen bestimmten Wert von n einen Wechsel im Zeichen von $a_n - b_n$ erhält oder daß a_n oder b_n aufhört in einem Sinne zu variieren, um zu beginnen in dem entgegengesetzten Sinne zu variieren, so wird man behaupten können, daß in dem betrachteten Intervalle keine Wurzeln von f existieren.

526. Geometrische Interpretation. Es ist leicht sich von allem, was wir bisher gesagt haben, geometrisch Rechenschaft zu geben. Man stelle die Kurve $y = f(x)$ in cartesischen Koordinaten dar und betrachte den Bogen AB, dessen Endpunkte die Abscissen a und b haben. Auf Grund der zu Anfang gemachten Voraussetzungen ist der genannte Bogen in seinem ganzen Verlauf nach derselben Seite hin konvex, wie es in Figur 24 der Fall ist. Die andern möglichen Figuren ergeben sich aus dieser durch Spiegelung an einer der Achsen oder an beiden. Die äußersten Ordinaten, die Achse Ox und der

1) Wegen der Abschätzung dieses Fehlers siehe auch die „Höhere Algebra" von Serret und den „Calcolo" von Genocchi und Peano (p. 97).

Bogen AB bestimmen zwei krummlinige Dreiecke. Nur eine von den äußersten Tangenten fällt in eins von diesen Dreiecken, und zwar ist es die Tangente an demjenigen Endpunkt des Bogens AB, dessen Ordinate das Zeichen von f'' hat. Wenn man die Newtonsche Methode auf diesen Endpunkt anwendet, so erhält man als Wert von a_1 genau die Abscisse des Schnittpunktes der Tangente[1]) mit der Achse Ox; denn die Gleichung der Tangente ist $y = (x - a) f'(a) + f(a)$ und für $y = 0$ findet man gerade $x = a_1$. Dagegen ist b_1 die Abscisse des Schnittpunktes der Sehne AB mit Ox. Zwischen diesen beiden Punkten trifft der Bogen AB die Achse Ox in einem Punkte, dessen Abscisse die unbekannte Wurzel α ist. Wir sind jetzt, anstatt diesen Punkt auf dem Bogen AB zu suchen, darauf geführt, ihn auf einem kleineren Bogen $A_1 B_1$ zu suchen. Um ferner a_2 und b_2 zu bestimmen, braucht man nur die Schnittpunkte zu konstruieren, welche auf Ox von der Tangente in A_1 und von der Sehne $A_1 B_1$ bestimmt werden, u. s. f. Wenn endlich die äußersten Ordinaten dasselbe Zeichen haben und man will die Trennung der Wurzeln durch Anwendung der Newtonschen Methode auf beide Grenzen des Intervalles herbeiführen, wie wir es am Schlusse des vorigen Paragraphen ausgeführt haben, so kann man sich leicht überzeugen, daß ein Zeichenwechsel bei $a_n - b_n$ mit dem Übergange des Schnittpunktes der äußersten Tangenten von einer Seite der Achse Ox auf die andere gleichbedeutend ist. Alsdann kreuzen sich diese Tangenten schließlich so, daß sie die Kurve hindern die Achse zu schneiden.

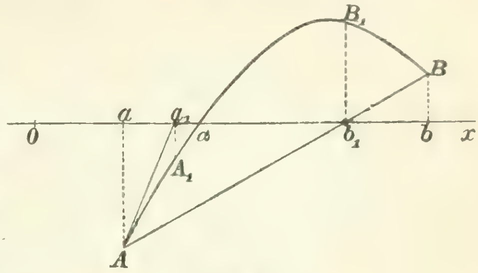

Fig. 24.

527. Übungen. a) Die Gleichung $x^3 - 2x - 5 = 0$ hat nur eine reelle Wurzel. Dieselbe liegt zwischen 2 und 3. In der Tat hat man $f(2) = -1$, $f(3) = 16$. Teilt man das Intervall $(2, 3)$ in zehn gleiche Teile, so findet man $f(2{,}1) = 0{,}061$, und man kann daher die Grenze 3 durch 2,1 ersetzen. Da zwischen diesen Grenzen $f'' = 6x$ das Zeichen $+$ bewahrt, so muß man die Newtonsche Methode in der Weise anwenden, daß man von der oberen Grenze $a = 2{,}1$ ausgeht. Man hat

$$a - a_1 = \frac{f(a)}{f(a_1)} = \frac{0{,}061}{11{,}23} = 0{,}00543 \ldots,$$

1) Umgekehrt führt diese geometrische Betrachtung wieder zu der Formel von Newton, und analoge Betrachtungen gestatten noch bessere Näherungsformeln zu finden. Siehe z. B. die Mélanges Mathématiques (t. 1, p. 79) von Catalan.

mithin $a_1 = 2{,}095$. Fährt man in analoger Weise fort, so erhält man der Reihe nach die Resultate $a_2 = 2{,}094552$, $a_3 = 2{,}09455148154\dot{2}$, $a_4 = 2{,}0945514815423265914823\dot{8}6$. Ginge man bis zu a_5, so würde man einen Wert der Wurzel mit achtundvierzig exakten Decimalen erhalten.

b) Wenn die Gleichung $x^4 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$ gegeben ist, so sagt uns das Theorem von Descartes, daß sie nicht negative Wurzeln hat und nur zwei positive Wurzeln haben kann. Da immer $\frac{1}{6}f'' = 2x^2 + 1 > 0$ ist, so ist die Methode von Newton auf jedes beliebige Intervall anwendbar. Wir können $a = 0$ nehmen, da $f(0) = 1$ das Zeichen von f'' hat. Wenn die beiden positiven Wurzeln tatsächlich vorhanden wären, so müßten wir eine Folge von Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ finden, die sich wachsend der kleinsten Wurzel nähern. Wir erhalten nun aber $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{24}$. Wir können also hier aufhören und behaupten, daß die vorgelegte Gleichung keine reellen Wurzeln hat. Dies hätte man auch aus dem Umstande folgern können, daß das Trinom $3x^2 - 2x + 1$ wie x^4 wesentlich positiv ist.

c) Bei der Gleichung $x^3 - 3x^2 - 7x + 4 = 0$ ergibt sich aus dem Theorem von Descartes als sicher die Existenz einer einzigen negativen Wurzel und als möglich die von zwei positiven Wurzeln. Daß diese wirklich vorhanden sind und eine von ihnen in das Intervall $(0, 1)$ fällt, erkennt man ferner durch die Bemerkung, daß für $x = 0$ und $x = 1$ die linke Seite die Werte 4 und -5 annimmt, welche entgegengesetzte Zeichen haben. Die zweite Derivierte ist in dem genannten Intervalle negativ, da $\frac{1}{6}f'' = x - 1$ ist, und man muß daher $a = 1$ nehmen. Geht man von diesem Wert aus, so führt[1]) die Newtonsche Methode rasch zu dem Wert der gesuchten Wurzel: $0{,}486456474\ldots$ Die beiden andern Wurzeln gehören den Intervallen $(-2, -1)$ und $(4, 5)$ an. Sie haben die Werte $-1{,}875\ldots$ und $4{,}387\ldots$

d) Die reellen Wurzeln der Gleichung $x^5 - 8x - 1 = 0$ zu berechnen. Auch hier ergibt sich aus dem Theorem von Descartes als sicher die Existenz einer einzigen positiven Wurzel. Negative Wurzeln kann es nicht mehr als zwei geben, und sie existieren sicher, da für $x = 0$ und für $x = -1$ die linke Seite entgegengesetzte Zeichen annimmt. Man hat also im ganzen drei reelle Wurzeln. Die Newtonsche Methode liefert die Werte:

$$\alpha_1 = -2{,}7639\ldots, \quad \alpha_2 = -0{,}1250\ldots, \quad \alpha_3 = 2{,}8887\ldots.$$

e) Um die Gleichung $\cos x = x$ aufzulösen, gehe man von der Bemerkung aus, daß x, wenn es dieser Gleichung genügen soll, notwendig dem Intervall $(-1, 1)$ angehören muß (wie $\cos x$). In diesem Intervall wächst die Funktion $f = x - \cos x$ beständig, da in demselben ihre Derivierte $f' = 1 + \sin x$ positiv bleibt. Da man für $x = 0$ hat $f < 0$, für $x = 1$ dagegen $f > 0$ ist, so hat die betrachtete Gleichung nur eine positive Wurzel, die zwischen 0 und 1 liegt. Um sie mit Hilfe der Newtonschen Methode zu berechnen, muß man von dem Wert $a = 1$ aus-

1) J. Bourget, „Nouv. Annales de Math." 1869, p. 21.

gehen, da für $x=1$ die Funktion f das Zeichen $+$ annimmt, d. h. gerade das Zeichen, welches $f''=\cos x$ in dem ganzen betrachteten Intervalle bewahrt. Man erhält als Wert der Wurzel

$$\alpha = 0{,}73908512, \quad \text{d. h.} \quad \alpha = 42^0\,20'\,47'',25,$$

wenn man beachtet, daß der Einheitsbogen in Graden ausgedrückt wird durch $\frac{180}{\pi}$ und daher gleich $57^0\,17'\,44'',806247\ldots$ ist.

f) An die Kettenlinie $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ durch den Anfangspunkt eine Tangente zu ziehen. $y=kx$ sei die Gleichung der Tangente. Es handelt sich darum, k derart zu bestimmen, daß die Gleichung $e^x+e^{-x} = 2kx$ eine Doppelwurzel hat. Diese muß auch der derivierten Gleichung $e^x-e^{-x}=2k$ zukommen. Eliminiert man k, so sieht man, daß die Wurzel notwendig der Gleichung

$$\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = x, \quad \text{d. h.} \quad x=\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}$$

genügt. Es liegt in der Natur unseres Problems, daß es nur zwei Wurzeln gibt, die dem absoluten Betrage nach gleich sind. Übrigens wird die Funktion $f=x-\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}$, die rechts von 1 negativ ist, mit zunehmendem x schließlich positiv und bleibt es. Sie wächst in der Tat beständig, da ihre Derivierte $f'=\frac{x^2}{x^2-1}$ für $|x|>1$ positiv ist. Die Substitution der Werte $x=1,1$ und $x=1,2$ liefert Resultate mit entgegengesetzten Zeichen, und man erkennt, daß die Newtonsche Methode auf die obere Grenze $a=1{,}2$ anwendbar ist. Man findet $\alpha=1{,}199678\ldots$ Ferner erhält man, wenn man die Gleichungen

$$e^\alpha = k(\alpha+1), \quad e^{-\alpha}=k(\alpha-1)$$

miteinander multipliziert, $k=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}=1{,}50888\ldots.$ Wir können nunmehr behaupten, daß die Gleichung $e^x+e^{-x}=2kx$ keine reellen Wurzeln hat oder zwei solche, je nachdem k dem absoluten Betrage nach kleiner oder größer ist als $1{,}50888\ldots.$

g) Sehr interessant ist die Gleichung[1] $\operatorname{tg} x = x$, die in den mathematischen Theorien der Elastizität, des Lichtes und der Wärme vorkommt. Hierbei erweist sich als sehr nützlich die graphische Darstellung, die es sofort ermöglicht, die unendlich vielen Wurzeln der Gleichung zu sehen und trennen. Diese sind die Abscissen der Schnittpunkte der Linien $y=\operatorname{tg} x$ und $y=x$. Die erste Linie (die sogenannte Tangentoide) besteht aus unendlich vielen kongruenten Zweigen, deren jeder von der Geraden $y=x$ nur in einem Punkte getroffen wird. Wir sehen auf diese Weise, wenn wir uns auf die positiven Wurzeln beschränken, daß dieselben eine

1) Siehe Bertrands „Algèbre“ (1870, t. II, p. 284), den „Cours d'Analyse“ von Catalan (p. 297) und die „Leçons d'optique physique“ von Verdet (p. 272).

Reihe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ bilden, deren n-tes Glied zwischen die Zahlen $n\pi$ und $(n+\frac{1}{2})\pi$ fällt, und zwar um so näher an die zweite, je größer n ist. Um die Wurzel α zu berechnen, welche in dem Intervall $(a-\frac{1}{2}\pi, a)$ liegt, wobei

$$a = (n+\tfrac{1}{2})\pi$$

ist, ist es natürlich $\alpha = a - \theta$ zu setzen, wo θ zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegt. Alsdann geht die Gleichung $\operatorname{tg}\alpha = \alpha$ über in $\cot\theta = \alpha$, d. h. $\theta = \operatorname{arctg}\frac{1}{\alpha}$, und es wird daher

$$\alpha = a - \operatorname{arctg}\frac{1}{\alpha}.$$

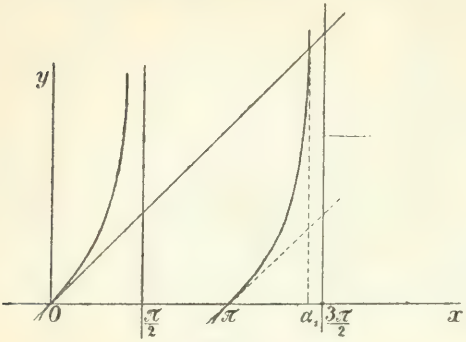

Fig. 25.

Wenn wir auf der rechten Seite für α den Wert $a > \alpha$ setzen und

$$a_1 = a - \operatorname{arctg}\frac{1}{a}$$

nehmen, so erhalten wir einen zu großen Wert, der aber sicher kleiner als a ist und infolgedessen näher an α liegt. Ebenso wird

$$a_2 = a - \operatorname{arctg}\frac{1}{a_1}$$

immer größer als α sein, aber kleiner als a_1 u. s. w. Also nähern sich die nach dem Gesetz

$$a_{n+1} = a - \operatorname{arctg}\frac{1}{a_n}$$

gebildeten Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ beständig der Wurzel α, indem sie größer als dieselbe bleiben. Sie konvergieren also nach einem Grenzwert α'. Wenn man nun in der obigen Relation n unendlich zunehmen läßt, so erhält man

$$\alpha' = a - \operatorname{arctg}\frac{1}{\alpha'},$$

und es ist daher $\alpha' = \alpha$, da in das Intervall $(a-\frac{1}{2}\pi, a)$ nur eine Wurzel der betrachteten Gleichung fällt. Wir könnten uns also unter Vermeidung der Newtonschen Methode der vorhin konstruierten Folge bedienen, um uns der unbekannten Wurzel unbegrenzt zu nähern. Aber die Konvergenz ist zu langsam. In der Tat ist

$$a_{n+1} - a_n = \operatorname{arctg}\frac{1}{a_{n-1}} - \operatorname{arctg}\frac{1}{a_n} = \operatorname{arctg}\frac{a_n - a_{n-1}}{1 + a_n a_{n-1}},$$

mithin für unendliches n

$$\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n - a_{n-1}} = \lim \frac{1}{1 + a_n a_{n-1}} = \frac{1}{1+\alpha^2}.$$

Um die Rechnung zu beschleunigen wird es also nötig sein, die Newtonsche Methode anzuwenden, indem man von irgend einem der bei der obigen

Rechnung erhaltenen Werte ausgeht. Man beachte hierbei, daß man nicht von $a = (n + \frac{1}{2})\pi$ ausgehen darf, da für diesen Wert die Funktion unendlich wird. So muß man z. B., wenn es sich um die Berechnung der kleinsten positiven Wurzel handelt, nicht von $a = \frac{3}{2}\pi$ ausgehen, sondern wenigstens von

$$a = \frac{3}{2}\pi - \operatorname{arctg}\frac{2}{3\pi}.$$

Alsdann erhält man mit Hilfe der Newtonschen Methode

$$a_1 = a - \frac{\operatorname{tg} a - a}{\operatorname{tg}^2 a} = \frac{a}{\sin^2 a} - \frac{1}{\operatorname{tg} a} = \frac{3}{2}\pi - \left(1 + \frac{4}{9\pi^2}\right)\operatorname{arctg}\frac{3}{2\pi}$$

u. s. w. Man gelangt schließlich zu dem Resultat

$$\alpha = 4{,}493409457909\ldots, \text{ d. h. } \alpha = 257^0\, 27'\, 12'',231224\ldots.$$

h) Die Gleichung $\operatorname{tg} x = x$ ist auch deshalb bemerkenswert, weil bei ihr eine allgemeine Auflösung möglich ist, d. h. die Bestimmung einer Formel, welche alle ihre Wurzeln ausdrückt. Man kann die Gleichung $\alpha = a - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\alpha}$ in der Tat folgendermaßen schreiben (§ 332, d):

$$\alpha = a - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{3\alpha^3} - \frac{1}{5\alpha^5} + \frac{1}{7\alpha^7} - \cdots.$$

Wenn man auf der rechten Seite a für α setzt und die Potenzen von $\frac{1}{a}$ von der dritten ab vernachlässigt, so erhält man $\alpha = a - \frac{1}{a}$. Setzt man auf der rechten Seite jetzt $a - \frac{1}{a}$ für α und vernachlässigt die Potenzen von $\frac{1}{a}$ von der fünften an aufwärts, so findet man

$$\alpha = a - \frac{1}{a - \frac{1}{a}} + \frac{1}{3\left(a - \frac{1}{a}\right)^3}$$

oder

$$\alpha = a - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^3}\right) + \frac{1}{3a^3} = a - \frac{1}{a} - \frac{2}{3a^3}.$$

Ferner erhält man in analoger Weise

$$\alpha = a - \frac{1}{a - \frac{1}{a} - \frac{2}{3a^3}} + \frac{1}{3\left(a - \frac{1}{a} - \frac{2}{3a^3}\right)^3} - \frac{1}{5\left(a - \frac{1}{a} - \frac{2}{3a^3}\right)^5}$$

oder

$$\alpha = a - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^3} + \frac{5}{3a^5}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^3} + \frac{3}{a^5}\right) - \frac{1}{5a^5}, \text{ u. s. w.}$$

Fährt man so fort, so erkennt man, daß die Wurzel α_n sich folgendermaßen in eine konvergente Reihe entwickeln läßt:

$$\alpha_n = (n + \tfrac{1}{2})\pi - \frac{1}{(n + \frac{1}{2})\pi} - \frac{2}{3(n + \frac{1}{2})^3\pi^3} - \frac{13}{15(n + \frac{1}{2})^5\pi^5}$$
$$- \frac{146}{105(n + \frac{1}{2})^7\pi^7} - \frac{781}{315(n + \frac{1}{2})^9\pi^9} - \cdots.$$

Wenn z. B. n sehr groß ist (wie man es beim Studium der Diffraktion des Lichtes anzunehmen veranlaßt wird), so kann man mit genügender Annäherung schreiben

$$\alpha_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi - \frac{1}{n\pi}.$$

i) Auch bei der Auflösung der Gleichung $\sin x = kx$ ist es nützlich, sich einer geometrischen Darstellung zu bedienen und die Wurzeln als die Abscissen der gemeinsamen Punkte der Sinuskurve $y = \sin x$ und der Geraden $y = kx$ zu betrachten. Sieht man von $x = 0$ ab, so erkennt man, daß für $k \geqq 1$ keine weiteren Wurzeln existieren. Setzen wir also voraus $k < 1$ und denken wir uns sogar, k nehme in stetiger Weise von 1 ausgehend ab. Alsdann dreht sich die Gerade $y = kx$ um den Anfangspunkt im Sinne des Uhrzeigers, und es tritt unendlich viele Male der Fall ein, daß sie eine Tangente der Sinuskurve wird. Dies passiert für diejenigen Werte von k, für welche die vorgelegte Gleichung eine gemeinsame Wurzel mit der derivierten Gleichung $\cos x = k$ hat. Die Elimination von k aus den beiden Gleichungen liefert $\operatorname{tg} x = x$. Es seien α_1, α_2, $\alpha_3, \ldots$ die positiven Wurzeln dieser Gleichung und $k_n = \cos \alpha_n$. Die Neigungskoeffizienten der durch den Anfangspunkt an die Sinuskurve gelegten Tangenten sind in abnehmender Reihe geordnet 1, k_2, k_4, $k_6, \ldots$, k_5, k_3, k_1. Wenn k kleiner als k_1 wird, so hört die Gerade auf die Kurve

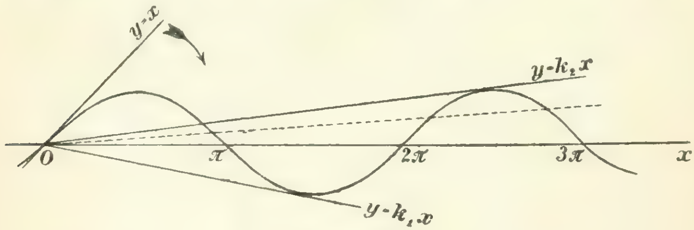

Fig. 26.

außerhalb des Anfangspunktes zu schneiden. Also hat die Gleichung $\sin x = kx$ reelle von Null verschiedene Wurzeln nur für diejenigen Werte von k, welche kleiner als 1, aber nicht kleiner als $-\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$ sind, wobei $\alpha = 4{,}49\ldots$ die kleinste positive Wurzel der Gleichung $\operatorname{tg} x = x$ ist. Wenn z. B. k positiv ist und zwischen zwei bestimmte Zahlen k_{2n-2} und k_{2n} fällt, so wird die Zahl der positiven Wurzeln $2n - 1$ sein, d. h. die Gleichung wird im ganzen $4n - 1$ reelle Wurzeln haben. Wenn k sehr klein ist, so liegt die Anzahl der reellen Wurzeln sehr nahe an $\frac{2}{\pi k}$. Endlich bemerke man, daß die kleinste positive Wurzel dem Intervall $(0, \pi)$ oder (π, α_1) angehört, je nachdem k positiv oder negativ ist. Da nun die Funktion $f = \sin x - kx$ für $x = \pi$ den Wert $-k\pi$ hat, dessen Vorzeichen dasjenige ist, welches $f'' = -\sin x$ in dem einen oder dem andern der genannten Intervalle bewahrt, so kann man die Newtonsche Methode anwenden, indem man immer von $a = \pi$ ausgeht. Man erhält dann $a_1 = \frac{\pi}{1+k}$ u. s. w.

Algebraische Auflösung.

528. Kubische Gleichung. Wir wollen uns jetzt mit der algebraischen Auflösung der Gleichungen beschäftigen, d. h. wir wollen die Bestimmung der Wurzeln als expliciter algebraischer Funktionen der Koeffizienten versuchen, die wir als beliebig voraussetzen. Dies ist für die Gleichungen ersten und zweiten Grades bereits in der elementaren Algebra geschehen. Es werde jetzt die folgende Gleichung betrachtet:

$$x^3 + px + q = 0. \tag{4}$$

Setzt man $x = u + v$, so wird sie

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0$$

und ist erfüllt, wenn man gleichzeitig nimmt

$$u^3 + v^3 + q = 0, \quad 3uv + p = 0,$$

d. h. $u^3 + v^3 = -q$, $u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}$. Man sieht, daß u^3 und v^3 die Wurzeln der folgenden quadratischen Gleichung sind, der sogenannten Resolvente der gegebenen Gleichung,

$$y^2 + qy - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Es ist daher

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Also hat jede von den Unbekannten u und v drei Werte, sodaß man im ganzen neun Werte für $u + v$ finden würde, wenn man nicht beachtete, daß nur diejenigen Werte von u und v gepaart werden dürfen, deren Produkt $-\frac{1}{3}p$ ist. Es sei a, b ein Paar solcher Werte. Die gesuchten Wurzeln sind dann

$$\alpha_1 = a + b, \quad \alpha_2 = \omega a + \omega^2 b, \quad \alpha_3 = \omega^2 a + \omega b,$$

wo ω eine imaginäre dritte Einheitswurzel (§ 394) darstellt. Man pflegt dies in folgende Formel zusammenzufassen, die sogenannte Formel von Tartaglia:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \tag{5}$$

In Wirklichkeit liefert diese Formel neun Werte, die der Gleichung (4) genügen, wenn man darin p als eine beliebige kubische Wurzel von p^3 betrachtet. Faktisch gibt also die Formel von Tartaglia die neun Wurzeln der Funktion

$$(x^3 + px + q)(x^3 + \omega px + q)(x^3 + \omega^2 px + q) = (x^3 + q)^3 + p^3 x^3.$$

529. Die Formel von Tartaglia hat den (auf algebraischem Wege nicht zu beseitigenden) Nachteil, daß sie die Wurzeln in imaginärer Form darbietet gerade im Falle ihrer Realität, wenn also (§ 508, b) $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ ist. Ein anderer Nachteil ist der, daß sie die Werte rationaler Wurzeln in irrationaler Form gibt. So hat z. B. die Gleichung $x^3 - x - 6 = 0$ die einzige reelle Wurzel 2, während man aus (5) einen komplizierten Wert gewinnt, der durch Logarithmen zu berechnen ist, sodaß man praktisch zu einem Resultat kommt, welches sich von 2 so wenig unterscheidet als man will, welches aber nicht direkt 2 ist. Man hat bemerkt[1]), daß dies, wenn man nur mit rationalen Zahlen operiert, allgemein eintritt außer, wenn die Gleichung die Form

$$x^3 - (\alpha + 2\beta)x^2 + (2\alpha\beta + \beta^2 + 3\gamma^2)x - \alpha(\beta^2 + 3\gamma^2) = 0$$

mit rationalen α, β, γ hat. Nur in diesem Falle kann die rationale Wurzel α (nachdem man in der weiter unten anzugebenden Weise die Gleichung auf die Form (4) gebracht hat) mit Hilfe der Formel von Tartaglia genau gefunden werden. Die beiden andern Wurzeln, die imaginär sind, bringen $(x - \beta)^2 + 3\gamma^2$ zum Verschwinden.

530. Der letztgenannte Nachteil kommt in der Praxis nicht zur Geltung, wenn man immer zunächst die Gleichung von den rationalen Wurzeln befreit (§ 519). Gegen den ersten hilft man sich dadurch, daß man den Ausdruck (5) auf trigonometrische Form bringt. Für

$$-\frac{q}{2} = \varrho \cos\theta, \quad \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -\varrho^2 \sin^2\theta$$

wird die Formel von Tartaglia

$$x = \sqrt[3]{\varrho(\cos\theta + i\sin\theta)} + \sqrt[3]{\varrho(\cos\theta - i\sin\theta)}.$$

Bekanntlich sind (§ 393) die Werte der beiden Radikale bezüglich

$$\varrho^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{3}\right), \quad \varrho^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{3} - i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{3}\right),$$

wo k die Werte 0, 1, 2 annimmt. Man muß ferner diese Werte in der Weise paaren, daß ihr Produkt reell ist, und zu diesem Zweck hat man k in beiden Ausdrücken gleiche Werte beizulegen. Daraus folgt

$$x = 2\varrho^{\frac{1}{3}} \cos\frac{\theta + 2k\pi}{3},$$

sodaß die Wurzeln folgende sind:

$$\alpha_1 = 2\varrho^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta}{3}, \quad \alpha_2 = 2\varrho^{\frac{1}{3}}\cos\left(\frac{\theta}{3} + 120^0\right), \quad \alpha_3 = 2\varrho^{\frac{1}{3}}\cos\left(\frac{\theta}{3} + 240^0\right).$$

1) E. Kummer (Mathesis, 1881, pp. 96, 184).

Diese Werte werden bekannt sein, sobald man die positive Zahl ϱ und den Bogen θ kennt. Da nach der Annahme

$$\varrho = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}, \quad \cos\theta = -\frac{q}{2\varrho}$$

ist, so lassen sich ϱ und θ leicht durch Logarithmen berechnen.

531. Die allgemeine kubische Gleichung

$$x^3 - c_1 x^2 + c_2 x - c_3 = 0 \tag{6}$$

läßt sich immer auf die Form (4) reduzieren. Man braucht nur als neue Unbekannte

$$\xi = x - \tfrac{1}{3} c_1$$

zu wählen. Dann verwandelt sich die gegebene Gleichung in folgende

$$\xi^3 - \tfrac{1}{3}(c_1{}^2 - 3c_2)\xi - \tfrac{1}{27}(2c_1{}^3 - 9c_1c_2 + 27c_3) = 0,$$

welche die Form (4) hat. Im vorliegenden Falle ist

$$p = -\tfrac{1}{3}(c_1{}^2 - 3c_2), \quad q = -\tfrac{1}{27}(2c_1{}^3 - 9c_1c_2 + 27c_3),$$

mithin (§ 492, a)

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -\frac{\varDelta}{4 \cdot 27},$$

wo wie bisher

$$\varDelta = -27c_3{}^2 + 18c_1c_2c_3 - 4c_1{}^3c_3 - 4c_2{}^3 + c_1{}^2c_2{}^2$$

ist. Die Radikale der Formel von Tartaglia werden

$$\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\left(2c_1{}^3 - 9c_1c_2 + 27c_3 \pm 3\sqrt{-3\varDelta}\right)}.$$

Also sind die Wurzeln der Gleichung (6) gegeben durch die Formel

$$x = \tfrac{1}{3}\Big(c_1 + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\left(2c_1{}^3 - 9c_1c_2 + 27c_3 + 3\sqrt{-3\varDelta}\right)}$$
$$+ \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\left(2c_1{}^3 - 9c_1c_2 + 27c_3 - 3\sqrt{-3\varDelta}\right)}\Big).$$

532. Gleichung vierten Grades. Es werde jetzt die Gleichung

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \tag{7}$$

betrachtet, und man versuche sie zu befriedigen, indem man setzt $x = u + v + w$. Erhebt man dieses ins Quadrat, so erhält man

$$x^2 - (u^2 + v^2 + w^2) = 2(vw + wu + uv),$$

ferner durch nochmaliges Quadrieren

$$x^4 - 2(u^2 + v^2 + w^2)x^2 + (u^2 + v^2 + w^2)^2$$
$$= 4(v^2w^2 + w^2u^2 + u^2v^2) + 8uvwx.$$

Identifiziert man mit der vorgelegten Gleichung, so kommt

$$u^2 + v^2 + w^2 = -\frac{p}{2}, \quad v^2w^2 + w^2u^2 + u^2v^2 = \frac{p^2 - 4r}{16}, \quad u^2v^2w^2 = \frac{q^2}{64}.$$

Daraus geht hervor (§ 465), daß u^2, v^2, w^2 Wurzeln der kubischen Gleichung

$$y^3 + \frac{p}{2} y^2 + \frac{p^2 - 4r}{16} y - \frac{q^2}{64} = 0$$

sind. Dies ist die Resolvente der gegebenen Gleichung. Sind die Wurzeln der Resolvente gefunden, so hat man zwei Werte für jede der Unbekannten u, v, w. Man muß aber nur diejenigen Werte von u, v, w zu einer Summe vereinigen, deren Produkt $-\frac{1}{8} q$ ist. Es seien a, b, c drei solche Werte. Die gesuchten Wurzeln sind dann

$$\alpha_1 = a + b + c, \quad \alpha_2 = a - b - c, \quad \alpha_3 = -a + b - c, \quad \alpha_4 = -a - b + c.$$

Man bemerke, daß auf die Form (7) die allgemeine Gleichung vierten Grades

$$x^4 - c_1 x^3 + c_2 x^2 - c_3 x + c_4 = 0$$

immer reduzierbar ist. Man braucht nur als neue Unbekannte

$$\xi = x - \tfrac{1}{4} c_1$$

einzuführen. Dadurch verwandelt sich die gegebene Gleichung in

$$\xi^4 - \tfrac{1}{8}(3c_1{}^2 - 8c_2)\xi^2 + \tfrac{1}{2}(c_1 c_2 - 2c_3)\xi + \tfrac{1}{16}(c_1{}^2 c_2 - 4c_1 c_3 + 16 c_4) = 0.$$

Diese ist vom Typus (7). Löst man sie auf und vermehrt ihre Wurzeln um $\frac{1}{4} c_1$, so erhält man die Wurzeln der vorgelegten Gleichung.

533. Die in den §§ 528, 532 befolgten Methoden zur Auflösung der Gleichungen dritten und vierten Grades rühren bezüglich von Hudde und von Euler her. Andere sind von verschiedenen Autoren[1]) angegeben worden. Wir wollen uns aber hier darauf beschränken, nur zwei davon auseinanderzusetzen, die den Vorzug haben, nach allgemeinen Prinzipien gebildet zu sein und daher durchblicken zu lassen, welchen Weg man einschlagen muß, um die Auflösung der Gleichungen höheren Grades zu versuchen. Die eine, die **Methode von Cayley**, stützt sich auf die Formentheorie und besteht darin, daß man sich der Relationen bedient, die zwischen der Funktion f und den zugehörigen H, Q u. s. w. bestehen, um f auf kanonische Form zu bringen und sie dann in Linearfaktoren zu zerlegen[2]). Die andere, die **Methode von Lagrange**, stützt sich auf die Theorie der symmetrischen Funktionen und hat den Vorzug, den innern Grund in Evidenz zu setzen für die Unmöglichkeit, die allgemeinen Gleichungen höheren als vierten Grades durch Radikale aufzulösen.

---

1) Siehe z. B. die Theorie der algebraischen Gleichungen von Petersen (S. 87 ff.). Es ist zu empfehlen, über diesen Gegenstand nachzulesen die „Studien", welche Tortolini in den Annali di Matematica (1858, p. 310) veröffentlicht hat.

2) Halphen, „Nouv. Annales de Math." (1885, p. 17); Clebsch: „Vorlesungen über Geometrie" (Bd. I, S. 278 und 307).

534. Methode von Cayley. a) Bei der **quadratischen Gleichung**

$$x^2 - c_1 x + c_2 = 0$$

läßt sich die Zerlegung der linken Seite f in Linearfaktoren leicht ausführen, wenn man von dem Ausdruck für die Hessesche Funktion (§ 485) ausgeht

$$H = f'^2 - 2ff'',$$

die sich im vorliegenden Falle wegen $f' = 2x - c_1$, $f'' = 2$ auf die Konstante $c_1{}^2 - 4c_2$ reduziert. Man hat sofort

$$2ff'' = f'^2 - H = (f' - \sqrt{H})(f' + \sqrt{H})$$

oder

$$f = (x - \tfrac{1}{2}c_1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{H})(x - \tfrac{1}{2}c_1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{H}).$$

Die Wurzeln sind also durch die Formel

$$x = \tfrac{1}{2}(c_1 \pm \sqrt{c_1{}^2 - 4c_2})$$

gegeben.

b) Bei der **kubischen Gleichung**

$$x^3 - c_1 x^2 + c_2 x - c_3 = 0$$

werden wir zu betrachten haben die Hessesche Funktion $H = 2f'^2 - 3ff''$ und die Jacobische $Q = Hf' - \frac{3}{2}H'f$. Es ist früher (§ 490, c) bewiesen worden, daß

$$H^3 - 2Q^2 = 54f^2\varDelta \tag{8}$$

ist. Dieser Identität läßt sich die Form $Q^2 + 27f^2\varDelta = \frac{1}{2}H^3$ geben oder

$$(\tfrac{1}{2}Q + \tfrac{3}{2}f\sqrt{-3\varDelta})(\tfrac{1}{2}Q - \tfrac{3}{2}f\sqrt{-3\varDelta}) = (\tfrac{1}{2}H)^3.$$

Wir behaupten nun, daß das Problem der Reduktion von f auf kanonische Form nicht wesentlich verschieden ist von dem der Zerlegung von H in Linearfaktoren. Denken wir uns in der Tat diese Zerlegung ausgeführt und seien $ax + a'$, $bx + b'$ die Faktoren von $\frac{1}{2}H$. Dann wird man durch die obige Identität dazu geführt zu setzen

$$\tfrac{1}{2}Q + \tfrac{3}{2}f\sqrt{-3\varDelta} = (ax + a')^3, \qquad \tfrac{1}{2}Q - \tfrac{3}{2}f\sqrt{-3\varDelta} = (bx + b')^3 \tag{9}$$

und infolgedessen

$$3f\sqrt{-3\varDelta} = (ax + a')^3 - (bx + b')^3,$$

wie wir beweisen wollten. Um also die Methode von Cayley zur Auflösung der kubischen Gleichung anzuwenden, wird nur erfordert, daß man die linken Seiten von (9) zu bilden weiß, welche vollständige Kuben werden müssen. Oder kürzer, wenn die Wurzeln α und β von H gefunden sind, so wissen wir, daß $f = \lambda(x - \alpha)^3 - \mu(x - \beta)^3$

ist. Es ist dann leicht durch Identifizierung die Konstanten λ und μ zu bestimmen und darauf f in die Linearfaktoren $(x-\alpha)\sqrt[3]{\lambda}-(y-\beta)\sqrt[3]{\mu}$ zu zerlegen.

c) Um ferner mit Hilfe der Cayleyschen Methode die allgemeine Auflösungsformel wiederzufinden, die in § 531 aufgestellt worden ist, verfährt man folgendermaßen. Wenn man die Hessesche Funktion bildet, so erhält man

$$(11)\quad \tfrac{1}{2}H = (c_1^2 - 3c_2)(x - \tfrac{1}{3}c_1)^2 + \tfrac{1}{3}\sigma(x - \tfrac{1}{3}c_1) + \tfrac{1}{9}(c_1^2 - 3c_2)^2,$$

wobei zur Abkürzung gesetzt worden ist $\sigma = 2c_1^3 - 9c_1c_2 + 27c_3$. Man bemerke (§ 489), daß σx^3 auch das erste Glied von Q ist. Es folgt also aus (9)

$$(12)\qquad \tfrac{1}{2}\sigma + \tfrac{3}{2}\sqrt{-3\varDelta} = a^3, \quad \tfrac{1}{2}\sigma - \tfrac{3}{2}\sqrt{-3\varDelta} = b^3.$$

Andererseits setze man

$$\tfrac{1}{2}H = [a(x - \tfrac{1}{3}c_1) + a''][b(x - \tfrac{1}{3}c_1) + b''],$$

sodaß, wenn man mit (11) identifiziert, sein muß

$$ab = c_1^2 - 3c_2, \quad a''b'' = \left(\frac{ab}{3}\right)^2, \quad ab'' + ba'' = \tfrac{1}{3}\sigma.$$

Diesen Relationen genügt man durch die Annahme $a'' = \frac{1}{3}b^2$, $b'' = \frac{1}{3}a^2$. Wir können jetzt (10) die folgende Form geben

$$(a^3 - b^3)f = [a(x - \tfrac{1}{3}c_1) + \tfrac{1}{3}b^2]^3 - [b(x - \tfrac{1}{3}c_1) + \tfrac{1}{3}a^2]^3.$$

Man sieht daraus, wenn man durch $a^3 - b^3$ dividiert, sofort, daß f sich in drei Linearfaktoren zerlegen läßt, von denen einer der Quotient von

$$[a(x - \tfrac{1}{3}c_1) + \tfrac{1}{3}b^2] - [b(x - \tfrac{1}{3}c_1) + \tfrac{1}{3}a^2] = (a-b)(x - \tfrac{1}{3}c_1) - \tfrac{1}{3}(a^2 - b^2)$$

durch $a - b$ ist, d. h. $x - \frac{1}{3}(c_1 + a + b)$. Ein zweiter ist der Quotient von

$$[a(x - \tfrac{1}{3}c_1) + \tfrac{1}{3}b^2] - \omega[b(x - \tfrac{1}{3}c_1) + \tfrac{1}{3}a^2]$$
$$= (a - \omega b)(x - \tfrac{1}{3}c_1) - \tfrac{1}{3}\omega(a^2 - \omega^2 b^2)$$

durch $a - \omega b$, d. h. $x - \frac{1}{3}(c_1 + \omega a + \omega^2 b)$. Endlich erhält man den dritten Faktor, indem man

$$[a(x - \tfrac{1}{3}c_1) + \tfrac{1}{3}b^2] - \omega^2[b(x - \tfrac{1}{3}c_1) + \tfrac{1}{3}a^2]$$
$$= (a - \omega^2 b)(x - \tfrac{1}{3}c_1) - \tfrac{1}{3}\omega^2(a^2 - \omega^4 b^2)$$

durch $a - \omega^2 b$ dividiert. Er lautet also $x - \frac{1}{3}(c_1 + \omega^2 a + \omega b)$. Folglich ist

$$f = [x - \tfrac{1}{3}(c_1 + a + b)][x - \tfrac{1}{3}(c_1 + \omega a + \omega^2 b)][x - \tfrac{1}{3}(c_1 + \omega^2 a + \omega b)].$$

Nach (12) bedeutet dies, daß die Wurzeln von f in der Formel enthalten sind

$$x = \tfrac{1}{3}\left(c_1 + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(\sigma + 3\sqrt{-3\varDelta})} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(\sigma - 3\sqrt{-3\varDelta})}\right).$$

d) Bei der **Gleichung vierten Grades** ist die Relation, welche an die Stelle von (8) tritt, folgende:

$$4H^3 - 3Q^2 = 64(3IH - 8Jf)f^2$$

oder

$$\tfrac{3}{4}Q^2 = H^3 - 3IH(4f)^2 + 2J(4f)^3.$$

Wir haben aber bereits gesehen (§ 491, b), daß dieselbe sich in andere einfachere spaltet, wenn man die quadratischen Faktoren f_1, f_2, f_3 der Jacobischen Funktion $Q = 6f_1f_2f_3$ betrachtet. Man hat alsdann

$$H - 4\gamma_1 f = 3f_1^2, \quad H - 4\gamma_2 f = 3f_2^2, \quad H - 4\gamma_3 f = 3f_3^2,$$

wo $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ die Wurzeln von $\Omega(x) = x^3 - 3Ix + 2J$ sind. Wenn man nach Auflösung der Gleichung $\Omega = 0$ die biquadratischen Funktionen $H - 4\gamma f$ bildet, so müssen sich dieselben als vollständige Quadrate erweisen, und wenn man daraus die Quadratwurzeln zieht, so gewinnt man die quadratischen Faktoren von Q und kann dann endlich f, welches proportional zu $f_2^2 - f_3^2 = (f_2 - f_3)(f_2 + f_3)$ ist, in seine Linearfaktoren zerlegen. Es genügt sogar schon eine einzige Wurzel γ_1 von Ω zu kennen und sich darauf zu beschränken $H - 4\gamma_1 f$ zu bilden, welches gleich $3f_1^2$ werden wird. Die Ausziehung der Wurzel führt zu einem Resultat, welches sich, abgesehen von einem beliebigen numerischen Faktor, auf die Form $(ax + a')(bx + b')$ bringen läßt. Dann müssen die andern Funktionen, f_2 und f_3, notwendig die Form $(ax + a')^2 \pm (bx + b')^2$ haben, da (§ 491, a) ihre Wurzeln diejenigen von f_1 harmonisch trennen und auch selbst ein harmonisches Quadrupel bilden. Man gelangt auf die Weise dazu $f_2^2 - f_3^2$ und infolgedessen f die kanonische Form zu geben

$$f = \lambda(ax + a')^4 + \mu(ax + a')^2(bx + b')^2 + \nu(bx + b')^4,$$

sodaß jetzt die Gleichung $f = 0$ wie eine quadratische Gleichung aufgelöst wird.

535. Methode von Lagrange. a) Wenn eine **quadratische Gleichung** gegeben ist, so kennt man zwei symmetrische Funktionen der Wurzeln, nämlich

$$\alpha_1 + \alpha_2 = c_1, \quad \alpha_1\alpha_2 = c_2.$$

Es liegt aber auf der Hand, daß es, um eine Wurzel von der andern unterscheiden zu können, unerläßlich ist irgend eine andere, nichtsymmetrische Funktion dieser Wurzeln zu kennen. Im vorliegenden Falle haben wir (§ 474) die alternierende Funktion $\alpha_1 - \alpha_2$, deren

Quadrat die Diskriminante $c_1^2 - 4c_2$ der vorgelegten Gleichung ist. Also ergeben sich die Wurzeln durch Addition und Subtraktion der Relationen

$$\alpha_1 + \alpha_2 = c_1, \quad \alpha_1 - \alpha_2 = \sqrt{\Delta}$$

und haben daher die Werte

$$\alpha_1 = \tfrac{1}{2}(c_1 + \sqrt{\Delta}), \quad \alpha_2 = \tfrac{1}{2}(c_2 - \sqrt{\Delta}).$$

b) Ebenso ist bei der **kubischen Gleichung** die bloße Kenntnis der symmetrischen Funktionen

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = c_1, \quad \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 = c_2, \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = c_3$$

nicht ausreichend, um die Wurzeln voneinander zu unterscheiden. Wir haben aber bereits bemerkt (§ 480), daß die Funktion $(\alpha_1 + \omega\alpha_2 + \omega^2\alpha_3)^3$ nur die beiden Werte

$$\beta_1 = (\alpha_1 + \omega\alpha_2 + \omega^2\alpha_3)^3, \quad \beta_2 = (\alpha_1 + \omega^2\alpha_2 + \omega\alpha_3)^3$$

hat, die wir als die Wurzeln einer quadratischen Gleichung betrachten können, deren Koeffizienten sich rational durch die Koeffizienten der vorgelegten Gleichung ausdrücken lassen. In der Tat ist

$$\begin{aligned}
(\alpha_1 + \omega\alpha_2 + \omega^2\alpha_3) + (\alpha_1 + \omega^2\alpha_2 + \omega\alpha_3) &= 2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3, \\
(\alpha_1 + \omega\alpha_2 + \omega^2\alpha_3) + \omega(\alpha_1 + \omega^2\alpha_2 + \omega\alpha_3) &= \omega^2(2\alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_2), \\
(\alpha_1 + \omega\alpha_2 + \omega^2\alpha_3) + \omega^2(\alpha_1 + \omega^2\alpha_2 + \omega\alpha_3) &= \omega(2\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_1).
\end{aligned}$$

Man erhält daraus durch Multiplikation, wenn man fortfährt mit σ den ersten Koeffizienten in Q zu bezeichnen, $\beta_1 + \beta_2 = \sigma$. In analoger Weise könnten wir $\beta_1\beta_2$ berechnen und die Resolvente herstellen. Es ist aber zur Berechnung von β_1 und β_2 nützlicher, $\beta_1 - \beta_2$ zu bilden, und zu diesem Zweck schreibe man

$$\begin{aligned}
(\alpha_1 + \omega\alpha_2 + \omega^2\alpha_3) - (\alpha_1 + \omega^2\alpha_2 + \omega\alpha_3) &= (\omega - \omega^2)(\alpha_2 - \alpha_3), \\
(\alpha_1 + \omega\alpha_2 + \omega^2\alpha_3) - \omega(\alpha_1 + \omega^2\alpha_2 + \omega\alpha_3) &= (1 - \omega)(\alpha_1 - \alpha_2), \\
(\alpha_1 + \omega\alpha_2 + \omega^2\alpha_3) - \omega^2(\alpha_1 + \omega^2\alpha_2 + \omega\alpha_3) &= (\omega^2 - 1)(\alpha_3 - \alpha_1).
\end{aligned}$$

Daraus folgt, wenn man multipliziert und außerdem beachtet, daß $(\omega - \omega^2)^2(1 - \omega)^2(\omega^2 - 1)^2$, die Diskriminante von $x^3 - 1$, den Wert -27 hat,

$$\beta_1 - \beta_2 = 3\sqrt{-3\Delta}.$$

Also ist

$$\beta_1 = \tfrac{1}{2}(\sigma + 3\sqrt{-3\Delta}), \quad \beta_2 = \tfrac{1}{2}(\sigma - 3\sqrt{-3\Delta}).$$

Um nun die Wurzeln α zu berechnen, haben wir ein System von linearen Gleichungen

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = c_1, \quad \alpha_1 + \omega\alpha_2 + \omega^2\alpha_3 = \sqrt[3]{\beta_1}, \quad \alpha_1 + \omega^2\alpha_2 + \omega\alpha_3 = \sqrt[3]{\beta_2}.$$

Schließlich wird

$$\alpha_1 = \tfrac{1}{3}\left(c_1 + \sqrt[3]{\beta_1} + \sqrt[3]{\beta_2}\right),$$

$$\alpha_2 = \tfrac{1}{3}\left(c_1 + \omega^2 \sqrt[3]{\beta_1} + \omega \sqrt[3]{\beta_2}\right), \quad \alpha_3 = \tfrac{1}{3}\left(c_1 + \omega \sqrt[3]{\beta_1} + \omega^2 \sqrt[3]{\beta_2}\right).$$

c) Im Falle der **Gleichung vierten Grades** können wir die Funktion $\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4$ betrachten, welche nur drei Werte hat:

$$\beta_1 = \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4, \quad \beta_2 = \alpha_3\alpha_1 + \alpha_2\alpha_4, \quad \beta_3 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4.$$

Versuchen wir zunächst die kubische Gleichung zu bilden, welche durch diese Wurzeln definiert ist. Durch eine leichte Rechnung erhält man

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = c_2, \quad \beta_2\beta_3 + \beta_3\beta_1 + \beta_1\beta_2 = c_1 c_3 - 4c_4,$$
$$\beta_1\beta_2\beta_3 = c_3^2 + c_1^2 c_4 - 4c_2 c_4.$$

Die Resolvente ist also

$$(13) \qquad y^3 - c_2 y^2 + (c_1 c_3 - 4c_4)y - (c_3^2 + c_1^2 c_4 - 4c_2 c_4) = 0.$$

Wenn man eine ihrer Wurzeln kennt, z. B. β_1, so hat man

$$\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 = \beta_1, \quad \alpha_2\alpha_3 \cdot \alpha_1\alpha_4 = c_4,$$

sodaß $\alpha_2\alpha_3$ und $\alpha_1\alpha_4$ Wurzeln von $x^2 - \beta_1 x + c_4$ sind. Findet man für diese Wurzeln die Werte a und b, so hat man $\alpha_2\alpha_3 = a$, $\alpha_1\alpha_4 = b$. Man kennt daher, wenn man beachtet, daß

$$(\alpha_2 + \alpha_3)\alpha_1\alpha_4 + (\alpha_1 + \alpha_4)\alpha_2\alpha_3 = c_3$$

ist, zwei Relationen, welchen $\alpha_2 + \alpha_3$ und $\alpha_1 + \alpha_4$ genügen, nämlich

$$(\alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_1 + \alpha_4) = c_1, \quad b(\alpha_2 + \alpha_3) + a(\alpha_1 + \alpha_4) = c_3.$$

Daraus folgt

$$\alpha_2 + \alpha_3 = \frac{a c_1 - c_3}{a - b}, \quad \alpha_1 + \alpha_4 = \frac{c_3 - b c_1}{a - b}.$$

Also liefern die quadratischen Gleichungen

$$x^2 - \frac{a c_1 - c_3}{a - b}\, x + a = 0, \quad x^2 - \frac{c_3 - b c_1}{a - b}\, x + b = 0$$

alle Wurzeln der vorgelegten Gleichung. Man hat mit andern Worten folgende Identität, die sich leicht verifizieren läßt,:

$$(14) \qquad x^4 - c_1 x^3 + c_2 x^2 - c_3 x + c_4$$
$$= \left(x^2 - \frac{a c_1 - c_3}{a - b}\, x + a\right)\left(x^2 - \frac{c_3 - b c_1}{a - b}\, x + b\right).$$

d) Anstatt $\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4$ hätten wir auch die Funktion $\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4$ wählen können. Allerdings hat dieselbe sechs Werte, und man wird, um sie zu ermitteln, eine Gleichung sechsten Grades auflösen müssen. Aber diese Werte sind paarweise dem absoluten Betrage nach gleich, sodaß die Resolvente nur die geraden Potenzen der Unbekannten enthalten und daher unmittelbar auf den dritten Grad reduzierbar sein wird. Die sechs Werte der betrachteten Funktion sind

$$\gamma_1 = (\alpha_1 + \alpha_4) - (\alpha_2 + \alpha_3),$$
$$\gamma_2 = (\alpha_2 + \alpha_4) - (\alpha_3 + \alpha_1), \quad \gamma_3 = (\alpha_3 + \alpha_4) - (\alpha_1 + \alpha_2)$$

und $-\gamma_1$, $-\gamma_2$, $-\gamma_3$. Die jetzige Resolvente läßt sich leicht aus der mit (13) bezeichneten herleiten, indem man die Relation benutzt, welche die γ mit den β verbindet. In der Tat hat man

$$\gamma_1^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)^2 - 4(\beta_2 + \beta_3) = c_1^2 - 4c_2 + 4\beta_1 \quad \text{u. s. w.},$$

sodaß die Unbekannte z der jetzigen Resolvente mit derjenigen der Gleichung (13) durch die Relation $z^2 = c_1^2 - 4c_2 + 4y$ verknüpft ist. Die wirkliche Ersetzung von y durch seinen Ausdruck in z verwandelt (13) in

$$(15) \quad z^6 - (3c_1^2 - 8c_2)z^4 + (3c_1^4 - 16c_1^2c_2 + 16c_2^2 + 16c_1c_3 - 64c_4)z^2$$
$$- (c_1^3 - 4c_1c_2 + 8c_3)^2 = 0.$$

Hat man die Wurzeln γ dieser Gleichung berechnet, so erhält man, wenn man die Relation $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = c_1$ zu den andern hinzunimmt, die eben die γ durch die α definieren, ein System von linearen Gleichungen, welches folgende Werte für die Wurzeln liefert:

$$\alpha_1 = \tfrac{1}{4}(c_1 + \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3), \quad \alpha_2 = \tfrac{1}{4}(c_1 - \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3),$$
$$\alpha_3 = \tfrac{1}{4}(c_1 - \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3), \quad \alpha_4 = \tfrac{1}{4}(c_1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3).$$

536. Bemerkungen. a) Die Methode von Lagrange führt, wenn man die Funktion der Wurzeln, welche der Resolvente genügen soll, passend wählt, in rationeller Weise zu den verschiedenen Kunstgriffen, die von Hudde, Ferrari, Cartesius, Euler und anderen zur Auflösung der kubischen und biquadratischen Gleichungen erdacht worden sind. Selbst die Cayleysche Methode hat enge Beziehungen zu derjenigen von Lagrange, und es ist leicht sich davon zu überzeugen, wenn man bemerkt, daß die Resolventen in y und in z, welche zur Auflösung der biquadratischen Gleichung konstruiert worden sind, nicht wesentlich verschieden sind von der Resolvente $\Omega = 0$. In der Tat entstehen die linken Seiten der Gleichungen (13) und (15) aus $\Omega(x)$, indem man bezüglich setzt

$$x = c_2 - 3y, \quad x = \tfrac{1}{4}(3c_1^2 - 8c_2) - \tfrac{3}{4}z^2.$$

Es ist ferner leicht, die Äquivalenz zwischen der Zerlegung (14) von $f(x)$ und derjenigen nachzuweisen, welche die Cayleysche Methode liefert. Setzt man, wie es auch durch diese Methode nahegelegt wird,

$$f(x) = (\lambda x^2 + \mu x + \nu)^2 - (\lambda' x^2 + \mu' x + \nu')^2,$$

so findet man, daß

$$\lambda^2 - \lambda'^2 = 1, \quad \nu + \nu' = (\lambda + \lambda')a, \quad \nu - \nu' = (\lambda - \lambda')b,$$

$$\mu + \mu' = \frac{c_3 - a c_1}{a - b}(\lambda + \lambda'), \quad \mu - \mu' = \frac{b c_1 - c_3}{a - b}(\lambda - \lambda')$$

sein muß mit

$$a = \tfrac{1}{2}\left(y + \sqrt{y^2 - 4c_4}\right), \quad b = \tfrac{1}{2}\left(y - \sqrt{y^2 - 4c_4}\right),$$

wo y eine Wurzel der Resolvente (13) ist. Jeder der drei Wurzeln entspricht eine der drei Arten der Zerlegung von f in zwei quadratische Faktoren. Die Methode von Ferrari reduziert sich im Grunde darauf, daß man $\lambda = 1$, $\lambda' = 0$ nimmt.

b) Lagrange hat seine Methode auf alle algebraischen Gleichungen angewandt[1]) und für jeden Grad die Resolvente zu bilden gelehrt. Die allgemeinen Gleichungen der vier ersten Grade lassen sich auflösen, weil die genannte Hilfsgleichung von niedrigerem Grade wird als die vorgelegte Gleichung. Dieser günstige Umstand bietet sich nicht mehr bei den Gleichungen von höherem als viertem Grade. So läßt sich z. B. die Auflösung der Gleichung fünften Grades[2]) immer auf die einer Gleichung vierten Grades reduzieren. Aber die Koeffizienten derselben hängen ab von der Auflösung einer Gleichung sechsten Grades, und die Methode wird daher illusorisch. Sehr bald werden wir sehen, daß diese Tatsache nicht auf der Unvollkommenheit der Methode beruht (die sich bei gewissen Klassen von Gleichungen mit Nutzen anwenden läßt), sondern auf der Unzulänglichkeit der algebraischen Symbole zur Darstellung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung als expliciter Funktionen der Koeffizienten. Es sind für eine solche Darstellung in endlicher Form neue Symbole nötig, und Hermite und Brioschi ist es bereits gelungen die allgemeine Auflösung der Gleichungen fünften und sechsten Grades zu geben unter Zuhilfenahme spezieller transcendenter Funktionen. Dies schließt nicht aus, daß eine solche Auflösung, die durch Radikale unmöglich ist, sich wie Klein gezeigt hat mit rein algebraischen Hilfsmitteln ausführen läßt, die jedoch dem Gebiet der höheren Algebra angehören.

c) Wenn man über die Auflösung der Gleichungen der ersten vier Grade etwas nachdenkt, so erkennt man, daß der Erfolg der Methode von Lagrange (vgl. §§ 480, 481) genau genommen auf der Möglichkeit beruht, mehrwertige Funktionen zu konstruieren, die eine einwertige oder zweiwertige Potenz haben. So sind wir bei der quadratischen Gleichung dazu geführt worden, die zweiwertige Funktion $\alpha_1 - \alpha_2$ zu betrachten, welche als Quadrat die symmetrische Funktion Δ hat. Bei der kubischen Gleichung haben wir die Funktion $\alpha_1 + \omega\alpha_2 + \omega^2\alpha_3$ angetroffen, welche als Kubus eine zweiwertige Funk-

1) Abhandlungen der Berliner Akademie, 1771. Siehe auch eine Arbeit von Vandermonde in den Abhandlungen der Pariser Akademie desselben Jahres.

2) Über diesen Gegenstand siehe eine Arbeit von Brioschi in den Annali di Matematica (2ª serie, t. I, p. 222).

tion $\frac{1}{2}(\sigma \pm 3\sqrt{-3\varDelta})$ hat. Endlich hätten wir auch bei der Gleichung vierten Grades anstatt die Gleichung (13) aufzulösen direkt die Funktion $\beta_1 + \omega\beta_2 + \omega^2\beta_3$, d. h.

$$\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \omega(\alpha_3\alpha_1 + \alpha_2\alpha_4) + \omega^2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4)$$

bilden können, deren Kubus die beiden Werte $J \pm \sqrt{J^2 - I^3}$ hat, wie man sofort durch die Bemerkung erkennt, daß die β dieselbe Diskriminante haben wie die α und daß für sie die Funktion σ gerade $2J$ ist.

537. Übungen. a) Die Gleichung $x^3 + 6x - 7 = 0$ aufzulösen. Hier hat man (§ 528)

$$p = 6, \quad q = -7, \quad \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{81}{4}.$$

Die Wurzeln der Resolvente sind also

$$u^3 = \tfrac{7}{2} + \tfrac{9}{2} = 8, \quad v^3 = \tfrac{7}{2} - \tfrac{9}{2} = -1.$$

Man kann also setzen $u = 2,\ 2\omega,\ 2\omega^2$ und $v = -1,\ -\omega,\ -\omega^2$. Diese Werte müssen aber in der Weise gepaart werden, daß $uv = -2$ ist. Also sind die Wurzeln der vorgelegten Gleichung $2 - 1$, $2\omega - \omega^2$, $2\omega^2 - \omega$ oder

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -\tfrac{1}{2}\left(1 + 3\sqrt{-3}\right), \quad \alpha_3 = -\tfrac{1}{2}\left(1 - 3\sqrt{-3}\right).$$

b) Eine Halbkugel in zwei gleiche Teile zu zerlegen durch eine Parallelebene zur Basis. Nimmt man den Radius als Einheit und ist x der Abstand zwischen der Basis und der unbekannten Ebene, so muß sein

$$\frac{\pi x}{2}[1 + (1 - x^2)] + \frac{\pi}{6}x^3 = \frac{\pi}{3}, \text{ d. h. } x^3 - 3x + 1 = 0.$$

Hier hat man (§ 530) $p = -3$, $q = 1$, mithin $\varrho = 1$, $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, $\theta = 120^0$. Die Wurzeln sind also

$$\alpha_1 = 2\cos 40^0, \quad \alpha_2 = 2\cos 160^0, \quad \alpha_3 = 2\cos 280^0.$$

Wir haben nur die zwischen 0 und 1 liegende Wurzel ins Auge zu fassen. Sie lautet

$$2\cos 280^0 = 2\cos 80^0 = 0{,}3472964\ldots$$

c) Die Gleichung $4x^3 + 9x^2 + 18x + 17 = 0$ mit Hilfe der Cayleyschen Methode aufzulösen[1]). Wenn man darauf hält durch Einführung passender Zahlenfaktoren gebrochene Koeffizienten zu vermeiden, so findet man $\varDelta = -27 \cdot 1600$,

$$H = -90(3x^2 + 10x + 3), \quad Q = -270(11x^3 - 9x^2 - 63x - 67).$$

Ferner erkennt man leicht, daß der Ausdruck

$$-(11x^3 - 9x^2 - 63x - 67) \pm 4(4x^3 + 9x^2 + 18x + 17)$$

1) Salmon-Fiedler: „Algebra“ (S. 241).

die Werte $5(x+3)^3$ und $-(3x+1)^3$ hat. Die vorgelegte Gleichung ist also (§ 534, b) auf die Form

$$5(x+3)^3 + (3x+1)^3 = 0$$

reduzierbar, in welcher man sie unmittelbar auflösen kann. Übrigens genügt es ohne Q zu berechnen zu bemerken, daß -3 und $-\frac{1}{3}$ die Wurzeln von H sind, um der linken Seite der Gleichung die Form $\lambda(x+3)^3 + \mu(3x+1)^3$ geben zu können. Durch Identifikation erhält man die Gleichungen $\lambda + 27\mu = 4$, $27\lambda + \mu = 17$, aus denen sich ergibt $\lambda = 5\mu$.

d) Die Gleichung $x^4 + 8x^3 - 12x^2 + 104x - 20 = 0$ aufzulösen[1]). Nach Berechnung der Invarianten $I = -4 \cdot 12 \cdot 54$, $J = 27 \cdot 32 \cdot 189$ erhält man (§ 534, d) als Resolvente $x^3 + 6^5 x + 7 \cdot 6^6 = 0$. Man sieht sofort, daß diese Gleichung die Wurzel -6^2 hat. Andererseits hat man

$$H = 6 \cdot 48(x^4 - 10x^3 - 12x^2 - 4x + 106)$$

und weiß, daß die biquadratische Funktion

$$2(x^4 - 10x^3 - 12x^2 - 4x + 106) + (x^4 + 8x^3 - 12x^2 + 104x - 20)$$

ein vollständiges Quadrat sein muß. In der Tat ist sie das Dreifache des Quadrats von $x^2 - 2x - 8$, welches die Wurzeln -2 und 4 hat. Man muß also die linke Seite der vorgelegten Gleichung auf die Form bringen können

$$\lambda(x+2)^4 + \mu(x+2)^2(x-4)^2 + \nu(x-4)^4.$$

Durch Identifikation erhält man $\lambda = -3\nu$, $\mu = -2\nu$, und da

$$3z^2 + 2z - 1 = (z+1)(3z-1)$$

ist, so wird die Gleichung

$$[(x+2)^2 + (x-4)^2][3(x+2)^2 - (x-4)^2] = 0,$$

mithin sind ihre Wurzeln durch die linearen Gleichungen

$$\pm(x+2)\sqrt{-1} = x - 4, \qquad \pm(x+2)\sqrt{3} = x - 4$$

gegeben. Sie haben also die Werte

$$\alpha_1 = 1 + 3\sqrt{-1}, \quad \alpha_3 = -5 - 3\sqrt{3},$$
$$\alpha_2 = 1 - 3\sqrt{-1}, \quad \alpha_4 = -5 + 3\sqrt{3}.$$

Die Methode von Lagrange (§ 535, c) würde uns zu der Resolvente

$$y^3 + 3 \cdot 4y^2 + 57 \cdot 4^2 y - 134 \cdot 4^3 = 0$$

geführt haben, welche die Wurzel 8 besitzt. Darauf hätten wir die Gleichung

$$x^2 - 8x - 20 = 0$$

1) Salmon-Fiedler: „Algebra" (S. 263).

lösen müssen, deren Wurzeln $a = 10$, $b = -2$ sind, und die gegebene Gleichung hätte sich also gespalten in die beiden quadratischen

$$x^2 - 2x + 10 = 0, \quad x^2 + 10x - 2 = 0.$$

e) Man trifft manchmal Gleichungen von höherem als viertem Grade an, die wegen irgend einer Besonderheit auf die der ersten vier Grade reduzierbar sind. Wir wollen hier insbesondere nennen die reziproken Gleichungen, deren Grad sich wenigstens um die Hälfte erniedrigen läßt. Das sind Gleichungen, bei denen die Wurzeln paarweise invers zueinander sind, die also ungeändert bleiben, wenn man x in $\frac{1}{x}$ verwandelt. Ihre Koeffizienten sind also von der Beschaffenheit, daß man hat

$$\frac{a_0}{a_n} = \frac{a_1}{a_{n-1}} = \frac{a_2}{a_{n-2}} = \cdots = \frac{a_n}{a_0},$$

mithin $a_i = a_{n-i}$ für $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ oder $a_i = -a_{n-i}$. Denkt man sich die Gleichung bereits befreit von den möglicherweise vorhandenen Wurzeln 1 und -1, so wird sie notwendig die Form haben

$$a_0 x^{2\nu} + a_1 x^{2\nu - 1} + \cdots + a_{\nu-1} x^{\nu+1} + a_\nu x^\nu + a_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + a_0 = 0$$

und auf den Grad ν reduzierbar sein. Setzt man in der Tat $x^p + x^{-p} = \xi_p$, so kann man sie folgendermaßen schreiben:

$$a_0 \xi_\nu + a_1 \xi_{\nu-1} + a_2 \xi_{\nu-2} + \cdots + a_\nu = 0.$$

Nun sind aber die ξ Funktionen von $x + x^{-1} = y$, die sich leicht berechnen lassen, da man identisch hat

$$\left(x^p + \frac{1}{x^p}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{p+1} + \frac{1}{x^{p+1}} + x^{p-1} + \frac{1}{x^{p-1}},$$

d. h. $\xi_{p+1} = y\xi_p - \xi_{p-1}$. Wegen $\xi_0 = 2$, $\xi_1 = y$ erhält man also successiv $\xi_2 = y^2 - 2$, $\xi_3 = y^3 - 3y$, $\xi_4 = y^4 - 4y^2 + 2$, $\xi_5 = y^5 - 5y^3 + 5y$, ... Auf diese Weise wird die gegebene Gleichung

$$b_0 y^\nu + b_1 y^{\nu-1} + b_2 y^{\nu-2} + \cdots + b_\nu = 0.$$

Löst man sie auf, so gibt jeder Wert von y Veranlassung zu zwei Werten von x, die man mit Hilfe der Formel $x = \frac{1}{2}\left(y \pm \sqrt{y^2 - 4}\right)$ berechnet. Man bemerke endlich, daß man die Berechnung der Funktionen ξ mit Hilfe der Identität $\xi_p \xi_q = \xi_{p+q} + \xi_{p-q}$ noch beschleunigen kann. Es ist zweckmäßig die Differenz $p - q$ möglichst klein zu nehmen und die Formeln $\xi_{2p} = \xi_p^{\,2} - 2$, $\xi_{2p+1} = \xi_p \xi_{p+1} - y$ zu benutzen.

f) Reziprok ist z. B. die bekannte Gleichung (§ 484, b)

$$(16) \quad \lambda^6 - 3\lambda^5 + \left(6 - \frac{I^3}{\Delta}\right)\lambda^4 - \left(7 - 2\frac{I^3}{\Delta}\right)\lambda^3 + \left(6 - \frac{I^3}{\Delta}\right)\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0,$$

welche die Werte des Doppelverhältnisses der Wurzeln einer biquadratischen Gleichung liefert, falls die Invarianten I, J und infolgedessen $\Delta = \frac{4}{27}(I^3 - J^2)$ bekannt sind. Setzt man $\lambda + \frac{1}{\lambda} = x + 1$, sodaß

$$\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} = x^2 + 2x - 1, \quad \lambda^3 + \frac{1}{\lambda^3} = x^3 + 3x^2 - 2$$

ist, so reduziert sich die vorgelegte Gleichung auf

$$x^3 - \frac{I^3}{\varDelta} x + \frac{I^3}{\varDelta} = 0.$$

Die Formeln für die trigonometrische Auflösung (§ 530) geben uns

$$\varrho = \left(\frac{I^3}{3\varDelta}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \cos\theta = -\frac{3}{2}\varrho^{-\frac{1}{3}},$$

sodaß

$$\sin^2\theta = 1 - \frac{9}{4}\varrho^{-\frac{2}{3}} = 1 - \frac{27\varDelta}{4I^3} = \frac{J^2}{I^3}$$

ist. Mithin wird

$$x_1 = -3\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta}, \quad x_2 = -3\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta}, \quad x_3 = -3\frac{\cos\theta_3}{\cos\theta},$$

wenn man kurz mit θ_1, θ_2, θ_3 die Winkel $\frac{1}{3}\theta$, $\frac{1}{3}\theta + 120^0$, $\frac{1}{3}\theta + 240^0$ bezeichnet. Inzwischen hat man für jeden von diesen Winkeln θ

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} = 1 - \frac{3\cos\theta}{\cos 3\theta} = 2\frac{3 + \cot^2\theta}{3 - \cot^2\theta},$$

woraus sich ergibt

$$\lambda = \frac{\sqrt{3} \pm \cot\theta}{\sqrt{3} \mp \cot\theta} = -\frac{\cos(\theta \pm 120^0)}{\cos(\theta \mp 120^0)}.$$

Also hängen die Wurzeln der Gleichung (16) einzig und allein von den drei Werten von θ ab, die dadurch definiert sind, daß man die absolute Invariante $\frac{I^3}{J^2}$ auf die Form $\frac{1}{\sin^2 3\theta}$ bringt. Sie haben die Werte

$$-\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_3}, \quad -\frac{\cos\theta_3}{\cos\theta_2}, \quad -\frac{\cos\theta_3}{\cos\theta_1}, \quad -\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_3}, \quad -\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}, \quad -\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}.$$

Man hat mit andern Worten (vgl. § 417)

$$(\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4)\cos\theta_1 + (\alpha_3\alpha_1 + \alpha_2\alpha_4)\cos\theta_2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4)\cos\theta_3 = 0.$$

Die erhaltenen Werte sind sämtlich reell, wenn man θ als reell voraussetzt. Dies wird klar durch die Bemerkung, daß man unter dieser Voraussetzung $\varDelta > 0$ hat. Es sind daher (§ 513, b), wenn man die Koeffizienten als reell annimmt, die Wurzeln sämtlich reell oder sämtlich imaginär, und in dem letzteren Falle gehören sie, weil sie konjugiert sind, einem Kreise an, sodaß (§ 417) in beiden Fällen ihre Doppelverhältnisse reell sind.

Das Theorem von Ruffini.

538. Wir wollen jetzt, um die algebraische Auflösung der Gleichungen beliebigen Grades zu versuchen, erforschen, ob man dem allgemeinen Ausdruck der Wurzel als Funktion der Koeffizienten irgend eine spezielle Form beilegen muß. Zu diesem Zweck ist es vor allen Dingen nötig sich einige Kenntnisse über die Art und Weise anzueignen, wie man die expliciten algebraischen Funktionen klassifiziert. Aus gegebenen Größen und allen denjenigen andern, die sich aus ihnen durch eine endliche Anzahl von Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen, Divisionen und Potenzierungen mit ganzzahligen Exponenten herleiten lassen, stelle man einen sogenannten **Rationalitätsbereich** her. Dieser ist so beschaffen, daß jede rationale Funktion der in ihm enthaltenen Größen wieder ein dem Bereich angehöriges Resultat gibt. Um aus ihm herauszugelangen, dabei aber doch immer in dem Bereich der algebraischen Funktionen zu bleiben, muß man eine Potenzierung mit rationalem, nicht ganzzahligem Exponenten ausführen. Man erhält auf diese Weise ein Resultat, welches im allgemeinen nicht mehr in dem gegebenen Rationalitätsbereich liegt. Übrigens ist die Erhebung zur Potenz $\frac{q}{p}$ mit ganzzahligem $p > 0$ und ganzzahligem q gleichwertig mit der rationalen Operation, die in der Erhebung zur q-ten Potenz besteht, gefolgt von der Ausziehung der p-ten Wurzel als einziger irrationaler Operation, die also fähig ist Irrationalitäten hineinzubringen. Zerlegt man überdies p in ein Produkt $\alpha\beta\gamma\ldots$ von gleichen oder ungleichen Primzahlen, so spaltet sich die Operation $\sqrt[p]{\ }$ in die Operationen $\sqrt[\alpha]{\ }$, $\sqrt[\beta]{\ }$, $\sqrt[\gamma]{\ }$, ..., die nicht weiter in ähnliche Operationen zerlegbar sind. Mithin ist $\sqrt[p]{\ }$, wo p eine Primzahl bedeutet, die einfache oder die Elementaroperation unter denen, die Irrationalitäten hervorbringen können.

539. Dies vorausgeschickt wollen wir zu dem gegebenen Rationalitätsbereich die Resultate hinzufügen, die sich ergeben, wenn man auf die in ihm enthaltenen Größen eine einfache Wurzelausziehung anwendet. Darauf wollen wir auf alle Größen des erweiterten Bereiches rationale Operationen anwenden und deren Resultate wieder dem Bereich einverleiben. Wir gelangen auf diese Weise zur Herstellung eines neuen Rationalitätsbereiches, der wie der ursprüngliche die Eigenschaft hat alle rationalen Funktionen der ihn bildenden Größen zu enthalten, während nur eine Wurzelausziehung uns ein Resultat liefern kann, welches außerhalb des Bereiches liegt. Diejenigen Funktionen, welche sich nur nach der angegebenen Erweiterung des Rationalitätsbereiches als rational betrachten lassen, heißen irrational von erster Ordnung. In ihnen tritt die einfache irrationale Operation nur auf angewandt auf rationale Funktionen. In analoger Weise schreitet man nunmehr zur Erweiterung und Vervollständigung des zweiten Bereiches und erhält dadurch einen dritten Rationalitätsbereich, in welchem neue irrationale Funktionen als rational erscheinen, die man irrational von zweiter Ordnung nennt. In ihnen ist die einfache irrationale Operation nur angewandt auf rationale Funktionen oder auf irrationale von erster Ordnung, und zwar sicher auf diese letzteren. Fährt man so fort, so gelangt man zu den expliziten algebraischen Funktionen μ-ter Ordnung, in deren jeder wenigstens eine einfache Wurzelausziehung vorkommt, die auf eine Funktion $(\mu - 1)$-ter Ordnung angewandt ist. Die Anzahl ν dieser Radikale in einer Funktion u von der Ordnung μ gibt den Grad dieser Funktion an. Wohlverstanden wird ν als reduziert auf den kleinstmöglichen Wert vorausgesetzt in dem Sinne, daß wir, wenn irgend eins der Radikale von der Ordnung μ sich rational mit Hilfe der andern ausdrücken ließe, uns diesen Ausdruck in u bereits eingesetzt denken. Es bleiben schließlich in u nur solche Radikale μ-ter Ordnung stehen, die auf dem Wege rationaler Operationen nicht aufeinander reduzierbar sind. Wenn man also in dem Ausdruck von u eines der genannten Radikale isoliert, so kann man schreiben

$$u = f(\sqrt[p]{v}, v_1, v_2, v_3, \ldots), \tag{17}$$

wo p eine Primzahl, f das Symbol einer rationalen Funktion, v eine Funktion $(\mu - 1)$-ter Ordnung ist, während die Ordnungen und die Grade der Funktionen $v_1, v_2, v_3, \ldots$ nicht μ bezw. $\nu - 1$ übertreffen.

540. Hilfssatz I. Jede algebraische Funktion μ-ter Ordnung und ν-ten Grades kann immer auf die Form gebracht werden

$$u = u_0 + u_1 \sqrt[p]{v} + u_2 (\sqrt[p]{v})^2 + \cdots + u_{p-1} (\sqrt[p]{v})^{p-1}, \tag{18}$$

wo p eine Primzahl ist, $u_0, u_1, u_2, \ldots$ algebraische Funktionen sind, deren Ordnungen und Grade nicht größer sind als μ bezw. $\nu - 1$, während v eine Funktion $(\mu - 1)$-ter Ordnung ist, deren p-te Wurzel nicht rational ausdrückbar durch $u_0, u_1, u_2, \ldots$ ist. Man kann überdies immer annehmen $u_1 = 1$.

Da jede rationale Funktion von einer oder mehreren Veränderlichen sich als Quotient von zwei ganzen Funktionen derselben Veränderlichen ausdrücken läßt, so können wir (17) in der Form schreiben

$$u = \frac{\varphi_0 + \varphi_1 \sqrt[p]{v} + \varphi_2 (\sqrt[p]{v})^2 + \cdots}{\psi_0 + \psi_1 \sqrt[p]{v} + \psi_2 (\sqrt[p]{v})^2 + \cdots},$$

wo die φ_i und die ψ_i ganze Funktionen von $v_1, v_2, v_3, \ldots$ sind. Setzt man zur Abkürzung

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \varphi_1 x + \varphi_2 x^2 + \cdots, \quad \psi(x) = \psi_0 + \psi_1 x + \psi_2 x^2 + \cdots,$$

so kann man auch schreiben

$$u = \frac{\varphi(\sqrt[p]{v})\,\psi(\omega\sqrt[p]{v})\,\psi(\omega^2\sqrt[p]{v})\cdots\psi(\omega^{p-1}\sqrt[p]{v})}{\psi(\sqrt[p]{v})\,\psi(\omega\sqrt[p]{v})\,\psi(\omega^2\sqrt[p]{v})\cdots\psi(\omega^{p-1}\sqrt[p]{v})}, \tag{19}$$

wo ω eine p-te imaginäre Einheitswurzel ist. Bekanntlich sind

$$\sqrt[p]{v}, \quad \omega\sqrt[p]{v}, \quad \omega^2\sqrt[p]{v}, \quad \ldots, \quad \omega^{p-1}\sqrt[p]{v}$$

die sämtlichen p-ten Wurzeln von v. Daraus folgt, daß die Funktion

$$w = \psi(\sqrt[p]{v})\,\psi(\omega\sqrt[p]{v})\,\psi(\omega^2\sqrt[p]{v})\cdots\psi(\omega^{p-1}\sqrt[p]{v}),$$

die in den Wurzeln von $v - x^p$ ganz und symmetrisch ist, eine ganze rationale Funktion in den Koeffizienten von $v - x^p$, also in v ist. Wir sehen auf diese Weise, daß in der Funktion w nicht mehr $\sqrt[p]{v}$ vorkommt. Sie ist also eine ganze Funktion von den v_i und von v. Dagegen ist der Zähler des Ausdruckes (19) nicht symmetrisch in den Wurzeln von $v - x^p$. Denkt man sich aber die Multiplikation der p Polynome, aus denen er zusammengesetzt ist, ausgeführt, so ist klar, daß man ihm die Form einer ganzen Funktion geben kann, welche nach $\sqrt[p]{v}$ geordnet so aussieht

$$w_0 + w_1\sqrt[p]{v} + w_2(\sqrt[p]{v})^2 + w_3(\sqrt[p]{v})^3 + \cdots.$$

Hier sind $w_0, w_1, w_2, \ldots$ ganze Funktionen der v_i, also algebraische Funktionen, die denselben Bedingungen unterworfen sind wie w und wie infolgedessen auch die Quotienten der w_i durch w, abgesehen davon, daß diese letzteren in den v_i nicht ganz, sondern nur rational sind. Nennen wir sie $u_0, u_1, u_2, \ldots$, so erhalten wir die Formel

$$u = u_0 + u_1\sqrt[p]{v} + u_2(\sqrt[p]{v})^2 + u_3(\sqrt[p]{v})^3 + \cdots,$$

in welcher wir uns immer darauf beschränken können die p ersten Glieder zu nehmen. Da nämlich

$$(\sqrt[p]{v})^p = v, \quad (\sqrt[p]{v})^{p+1} = v\sqrt[p]{v}, \quad (\sqrt[p]{v})^{p+2} = v(\sqrt[p]{v})^2, \quad \ldots$$

ist, so kann man die Glieder $u_p(\sqrt[p]{v})^p$, $u_{p+1}(\sqrt[p]{v})^{p+1}, \ldots$, bezüglich mit u_0, $u_1\sqrt[p]{v}, \ldots$, vereinigen. Bei alledem bleibt $\sqrt[p]{v}$ immer rational nicht ausdrückbar durch die v_i und daher auch durch die u_i. Es ist endlich immer erlaubt $u_1 = 1$ anzunehmen, wobei man natürlich v durch eine andere Funktion w ersetzen muß, die denselben Bedingungen wie v unterworfen ist. Es sei in der Tat u_r eine von Null verschiedene unter den Funktionen $u_1, u_2, u_3, \ldots$ Man bemerke, daß diese Funktionen nicht alle null sein können. Sonst würde sich u auf u_0 reduzieren und hätte nicht, wie wir voraussetzen, den Grad ν. Setzt man $w = u_r{}^p v^r$, so können die Funktionen

$$\sqrt[p]{w}, \quad (\sqrt[p]{w})^2, \quad (\sqrt[p]{w})^3, \quad \ldots, \quad (\sqrt[p]{w})^{p-1}$$

sich nur um Faktoren, die den u_i analog sind, von

$$(\sqrt[p]{v})^r, \quad (\sqrt[p]{v})^{2r}, \quad (\sqrt[p]{v})^{3r}, \quad \ldots, \quad (\sqrt[p]{v})^{(p-1)r}$$

und daher von

$$\sqrt[p]{v},\ (\sqrt[p]{v})^2,\ (\sqrt[p]{v})^3,\ \ldots,\ (\sqrt[p]{v})^{p-1}$$

unterscheiden, wenn wir von der Reihenfolge absehen. Im besonderen hat man für einen passenden Wert von k, für welchen $kr = pq + 1$ ist,

$$(\sqrt[p]{w})^k = u_r^k v^q \sqrt[p]{v},$$

und es ist daher $\sqrt[p]{w}$ nicht rational ausdrückbar durch die alten oder die neuen Funktionen u_i, weil sonst dasselbe von $\sqrt[p]{v}$ gelten würde. Denken wir uns jetzt die Einführung von $\sqrt[p]{w}$ an Stelle von $\sqrt[p]{v}$ in dem Ausdruck (18) vorgenommen, so ist klar, daß sich ein Ausdruck von derselben Form ergibt, in welchem w anstatt v erscheint, aber $\sqrt[p]{w}$ als Koeffizienten die Einheit hat.

541. Hilfssatz II.[1]) Es sei p eine Primzahl, und $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{p-1}$ seien Funktionen, die einem bestimmten Rationalitätsbereich angehören. v gehöre demselben Rationalitätsbereich an, während ihm die p-ten Wurzeln von v nicht angehören mögen. Wenn dann die Gleichungen

$$v - x^p = 0, \quad v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + \cdots + v_{p-1} x^{p-1} = 0$$

zusammen bestehen, so hat man notwendig

$$v_0 = 0,\ v_1 = 0,\ \ldots,\ v_{p-1} = 0.$$

In der Tat, wenn $v_0, v_1, \ldots, v_{p-1}$ nicht alle null sind, so kann man den größten gemeinsamen Teiler der beiden betrachteten Polynome aufsuchen. r sei sein Grad, der offenbar zwischen 1 und $p-1$ einschließlich liegt. Die r Wurzeln der Gleichung

$$w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \cdots + x^r = 0,$$

die man durch Nullsetzen des gefundenen größten gemeinsamen Teilers erhält, sind auch Wurzeln von $v - x^p$. Wenn man also eine von ihnen mit x_0 bezeichnet, so werden die andern sein $\omega^\alpha x_0$, $\omega^\beta x_0$, $\omega^\gamma x_0, \ldots$, wobei ω eine imaginäre p-te Einheitswurzel bezeichnet. Setzt man σ für $\alpha + \beta + \gamma + \cdots$, so ist bekanntlich das Produkt der Wurzeln

$$\pm w_0 = \omega^\sigma x_0^r.$$

Nun bemerke man, daß p eine Primzahl und daher mit r teilerfremd ist, und daß demnach die Reste, welche sich bei Division von $p, 2p, \ldots, (r-1)p$ durch r ergeben, auf Grund eines bekannten arithmetischen Satzes abgesehen von der Reihenfolge $1, 2, 3, \ldots, r-1$ sind. Es gibt also immer ein Vielfaches von p, welches durch r

---

1) Er rührt von Abel her (Oeuvres complètes, t. II, p. 196).

dividiert den Rest 1 läßt. Es sei dies kp, sodaß man hat $kp = qr + 1$. Da nun $(\pm w_0)^q = \omega^{q\sigma} x_0^{kp-1}$ ist, so hat man

$$\omega^{-q\sigma} x_0 = (\pm w_0)^{-q} v^k.$$

Die linke Seite ist eine p-te Wurzel von v. Die rechte gehört dem gegebenen Rationalitätsbereich an, da ihm v^k angehört und auch w_0 ihm angehört, weil ja die Aufsuchung des größten gemeinsamen Teilers aus rationalen Operationen besteht. Es würde also eine Wurzel von $v - x^p$ dem Rationalitätsbereich angehören gegen die Voraussetzung. Man darf also nicht zulassen, daß die Koeffizienten der zweiten Gleichung nicht alle verschwinden.

542. **Hilfssatz III.** Die algebraischen Funktionen der Koeffizienten, welche den allgemeinen Ausdruck der Wurzel einer beliebigen algebraischen Gleichung bilden, die sich mit Hilfe von Wurzelzeichen auflösen läßt, sind rational ausdrückbar durch die Wurzeln dieser Gleichung.

Auf Grund des ersten Hilfssatzes kann man der expliciten algebraischen Funktion, die der allgemeinen Gleichung

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

genügt, immer die Form geben

$$x = u_0 + u_1 \sqrt[p]{v} + u_2 (\sqrt[p]{v})^2 + \cdots + u_{p-1} (\sqrt[p]{v})^{p-1}, \tag{20}$$

wo p, v und die u_i die mehrfach angegebene Bedeutung haben. Man setze diesen Ausdruck in die vorgelegte Gleichung ein und beachte, daß x^2, x^3, ... dieselbe Form wie x haben. Dann erhält man

$$v_0 + v_1 \sqrt[p]{v} + v_2 (\sqrt[p]{v})^2 + \cdots + v_{p-1} (\sqrt[p]{v})^{p-1} = 0, \tag{21}$$

wo v_0, v_1, v_2, ... rationale Funktionen von den u_i und von v darstellen. Da $\sqrt[p]{v}$ nicht rational ausdrückbar durch die u_i ist und daher auch nicht durch die v_i, so folgt aus dem zweiten Hilfssatz, daß $v_0 = 0$, $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, ... sein muß. Daraus geht hervor, daß die Gleichung (21) auch dann besteht, wenn man $\sqrt[p]{v}$ durch seine verschiedenen Werte ersetzt, und daß daher die betrachtete Gleichung von der Funktion (20) auch dann noch befriedigt wird, wenn man in derselben der Reihe nach $\omega \sqrt[p]{v}$, $\omega^2 \sqrt[p]{v}$, ... für $\sqrt[p]{v}$ setzt. Man erhält auf diese Weise die p Wurzeln

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1 = u_0 + u_1 \sqrt[p]{v} + u_2 (\sqrt[p]{v})^2 + \cdots + u_{p-1} (\sqrt[p]{v})^{p-1}, \\ \alpha_2 = u_0 + u_1 \omega \sqrt[p]{v} + u_2 \omega^2 (\sqrt[p]{v})^2 + \cdots + u_{p-1} \omega^{p-1} (\sqrt[p]{v})^{p-1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_p = u_0 + u_1 \omega^{p-1} \sqrt[p]{v} + u_2 \omega^{2p-2} (\sqrt[p]{v})^2 + \cdots + u_{p-1} \omega^{(p-1)^2} (\sqrt[p]{v})^{p-1}, \end{array}\right. \tag{22}$$

die sämtlich voneinander verschieden sind, wie man leicht durch die

Bemerkung erkennt, daß bei Annahme der Gleichheit zwischen zweien von ihnen $\sqrt[p]{v}$ einer Gleichung von der Form (21) mit nicht verschwindenden Koeffizienten genügen müßte. Dies vorausgeschickt liefert das System (22), wenn man sich daran erinnert, daß man u_1 immer gleich der Einheit annehmen darf, sofort den Wert von $\sqrt[p]{v}$ als Funktion der p Wurzeln:

$$\sqrt[p]{v} = \frac{1}{p}(\alpha_1 + \omega^{p-1}\alpha_2 + \omega^{p-2}\alpha_3 + \cdots + \omega\alpha_p).$$

Setzt man also die Einheitswurzeln als bekannt voraus, so ist $\sqrt[p]{v}$ eine rationale Funktion der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$. Dasselbe läßt sich von $u_0, u_2, u_3, \ldots$ sagen, da man aus dem System (22) gewinnt

$$u_r = p^{r-1}\frac{\alpha_1 + \omega^{p-r}\alpha_2 + \omega^{2p-2r}\alpha_3 + \cdots}{(\alpha_1 + \omega^{p-1}\alpha_2 + \omega^{p-2}\alpha_3 + \cdots)^r}.$$

Wenn wir also mit y irgend eine von den Funktionen bezeichnen, die in der Formel (20) auftreten, so können wir schreiben

$$y = f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n),$$

wobei f das Symbol einer rationalen Funktion ist, die auf alle oder auf einige Wurzeln der betrachteten Gleichung angewandt ist. Diese Funktion von n Veränderlichen sei fähig m Werte $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ anzunehmen, welche Wurzeln einer Gleichung m-ten Grades sind. Diese muß sich befriedigen lassen, indem man setzt

$$y = v_0 + v_1\sqrt[q]{w} + v_2(\sqrt[q]{w})^2 + \cdots + v_{q-1}(\sqrt[q]{w})^{q-1},$$

wo die v_i Funktionen darstellen, welche eine Ordnung gleich derjenigen von y haben können, aber sicher von niedrigerem Grade sind. Inzwischen bemerke man, daß die Koeffizienten der Gleichung in y ganze symmetrische Funktionen der β und daher rational in den Koeffizienten der ursprünglichen Gleichung sind. Daraus folgt, wenn man wie oben schließt, daß $\sqrt[q]{w}, v_0, v_1, v_2, \ldots$ rationale Funktionen der β und daher auch der α sind. $\sqrt[q]{w}$ und die v_i sind nun ihrerseits mit Hilfe der Formel (18) durch Funktionen niedrigeren Grades ausdrückbar, von denen man analog beweist, daß sie rational in den α sind. Fährt man in dieser Weise fort, so gelangt man schließlich zu rationalen Funktionen der Koeffizienten der ursprünglichen Gleichung, welche sicher rational und sogar symmetrisch in den Wurzeln dieser Gleichung sind.

543. Um sich von der Bedeutung des soeben bewiesenen äußerst wichtigen Satzes volle Rechenschaft zu geben, ist es nützlich zu untersuchen, was bei den Gleichungen passiert, die wir bereits durch Radikale aufzulösen wissen. Man beachte z. B., daß das in der Auflösungsformel der quadratischen Gleichung enthaltene Radikal die

Differenz der Wurzeln darstellt. Ebenso drücken sich die beiden übereinandergeschachtelten Radikale, die in der Formel von Tartaglia auftreten, rational durch die Wurzeln aus, und zwar folgendermaßen:

$$\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}=\frac{\sqrt{-3}}{18}(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_2),$$

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{6}(\alpha_2-\alpha_3).$$

In dem allgemeinen Falle wird diese Tatsache gerade durch die Methode von Lagrange in volles Licht gesetzt.

544. Theorem von Ruffini[1]. Es ist unmöglich die allgemeinen Gleichungen höheren als vierten Grades mit Hilfe von Wurzelzeichen aufzulösen.

Es sei in der Tat $\sqrt[p]{u}$ eins der Radikale erster Ordnung, die in dem allgemeinen Ausdruck der Wurzel auftreten. Dasselbe ist rational ausdrückbar durch die Wurzeln und muß erhoben zur p-ten Potenz die Funktion u liefern, die rational in den Koeffizienten und daher symmetrisch in den Wurzeln ist. Also ist (§ 478) die Funktion $\sqrt[p]{u}$, welche in den Wurzeln nicht symmetrisch ist, alternierend und man hat überdies $p=2$. Operiert man rational mit $\sqrt[p]{u}$ und rationalen Funktionen der Koeffizienten, so erhält man eine zweiwertige Funktion v, aus welcher man, wenn die Operationen nicht zu Ende sind, die q-te Wurzel ziehen muß, wobei q eine Primzahl ist. Nun ist aber die Funktion $\sqrt[q]{v}$, welche in den Koeffizienten irrational von zweiter Ordnung ist, nichtsdestoweniger rational in den Wurzeln. Erhoben zur q-ten Potenz muß sie eine zweiwertige Funktion liefern, wenn sie auch selbst mehr als zwei Werte hat. Dies ist nicht möglich (§ 479), wenn die Anzahl der Veränderlichen 4 übertrifft. Es ist also unmöglich bei der allgemeinen Gleichung vom Grade $n>4$ eine explicite algebraische Funktion zu konstruieren, welche der Gleichung genügt.

545. Bemerkungen. Das Theorem von Ruffini und die Betrachtungen, welche ihm vorangehen, liefern uns, abgesehen davon, daß sie uns der Mühe überheben die algebraische Auflösung der allgemeinen Gleichungen 5-ten, 6-ten, . . . Grades durch Radikale zu versuchen, die Hilfsmittel zur Auffindung der Formeln für die Auflösung der Gleichungen der vier ersten Grade. Vor allem haben wir gesehen, daß das erste Radikal, welches man bei der Aufsuchung der Wurzeln antrifft, wenn man die Rechnungen der Reihe nach ausführt, eine

1) „Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni alg. generali" (Modena, 1813).

Quadratwurzel ist, die man aus der Diskriminante zu ziehen hat. Das zweite Radikal ist kubisch. Wir wissen nämlich, daß für $n \leq 4$ rationale Funktionen existieren, die mehr als zweiwertig sind und erhoben zu einer Potenz q eine zweiwertige Funktion liefern. Es ist aber auch bekannt (§ 479), daß $q = 3$ sein muß. Wenn wir z. B. die allgemeine kubische Gleichung auflösen wollten, müßten wir setzen

$$x = \tfrac{1}{3} c_1 + \sqrt[3]{v} + u \sqrt[3]{v^2},$$

wo v notwendig die Form $\varphi + \psi \sqrt{\varDelta}$ hat, während φ und ψ in den Koeffizienten rational sind. Führt man diesen Wert in die vorgelegte Gleichung ein und beachtet den zweiten Hilfssatz, so erhält man die Relationen

$$v + u^3 v^2 = \tfrac{1}{27}(2 c_1^3 - 9 c_1 c_2 + 27 c_3), \quad u v = \tfrac{1}{9}(c_1^2 - 3 c_2),$$

aus denen sich, wenn man

$$27 \varDelta = 4 (c_1^2 - 3 c_2)^3 - (2 c_1^3 - 9 c_1 c_2 + 27 c_3)^2$$

setzt, die Werte von v und von $u^3 v^2$ ergeben:

$$\tfrac{1}{54}(2 c_1^3 - 9 c_1 c_2 + 27 c_3) \pm \tfrac{1}{18}\sqrt{-3 \varDelta}.$$

Man findet auf diese Weise die allgemeine Formel wieder, die wir früher auf anderm Wege erhalten haben.

Sechstes Buch.

Differentialrechnung.

Die Differentiation.

Funktionen einer Veränderlichen.

546. Unendlichkleines und Unendlichgroßes. Wie man die Benennung Unendlichgroß oder Unendlich für eine Zahl anwendet, die ihrem absoluten Betrage nach jede Grenze zu überschreiten strebt, so heißt jede veränderliche Zahl, welche den Grenzwert Null hat, ein Unendlichkleines oder eine Infinitesimale[1]. Der Begriff des Infinitesimalen impliciert also wie der des Unendlichen (vgl. § 254, b) vor allem die Voraussetzung der **Variabilität**. So ist z. B. infinitesimal das Volumen eines festen Körpers, welcher schmilzt. Dagegen ist es nicht erlaubt, das Volumen eines unveränderlichen Atoms im Weltall als infinitesimal zu bezeichnen. Und in der Tat, wenn man den Vergleich eines solchen Volumens mit dem des ganzen Weltalls, welches man als unendlich voraussetzt, versuchen würde, so wäre man gezwungen, die Maßeinheit als über alle Grenzen wachsend anzunehmen; und jedem Zustand dieser Einheit würde man dann eine Zahl entsprechen sehen, die immer kleiner wird und die als Maß für das betrachtete Volumen dient. Nicht dieses Volumen also, sondern vielmehr die Zahl, welche zu seiner Messung bestimmt ist, wäre veränderlich und infinitesimal. Das geht aber nicht, weil die einer Rechnung unterworfenen Zahlen immer so aufzufassen sind, daß sie sich

---

1) Cauchy, Analyse algébrique (Paris, 1821). Volle 40 Seiten des „Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie de Belgique" (1901, p. 549) sind der Bekämpfung dieser „ganz schlechten" Definition gewidmet. Die benutzten Argumente sind z. T. nur im stande, die tatsächliche Unzulänglichkeit gewisser Definitionen (Wahrscheinlichkeit u. s. w.) zu zeigen, welche zu ihrer Vervollständigung gerade verlangen, daß man jede schiefe Auffassung des Unendlichen und des Infinitesimalen abweist.

alle auf dieselbe Maßeinheit beziehen. Wie groß diese auch sein mag, das betrachtete Volumen wird immer durch eine Zahl gemessen werden, die vielleicht sehr klein, aber doch unveränderlich ist. Zum klaren Verständnis der Infinitesimalrechnung ist es unbedingt nötig, niemals außer acht zu lassen, daß die infinitesimalen Größen wie die unendlichen, wesentlich veränderlich sind, daß man sie also (wie Newton selbst lehrt) zu betrachten hat als „quantitates magnitudine determinatas, sed cogita semper diminuendas sine limite", abnehmend natürlich ihrem absoluten Betrage nach.

547. Zwei infinitesimale Größen heißen von derselben Ordnung, wenn ihr Verhältnis nach einem von Null verschiedenen Grenzwert konvergiert. Wenn dagegen das Verhältnis einer infinitesimalen Größe β zu einer andern α nach Null konvergiert (in welchem Falle β gleich dem Produkt von α mit einer infinitesimalen Größe ist), so sagt man, β sei von höherer Ordnung als α. Im entgegengesetzten Falle, wenn also das genannte Verhältnis seinem absoluten Betrage nach unbegrenzt wächst, ist β von niedrigerer Ordnung als α. Es ist nicht immer möglich zu entscheiden, ob zwei infinitesimale Größen von derselben Ordnung sind oder nicht, weil ihr Verhältnis nicht immer nach einem Grenzwert konvergiert. So ist $\beta = \alpha \sin \frac{1}{\alpha}$ gleichzeitig mit α infinitesimal, man kann aber nicht sagen, ob β ebenso wie α nach Null konvergiert oder rascher als α. Nichtsdestoweniger kann man, so oft das Verhältnis von β zu α, nach seinem absoluten Betrage genommen, zwischen zwei positiven Grenzen oszilliert, wohl sagen, daß β die Ordnung von α hat. Hat man mehrere infinitesimale Größen miteinander zu vergleichen, so pflegt man eine, α, beliebig zu wählen, welche man die Hauptinfinitesimale nennt, und die Verhältnisse der andern zu α und zu dessen Potenzen zu betrachten. Es heißen alsdann infinitesimal von der Ordnung n (> 0) alle diejenigen, welche die Ordnung von α^n haben. Z. B. sind $\log(1 + \alpha)$, $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ u. s. w. infinitesimal von erster Ordnung, solange α die Hauptinfinitesimale ist. Ebenso ist $1 - \cos\alpha$ von zweiter Ordnung, $\alpha - \sin\alpha$ von dritter, $\alpha \sin(\sin\alpha) - \sin^2\alpha$ von sechster, $\operatorname{tg}(\sin\alpha) - \sin(\operatorname{tg}\alpha)$ von siebenter u. s. w.[1]). Übrigens bemerke man, daß man nicht immer die Ordnung einer Infinitesimalen angeben kann. So sind z. B., wenn α eine Infinitesimale ist, auch $e^{-\frac{1}{\alpha^2}}$ und $1/\log\alpha$ infinitesimale Größen. Während aber (§ 312, a) das Verhältnis der ersten zu α^n nach Null konvergiert, was auch n sein mag, wird das entsprechende Verhältnis bei der andern Größe unendlich, sodaß man nicht sagen kann, wie groß die Ordnung der ersten und wie klein die Ordnung der

1) Siehe hierüber zwei Übungen in der „Mathesis", 1898, p. 31; 1902, p. 145.

zweiten ist. Die infinitesimalen Größen $\ldots$, $1/\log\log\frac{1}{\alpha^2}$, $1/\log\frac{1}{\alpha^2}$, $\ldots$, $\sqrt{\alpha}$, $\sin\alpha$, $1-\cos\alpha$, $\alpha-\sin\alpha$, $\cdots$, $e^{-\frac{1}{\alpha^2}}$, $e^{-e^{\frac{1}{\alpha^2}}}$, $\cdots$ befinden sich in einer solchen Reihenfolge, daß jede infinitesimal ist in bezug auf alle vorhergehenden. Wenn man also von rechts nach links geht, so konvergiert die Ordnung von beliebig großen Werten ausgehend unter beständigem Abnehmen nach Null. In analoger Weise werden die unendlichgroßen Zahlen klassifiziert.

548. Man glaube jedoch nicht, daß jede unendlichkleine oder unendlichgroße Zahl notwendig ihren Platz in solchen Vergleichsskalen finden müsse. So z. B. kann man nicht sagen, welches die Ordnung n von $\beta = \alpha/\log\alpha$ ist. In der Tat ist einerseits klar, daß n größer sein müßte als 1, und andererseits kann dies nicht der Fall sein, weil das Verhältnis von β zu α^n für beliebiges $n > 1$ dem absoluten Betrage nach unbegrenzt wächst. In einem gewissen Sinne (§ 169) könnte man sagen, daß in der Vergleichsskala, die aus den Potenzen von α besteht, die Infinitesimale $\alpha/\log\alpha$ rechts von α liegt und die Ordnung $1+0$ hat. Ebenso würde man vergeblich die Stelle suchen, die der Infinitesimalen β anzuweisen ist, welche mit α durch die Relation $\beta = \alpha^2\log\frac{\alpha}{\beta}$ verbunden ist. Setzt man in der Tat $\alpha = \beta t$, so erhält man $\alpha = 1/t\log t$, $\beta = 1/t^2\log t$ und erkennt, daß t ins Unendliche wachsen muß, damit α und β nach Null konvergieren. Bemerkt man daher, daß $\beta/\alpha^n = t^{n-2}(\log t)^{n-1}$ ist, so sieht man, daß dieses Verhältnis unbegrenzt wächst für $n \geqq 2$ und nach Null konvergiert für $n < 2$. Also liegt β sozusagen links von α^2, d. h. es konvergiert weniger rasch nach Null als α^2, aber rascher als jedes α^n für $n < 2$, und man könnte dies so ausdrücken, daß man sagt, β habe die Ordnung $2-0$. Wenn es überhaupt Zahlen n' und n'' gibt derart, daß

$$\lim\frac{\beta}{\alpha^{n'}} = 0, \quad \lim\frac{\beta}{\alpha^{n''}} = \pm\infty$$

ist, so kann man in diesen Gleichungen jede Zahl n' durch eine kleinere und jede Zahl n'' durch eine größere ersetzen, und es ist daher klar, daß die Zahlen n' eine Menge bilden, welche eine obere Grenze μ hat (§ 172), wie die Menge der Zahlen n'' eine untere Grenze $\lambda \geqq \mu$ hat. Haben nun λ und μ einen einzigen Wert n, so kann man wohl sagen, daß n die Ordnung von β ist, so oft n weder der einen noch der andern Menge angehört, obwohl der Grenzwert von β/α^n nicht existiert. Es kann aber auch vorkommen, daß n die größte unter den Zahlen n' oder die kleinste unter den Zahlen n'' ist. Alsdann ist die Ordnung von β sicherlich nicht n. Sie könnte aber im ersten Falle durch $n+0$, im zweiten durch $n-0$ dargestellt werden. Endlich kann es auch sein, daß nicht $\lambda = \mu$ ist, und dann fehlt jedes Mittel, die Ordnung von β durch eine Zahl zu messen. Es genüge hier ein Beispiel, nämlich das der Infinitesimalen

$$\beta = \alpha^{1 + \frac{1}{\alpha} - \left[\frac{1}{\alpha}\right]},$$

für welche man hat

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^n} = \begin{cases} 0 & \text{im Falle } n < 1, \\ \pm\infty & \text{im Falle } n > 2. \end{cases}$$

Man bemerke, daß β/α nicht nach Null konvergiert, da es unendlich oft den Wert 1 annimmt, wenn α die Folge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ durchläuft. Daraus folgt $\mu = 1$. Ebenso wächst β/α^2 nicht ins Unendliche, da es kleiner als e bleibt, wenn α die Folge

$$\frac{1}{2 - \frac{1}{\log 2}}, \quad \frac{1}{3 - \frac{1}{\log 3}}, \quad \frac{1}{4 - \frac{1}{\log 4}}, \quad \frac{1}{5 - \frac{1}{\log 5}}, \ldots$$

durchläuft. Also ist $\lambda = 2$. Für jeden andern Wert von n, der zwischen 1 und 2 liegt, kann das Verhältnis β/α^n beliebig große und beliebig kleine Werte annehmen, sodaß es nicht gelingt eine Zahl zu finden, die uns ein Maß für die Ordnung der infinitesimalen Größe β liefern könnte.

549. Fundamentalsatz. Sagt man, daß zwei infinitesimale Größen sich um eine Infinitesimale von höherer Ordnung unterscheiden, oder, daß ihr Verhältnis nach der Einheit konvergiert, so behauptet man damit zwei Tatsachen, die im wesentlichen äquivalent sind, da jede der Gleichungen

$$\lim \frac{\beta - \alpha}{\alpha} = 0, \quad \lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$$

eine Folge der andern ist. Dies vorausgeschickt ist es leicht, folgendes für die Differentialrechnung fundamentale Theorem zu beweisen: **Der Grenzwert des Verhältnisses von zwei infinitesimalen Größen bleibt ungeändert, wenn dieselben um Infinitesimalen von höherer Ordnung variieren.** Will man nämlich den Grenzwert von β/α berechnen und unterscheiden sich β' und α' von β und α bezüglich um Infinitesimalen von höherer Ordnung, so genügt es, den Grenzwert von β'/α' zu berechnen und zu bemerken, daß

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$$

ist.

550. Wir wollen jetzt annehmen, man habe eine Gleichung zwischen Infinitesimalen $\alpha = \beta$, von welcher man in der Weise Gebrauch machen soll, daß man beide Seiten durch eine passende Infinitesimale γ dividiert, um dann durch Grenzübergang die Gleichung

$a = b$ zwischen unveränderlichen Größen zu erhalten. Der Nutzen des bewiesenen Theorems besteht darin, daß die Gleichung $\alpha = \beta$, welche oft kompliziert und für die gewöhnlichen Regeln zur Berechnung der Grenzwerte unzugänglich ist, sich vereinfachen läßt, indem man auf beiden Seiten jeden Bestandteil unterdrückt, der sich als infinitesimal von höherer Ordnung erweist im Vergleich zu dem zurückbleibenden Teil. Man erhält auf diese Weise eine andere Gleichung zwischen Infinitesimalen $\alpha' = \beta'$, die im allgemeinen unexakt ist. Das ist aber ganz gleich in Anbetracht des Gebrauchs, den man von ihr zu machen hat; denn wenn man beide Seiten durch γ dividiert (oder, wenn man will, durch irgend eine andere Infinitesimale γ', die sich von γ um eine Infinitesimale von höherer Ordnung unterscheidet), so wird man schließlich durch Grenzübergang immer die exakte Gleichung $a = b$ finden. Hierin liegt aber wohlbemerkt nicht das Wesen der Differentialrechnung, welche vielmehr auf der systematischen Anwendung eines gewissen Symbols beruht, mit dessen Hilfe man dazu gelangt a priori sicher zu sein, daß die Gleichung $\alpha' = \beta'$ ebenfalls exakt ist. Man vernachlässigt dann also, wenn man Infinitesimalen α' und β' als Ersatz für α und β sucht, auf beiden Seiten, ohne dessen gewahr zu werden, gleiche infinitesimale Größen, und es gelingt auf diese Weise die Infinitesimalen $\alpha' = a\gamma'$, $\beta' = b\gamma'$ ohne weiteres in die Hand zu bekommen. Dann aber **hat man keinen Grenzübergang mehr nötig,** da die Gleichung $\alpha' = \beta'$ sich unmittelbar auf $a = b$ reduziert. Die Berechnung der Grenzwerte tritt also dank dem genannten Symbol zurück, um der Differentialrechnung Platz zu machen, die sich freilich auf den Begriff des Grenzwertes gründet.

551. Von dem zuletzt angedeuteten Gesichtspunkt aus kann man wohl sagen, daß die Differentialrechnung dem Genius Leibnizens verdankt wird. Wir finden übrigens heute diese Wissenschaft im ganzen in der von Leibniz gedachten Form aufgerichtet, mit denselben Benennungen und denselben Symbolen, die wir nicht so sehr einer glücklichen Wahl, als vielmehr dem Scharfsinn des Erfinders danken. Die Sorgfalt, welche dieser auf die Wahl der Bezeichnungen verwandte, ist aus der Tatsache[1]) zu entnehmen, daß er beim Vergleichen seiner Methode mit derjenigen von Newton und beim Behaupten ihrer Überlegenheit meinte, „die Bezeichnungsweise sei der in die Augen fallende Teil der Erfindungskunst“. Auch in letzter Zeit ist die Wichtigkeit der Bezeichnungen und der Nomenklatur hervorgehoben worden in den „Populär-wissenschaftlichen Vorlesungen“ von Ernst Mach, „der die Sprache und ein zweckmäßiges System von Symbolen und technischen Benennungen nicht nur als unerläßliche Hilfsmittel für das Zusammenwirken der Forscher und für die Anhäufung und Überliefe-

1) **Mansion:** „Résumé du Cours d'Analyse“ (p. 209).

rung der nach und nach erhaltenen Resultate von Generation zu Generation betrachtet, sondern auch und vor allem als einziges wirksames Mittel, um das menschliche Gedächtnis und die Intelligenz von jeder unnötigen Last und Mühe frei zu halten und so ihre immer wachsende Ausnutzung für die wichtigeren und wesentlicheren Funktionen zu ermöglichen. Wer sich mit mathematischen Studien beschäftigt, der findet sich oft von dem Eindruck beherrscht, daß die Symbole und die Formeln es gleichsam auf sich nehmen für ihn zu arbeiten oder um die berühmten Worte Eulers zu gebrauchen, daß sein Schreibstift an Scharfsinn seinen Kopf übertrifft. Wie seltsam es auch scheinen mag, sagt Mach, die große Macht der mathematischen Wissenschaften beruht hauptsächlich auf dem Umstande, daß es ihnen geglückt ist, dem Geiste jede unnötige Arbeit zu ersparen und die Ökonomie der intellektuellen Kräfte bis zum äußersten zu treiben. Und nach demselben Ideale streben nach ihm auch die Naturwissenschaften, besonders die höher entwickelten Zweige"[1]).

552. Das erste Differential. Aus der Definition (§ 281) der Derivierten einer Funktion y von x folgt $\delta y = y'\delta x + \varrho\delta x$ für jeden Wert von x, und zwar konvergiert ϱ nach Null, wenn man δx bei festgehaltenem x nach Null konvergieren läßt. Da nun die Differenz zwischen δy und $y'\delta x$ von einer höheren Ordnung als δx infinitesimal ist, so darf man, wenn es sich um Grenzwerte von Verhältnissen handelt, nach dem Fundamentalsatz δy durch $y'\delta x$ ersetzen. Wir werden uns sehr bald von dem großen Nutzen dieser Ersetzung überzeugen. Die Größe $y'\delta x$ werden wir nun unter der Voraussetzung, daß x die unabhängige Veränderliche ist, mit dy bezeichnen und sie das **Differential** von y nennen. Unter dem Differential einer Funktion versteht man also das Produkt der Derivierten der Funktion mit dem infinitesimalen Inkrement, welches der unabhängigen Veränderlichen willkürlich beigelegt ist. Aus dieser Definition ergeben sich sofort nachstehende Folgerungen:

a) Das Differential der unabhängigen Veränderlichen x ist nichts anderes als das willkürliche Inkrement δx, welches für jeden Wert von x als veränderlich und nach Null konvergierend vorausgesetzt wird. In der Tat, wenn $y = x$ ist, so hat man $y' = 1$, und die Definition des Differentials ($dy = y'\delta x$) gibt $dx = \delta x$.

b) Nunmehr wird die Definitionsgleichung $dy = y'dx$, und man entnimmt daraus

(1) $$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Mit dieser neuen Bezeichnung wendet man die Derivierte in der

---

1) Aus einer Rezension von G. Vailati (Rivista sperimentale di Freniatria, 1896).

Differentialrechnung an. Die Derivierten werden sich uns also als Verhältnisse und nicht mehr als Grenzwerte von Verhältnissen zwischen Infinitesimalen darbieten.

c) Allgemeiner stellt das Verhältnis der Differentiale zweier Funktionen die Derivierte der ersten in bezug auf die zweite dar, diese als unabhängige Veränderliche betrachtet. In der Tat (§ 284), wenn $y = f(u)$ ist, wo u eine Funktion der unabhängigen Veränderlichen x bedeutet, so hat man

$$dy = y'dx = f'(u)u'dx = f'(u)du, \quad f'(u) = \frac{dy}{du}.$$

553. Geometrische Deutung. Auf der durch die Gleichung $y = f(x)$ dargestellten Kurve betrachte man in der Nähe eines festen Punktes M mit der Abscisse x einen Punkt M', dessen Abscisse $x + \delta x$ sein möge. δx als infinitesimal vorauszusetzen bedeutet (§ 546), daß man sich M' längs der Kurve beweglich und nach M hinrückend denkt. Es seien H und Q die Punkte, in welchen die Ordinate von M' zwei durch M gezogene Geraden trifft, von denen die erste parallel zur x-Achse, die zweite tangential zur Kurve gezogen ist.

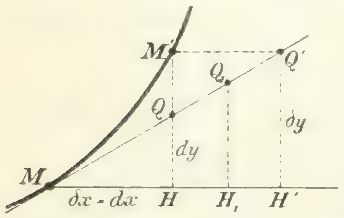

Fig. 27.

Wenn die unabhängige Veränderliche x ist, so hat man offenbar (§ 293)

$$MH = dx = \delta x, \quad HQ = dy, \quad HM' = \delta y.$$

dy an die Stelle von δy setzen heißt also QM' vernachlässigen oder M' durch Q ersetzen für alle Lagen des Punktes M' in der Umgebung von M, es heißt folglich, die Kurve in der Nähe jedes Punktes durch die Tangente ersetzen. Übrigens gehört, welches auch die unabhängige Veränderliche sein mag, der Punkt $(x + dx,\ y + dy)$ immer der Tangente an, wie $(x + \delta x,\ y + \delta y)$ immer der Kurve angehört. Für eine gegebene Lage M' des zweiten Punktes kann der erste in Q, in Q' oder in irgend eine andere Lage auf der Tangente fallen, je nachdem die unabhängige Veränderliche x, y oder eine andere ist.

554. Regeln für die Differentiation. Um zu differentiieren, d. h. um das Differential einer Funktion von x zu berechnen, genügt es auf Grund der Definition des Differentials die Derivierte der Funktion zu berechnen und sie mit dx zu multiplizieren. Auf diese Weise erhält man

$$d(x^n) = nx^{n-1}dx, \quad de^x = e^x dx, \quad d\sin x = \cos x dx, \quad d\cos x = -\sin x dx,$$

$$d\log x = \frac{dx}{x}, \quad d\operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x}, \quad d\operatorname{arc\,tg} x = \frac{dx}{1+x^2},$$

$$d \arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{u. s. w.},$$

auch wenn x nicht die unabhängige Veränderliche ist. Es lassen sich auch die bekannten Regeln für die Derivation leicht in ebensoviele Differentiationsregeln übersetzen. So differentiiert man z. B. die Summe von zwei oder mehr Funktionen, indem man die Differentiale der Summanden addiert. Das Produkt von zwei Funktionen wird differentiiert, indem man jede Funktion mit dem Differential der andern multipliziert und die Resultate addiert, u. s. w. In der Tat hat man

$$d(u+v) = (u+v)'dx = (u'+v')dx = u'dx + v'dx = du + dv,$$

$$duv = (uv)'dx = uv'dx + vu'dx = udv + vdu,$$

$$d\frac{u}{v} = \left(\frac{u}{v}\right)'dx = \frac{vu'-uv'}{v^2}dx = \frac{vu'dx - uv'dx}{v^2} = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

u. s. w.

555. Successive Differentiale. Bevor wir weitergehen ist es nötig, daß wir uns noch näher mit der Bedeutung des Differentials dx der unabhängigen Veränderlichen beschäftigen. Bei festgehaltenem x ist das zugehörige dx eine infinitesimale Größe, die wir uns provisorisch als abhängig von einer gewissen Infinitesimalen α denken wollen, welche als Hauptinfinitesimale angenommen wird. Wenn man von einem Werte x zu einem andern übergeht, so ist kein Grund vorhanden, warum nicht auch das (willkürliche) Gesetz, nach welchem dx von α abhängt, variieren soll. dx ist also eine Funktion sowohl von x als von α:

$$dx = \varphi(x, \alpha). \tag{2}$$

Denken wir uns die Achse der x als in sich deformierbar und nehmen wir an, daß jeder Punkt x in $x + dx$ übergeht, so drückt die Gleichung (2) das Gesetz aus, nach welchem bei nach Null konvergierendem α die Punkte der deformierten Achse wieder in ihre ursprünglichen Lagen zurückkehren. Der willkürlichen Funktion φ wird nur die Bedingung auferlegt, mit α nach Null zu konvergieren, was auch x sein mag, und die successiven partiellen Derivierten (§ 368) nach x zu besitzen. Unter diesen Bedingungen gestattet dx, insofern es eine Funktion von x ist, seinerseits ein Differential, welches man das zweite Differential von x nennt und mit d^2x bezeichnet:

$$d^2x = ddx = \varphi_x'(x, \alpha)dx = \varphi(x, \alpha) \cdot \varphi_x'(x, \alpha). \tag{3}$$

Wir wollen hier eine Vereinbarung machen, die für das Folgende von hervorragender Wichtigkeit ist. Wir wollen in erster Linie annehmen, daß sich in dem Ausdruck (2) die beiden Eigenschaften, welche dx haben muß, voneinander geschieden finden, nämlich das Konvergieren nach Null (gleichzeitig mit α) und die Abhängigkeit von x. Zu diesem Zwecke genügt es zu setzen

(4) $$dx = \alpha\chi(x),$$

indem man für den Augenblick $\chi(x)$ eine willkürliche Funktion sein läßt. Auf diese Weise wird dx das Produkt einer Infinitesimalen, die unabhängig von x ist, mit einer Funktion von x, die unabhängig von α ist. dx ist also eine Infinitesimale erster Ordnung, die wir von jetzt ab immer als Hauptinfinitesimale annehmen werden. Dagegen ist

$$d^2x = d\alpha\chi = \alpha d\chi = \alpha\chi' dx = \alpha^2\chi\chi'$$

eine Infinitesimale von zweiter Ordnung. Differentiiert man weiter, so findet man analog nacheinander das dritte Differential, das vierte u. s. f.:

$$d^3x = \alpha^3(\chi\chi'^2 + \chi\chi''), \quad d^4x = \alpha^4(\chi\chi'^3 + 4\chi^2\chi'\chi'' + \chi^3\chi'''), \cdots.$$

Das n-te Differential von x, d. h. das Resultat von n Differentiationen, die man successiv ausgeführt hat, wird mit d^nx bezeichnet und ist eine infinitesimale Größe n-ter Ordnung. Wie man sieht, werden die Resultate der successiven Differentiationen rasch kompliziert, und viele Vorzüge der Differentialrechnung würden verloren gehen, wenn man die Willkürlichkeit der Funktion $\chi(x)$ aufrecht erhalten wollte. Es ist vielmehr zweckmäßig $\chi(x) = 1$ zu setzen, da man bei dieser Annahme hat

(5) $$d^2x = 0, \quad d^3x = 0, \quad d^4x = 0, \ldots$$

und alle Rechnungen sich, wie sich bald zeigen wird, erheblich vereinfachen. Dies ist eine fundamentale Vereinbarung. Sie läßt sich so ausdrücken: **Das erste Differential der unabhängigen Veränderlichen wird als unabhängig von dieser Veränderlichen vorausgesetzt.** Nunmehr ist es leicht, die successiven Differentiale einer beliebigen Funktion zu berechnen und zu konstatieren, daß das n-te Differential immer eine Infinitesimale von n-ter Ordnung ist:

$$d^2y = ddy = d(y'dx) = dy' \cdot dx = y''dx \cdot dx = y''dx^2,$$

$$d^3y = dd^2y = d(y''dx^2) = dy'' \cdot dx^2 = y'''dx \cdot dx^2 = y'''dx^3$$

u. s. w. Allgemein ist $d^ny = y^{(n)}dx^n$, wenn wir übereinkommen, dx^n für $(dx)^n$ zu schreiben. Man gelangt auf diese Weise zu der Relation

(6) $$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n},$$

welche die Gleichung (1) einschließt (für $n = 1$). Also ist die n-te Derivierte einer Funktion nach der **unabhängigen** Veränderlichen gleich dem Quotienten des n-ten Differentials der

Funktion durch die n-te Potenz des Differentials der unabhängigen Veränderlichen. Während man aber (§ 552, c) für $n = 1$ die Einschränkung, daß die Veränderliche unabhängig sein soll, fallen lassen darf, geht dies für $n > 1$ nicht mehr, weil bei den successiven Differentiationen von dy die Bedingungen (5) benutzt worden sind, die nicht erfüllt sind, sobald x nicht mehr die unabhängige Veränderliche ist.

556. Jetzt sind wir im stande zu verstehen, was in § 550 nur angedeutet wurde. Die Gleichung zwischen Infinitesimalen $\alpha' = \beta'$ (die aus $\alpha = \beta$ durch Vernachlässigung infinitesimaler Größen von höherer Ordnung entsteht) ist sicherlich exakt, so oft in ihr keine andern Infinitesimalen als die aus Differentiationen hervorgehenden auftreten, vorausgesetzt, daß diese Gleichung (wir denken sie uns auf ganze Form gebracht) homogen gemacht ist, daß also in ihr nur die Glieder gelassen sind, welche infinitesimal von der Minimalordnung n sind. In der Tat müßte man jedenfalls, um eine exakte Gleichung zu finden, auf beiden Seiten durch dx^n dividieren und zur Grenze übergehen. Man beachte aber, daß dieser Grenzübergang überflüssig geworden ist, da die Verhältnisse zwischen Potenzen von Differentialen, wenn diese Potenzen infinitesimal von derselben Ordnung sind, gleich ihren eignen Grenzwerten sind, sodaß die zu findende exakte Gleichung gerade $\alpha'/dx^n = \beta'/dx^n$ oder $\alpha' = \beta'$ ist. Hierin liegt das ganze Geheimnis der Differentialrechnung. Überdies bietet uns die Homogeneität der definitiven Relationen zwischen Differentialen ein Mittel zur Kontrolle, welches in der Praxis des Kalküls nützlich ist. Man begreift jetzt, welche Wichtigkeit die Aufsuchung der differentiellen Infinitesimalen hat, die sich durch Unterdrückung von infinitesimalen Bestandteilen höherer Ordnung in den bei der Rechnung sich darbietenden Infinitesimalen ergeben. Für jedes α gibt es zahllose andere Infinitesimalen, welche sich von α um infinitesimale Größen einer höheren Ordnung unterscheiden; aber **eine einzige** unter ihnen ist das Differential einer Funktion u. In der Tat, wenn für eine andere Funktion v die Differenz $\alpha - dv$, wie $\alpha - du$, infinitesimal von einer höheren Ordnung werden könnte, so würde es genügen diese Infinitesimalen in

$$du = dv + (\alpha - dv) - (\alpha - du)$$

zu unterdrücken, um die Gleichung $du = dv$ zu finden, welche notwendig exakt ist. Diese beiden differentiellen Infinitesimalen fallen also in ihrem Werte zusammen; und es ist leicht zu sehen, daß sie auch dieselbe Bedeutung haben, weil man hat $d(u - v) = 0$ und daher $u - v = \text{const}$. Es unterscheidet sich also v nicht wesentlich von u. In der praktischen Rechnung sucht man immer α auf die Form der infinitesimalen Variation einer Funktion u zu bringen, und dann ist (§ 552) die einzige differentielle Infinitesimale, welche sich an die Stelle von α setzen läßt, gerade du. Auf diese Weise erreicht die Differentialrechnung mit Hilfe der Operation d eine vollkommene Präzision, insofern sie nur in einer einzigen Weise die Infinitesimalen, welche bei irgend einer Untersuchung auftreten, durch ebensoviele Infinitesimalen zu ersetzen gestattet, die alle durch Differentiation aus wohlbestimmten Funktionen hervorgehen. Sie sind durch dieselben Relationen verbunden, die zwischen den Infinitesimalen bestehen, deren Stelle sie in den Rechnungen einnehmen.

557. Wechsel der unabhängigen Veränderlichen. Die Formel (6) impliciert für $n > 1$ die Voraussetzung, daß die Veränderliche x unabhängig ist. Will man daher (was sich oft als nötig erweist) eine neue unabhängige Veränderliche einführen, so ist es vor allem nötig, jener Formel ihre volle Allgemeinheit wiederzugeben, und dann erst darf man zu dem Wechsel der Veränderlichen schreiten. Es genügt für unsern Zweck die successiven Derivationen von dy zu wiederholen, die in § 555 ausgeführt worden sind, dabei aber nicht die Formeln (5) zu benutzen. Auf solche Weise erhält man

$$d^2y = d(y'dx) = dy'dx + y'ddx = y''dx^2 + y'd^2x,$$

ferner

$$d^3y = y'''dx^3 + 3y''dxd^2x + y'd^3x,$$

$$d^4y = y^{IV}dx^4 + 6y'''dx^2d^2x + 3y''d^2x^2 + 4y''dxd^3x + y'd^4x$$

u. s. w. Aus der ersten Gleichung entnimmt man

$$(7) \qquad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} - y'\frac{d^2x}{dx^2} = \frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^3}.$$

Ebenso ist

$$(8) \qquad y''' = \frac{d^3y}{dx^3} - 3y''\frac{d^2x}{dx^2} - y'\frac{d^3x}{dx^3}$$

$$= \frac{dx^2d^3y - 3dxd^2xd^2y + 3dyd^2x^2 - dxdyd^3x}{dx^5}$$

u. s. w. Zu denselben Resultaten gelangt man rascher, indem man ein oder mehrere Male nacheinander die beiden Seiten von (1) differentiiert. Man findet in der Tat

$$y''dx = d\frac{dy}{dx} = \frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^2},$$

woraus sich (7) ergibt. Differentiiert man (7), so kommt

$$y'''dx = \frac{dx(dxd^3y - dyd^3x) - 3d^2x(dxd^2y - dyd^2x)}{dx^4},$$

woraus (8) hervorgeht, u. s. w. Es wird manchmal vorkommen, daß wir $\frac{d}{dx}$ als das Symbol der Derivation nach x betrachten. Demgemäß wird uns, wenn wir diese Operation noch einmal anwenden, $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}$ zur Darstellung der zweimaligen Derivation nach x dienen, welches auch die unabhängige Veränderliche sein mag, während $\frac{d^2}{dx^2}$ dieselbe Operation nur unter der Annahme darstellt, daß die unabhängige Veränderliche x ist. In der Tat hat man nach (7)

$$\frac{d}{dx}\frac{d}{dx} = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{d^2x}{dx^2}\frac{d}{dx}. \tag{9}$$

Ebenso ist nach (8)

$$\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\frac{d}{dx} = \frac{d^3}{dx^3} - 3\frac{d^2x}{dx^2}\frac{d^2}{dx^2} + \left(3\frac{d^2x^2}{dx^4} - \frac{d^3x}{dx^3}\right)\frac{d}{dx} \text{ u. s. w.}$$

558. Übungen. a) Wünscht man in einen Ausdruck, der die in bezug auf eine Veränderliche x genommenen Derivierten von y enthält, die auf eine andere Veränderliche t bezüglichen Derivierten hineinzubringen, so kann man aus den im vorigen Paragraphen gefundenen Formeln sofort die für y', y'', ... einzusetzenden Ausdrücke entnehmen, wenn x als Funktion von t gegeben ist und demnach die Derivierten dx/dt, d^2x/dt^2, ... bekannt sind. In der Tat hat man

$$\frac{dx}{dt}y' = \frac{dy}{dt}, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^3 y'' = \frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2},$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^5 y''' = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 - \frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}\frac{d^3x}{dt^3}$$

u. s. w. Wenn dagegen die neue Veränderliche t als Funktion von x gegeben ist und man will, daß sie die unabhängige sein soll, so hat man immer

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}t' \tag{10}$$

Ferner kann man, um y'' zu berechnen, von der Formel (7) Gebrauch machen, nachdem man bemerkt hat, daß wegen $d^2t = 0$ sein muß $t''dx^2 + t'd^2x = 0$ und daher

$$dx = \frac{dt}{t'}, \quad d^2x = -\frac{t''dt^2}{t'^3}. \tag{11}$$

Hiernach wird die Formel (7)

$$y'' = \frac{d^2y}{dt^2}t'^2 + \frac{dy}{dt}t''. \tag{12}$$

Man kann aber diese Relation leichter aufstellen, indem man die beiden Seiten von (10) nach x deriviert. Deriviert man analog die Formel (12), so gelangt man sofort zu dem Resultat

$$y''' = \frac{d^3y}{dt^3}t'^3 + 3\frac{d^2y}{dt^2}t't'' + \frac{dy}{dt}t'''.$$

Mit größerer Mühe leitet man dasselbe aus Formel (8) ab, nachdem man zu (11) die Formel

$$d^3x = \frac{3t''^2 - t't'''}{t'^5}dt^3 \tag{13}$$

hinzugefügt hat, welche man erhält, indem man $d^3 t = 0$ schreibt, oder indem man die zweite Formel (11) differentiiert, u. s. w.

b) Nehmen wir an, man wolle als unabhängige Veränderliche die Funktion y selbst annehmen, und es seien die Derivierten x', x'', ... von x in bezug auf y zu berechnen. Die Formeln (11), (13) u. s. w. liefern

$$x' = \frac{1}{y'}, \quad x'' = -\frac{y''}{y'^3}, \quad x''' = \frac{3y''^2 - y'y'''}{y'^5}, \ldots.$$

Diese Formeln lassen sich übrigens von der zweiten ab rascher erhalten, indem man die erste successiv deriviert. Man kann auch von den Formeln (7), (8) u. s. w. Gebrauch machen, indem man in dieselben die Voraussetzung der Unabhängigkeit von y mittels der Gleichungen $d^2 y = 0$, $d^3 y = 0$, ... einführt. Man gelangt so zu den Formeln

$$y' = \frac{1}{x'}, \quad y'' = -\frac{x''}{x'^3}, \quad y''' = \frac{3x''^2 - x'x'''}{x'^5}, \ldots,$$

welche sich von den vorigen nur durch die Vertauschung von x mit y unterscheiden. Es ist übrigens evident, daß diese Relationen in bezug auf die beiden Veränderlichen symmetrisch sein müssen, und in der Tat kann man ihnen die Form geben

$$x'y' = 1, \quad x''x'^{-\frac{3}{2}} + y''y'^{-\frac{3}{2}} = 0,$$

$$\frac{3x''^2 - 2x'x'''}{x'^3} + \frac{3y''^2 - 2y'y'''}{y'^3} = 0, \ldots$$

oder äquivalente Formen, welche sich auch direkt durch Derivation aus der ersten Gleichung $x'y' = 1$ ableiten lassen. Je nachdem man bei der Derivation x oder y als unabhängige Veränderliche denkt, erhält man die eine oder die andere der beiden Gleichungen

$$x'y'' + x''y'^2 = 0, \quad y'x'' + y''x'^2 = 0.$$

Multipliziert man die erste mit $x'^{\frac{1}{2}}$ oder die zweite mit $y'^{\frac{1}{2}}$, so findet man

$$x''y'^{\frac{3}{2}} + y''x'^{\frac{3}{2}} = 0.$$

Deriviert man dagegen die erste nach y oder die zweite nach x, so erhält man

$$x'''y'^2 + 3x''y'' + y'''x'^2 = 0$$

u. s. w.

c) Es ist leicht zu konstatieren, daß $dx d^2y - dy d^2x$ sich durch die ersten und zweiten Derivierten von x und von y in bezug auf eine beliebige Veränderliche t und durch das erste Differential von t ausdrücken läßt. Man kann daher, um die Berechnung jenes Ausdrucks in den verschiedenen speziellen Fällen zu erleichtern, immer t als unabhängige Veränderliche voraussetzen und a priori sicher sein, daß das Resultat auch dann noch gültig bleiben wird, wenn nicht t die unabhängige Veränderliche ist. In der Tat hat man

$$\begin{vmatrix} dx & d^2x \\ dy & d^2y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dt}dt & \frac{d^2x}{dt^2}dt^2 + \frac{dx}{dt}d^2t \\ \frac{dy}{dt}dt & \frac{d^2y}{dt^2}dt^2 + \frac{dy}{dt}d^2t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{dy}{dt} & \frac{d^2y}{dt^2} \end{vmatrix} dt^3$$

oder

$$dxd^2y - dyd^2x = \left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right)dt^3.$$

Diese Bemerkung ist allgemeiner auf jede Determinante n-ter Ordnung anwendbar, in welcher die ν-te Vertikalreihe aus den ν-ten Differentialen von n Funktionen besteht. Z. B. ist

$$\begin{vmatrix} dx & d^2x & d^3x \\ dy & d^2y & d^3y \\ dz & d^2z & d^3z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{d^3x}{dt^3} \\ \frac{dy}{dt} & \frac{d^2y}{dt^2} & \frac{d^3y}{dt^3} \\ \frac{dz}{dt} & \frac{d^2z}{dt^2} & \frac{d^3z}{dt^3} \end{vmatrix} dt^6.$$

Zu $dxd^2y - dyd^2x$ zurückkehrend wollen wir annehmen, daß x und y die rechtwinkligen cartesischen Koordinaten eines Punktes in der Ebene sind, und uns die Aufgabe stellen, den betrachteten Ausdruck auf Polarkoordinaten, r und θ, zu transformieren. Unter Benutzung der vorstehenden Bemerkung kann man, um die Rechnungen zu vereinfachen, θ als unabhängige Veränderliche annehmen, in welchem Falle man aus $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ erhält

$$dx = \cos\theta\cdot dr - r\sin\theta\cdot d\theta,\quad dy = \sin\theta\cdot dr + r\cos\theta\cdot d\theta,$$
$$d^2x = \cos\theta\cdot d^2r - 2\sin\theta\cdot drd\theta - r\cos\theta\cdot d\theta^2,$$
$$d^2y = \sin\theta\cdot d^2r + 2\cos\theta\cdot drd\theta - r\sin\theta\cdot d\theta^2.$$

Daraus ersieht man, daß

$$\begin{vmatrix} dx & d^2x \\ dy & d^2y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} dr & d^2r - rd\theta^2 \\ rd\theta & 2drd\theta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$$

ist und endlich

$$dxd^2y - dyd^2x = r^2d\theta^3 + 2d\theta dr^2 - rd\theta d^2r = (r^2 + 2r'^2 - rr'')d\theta^3.$$

Obwohl dieses Resultat unter der Annahme $d^2\theta = 0$ erhalten worden ist, ist es doch von der Voraussetzung völlig frei, daß θ die unabhängige Veränderliche sein sollte, vorausgesetzt, daß man unter r'' nicht $\frac{d^2r}{d\theta^2}$ sondern $\frac{d}{d\theta}\frac{dr}{d\theta}$, d. h. $\frac{d^2r}{d\theta^2} - r'\frac{d^2\theta}{d\theta^2}$, versteht.

d) Wir stellen uns die Aufgabe, den Ausdruck des Krümmungsradius (§ 348, e)

$$\varrho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

zu transformieren. Diese Formel setzt nicht notwendig voraus, daß die unabhängige Veränderliche x ist, vorausgesetzt, daß man nicht unterläßt y'' unter der allgemeinen Form (7) zu nehmen. Auf diese Weise findet man, wenn man auch die Formel (1) anwendet,

$$(15) \qquad \varrho = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx d^2y - dy d^2x}.$$

In Polarkoordinaten ist

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 &= (\cos\theta \cdot dr - r\sin\theta \cdot d\theta)^2 + (\sin\theta \cdot dr + r\cos\theta \cdot d\theta)^2 \\ &= dr^2 + r^2 d\theta^2 \end{aligned}$$

und daher, wenn man sich an (14) erinnert und Zähler und Nenner durch $d\theta^3$ dividiert,

$$\varrho = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}.$$

Dieser Formel läßt sich ferner eine einfachere Form geben, die in den Anwendungen von Nutzen ist. Man gelangt zu ihr, wenn man sich die Kurve durch eine Gleichung von der Form $r = 1/f(\theta)$ gegeben denkt und ϱ als Funktion von f, f', f'' auszudrücken sucht. Es ergibt sich sofort

$$\frac{r'}{r} = -\frac{f'}{f}, \quad r^2 + r'^2 = \frac{f^2 + f'^2}{f^4}, \quad r'^2 - rr'' = \frac{ff'' - f'^2}{f^4},$$

mithin

$$\varrho = \frac{(f^2 + f'^2)^{\frac{3}{2}}}{(f + f'')f^3}.$$

e) Zu andern bemerkenswerten Formen für ϱ gelangt man unter Anwendung der Veränderlichen s, welche der Relation $ds^2 = dx^2 + dy^2$ genügt und, wie wir im folgenden sehen werden, die von einem festen Punkte aus gerechnete Bogenlänge darstellt. Eliminiert man d^2y oder d^2x aus (15) mit Hilfe der Relation

$$ds d^2s = dx d^2x + dy d^2y,$$

so erhält man die Formeln

$$\varrho = -\frac{dy ds^2}{ds d^2x - dx d^2s}, \quad \varrho = \frac{dx ds^2}{ds d^2y - dy d^2s},$$

welche sich nach (9) auch in folgender Weise schreiben lassen:

$$\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds} = -\frac{1}{\varrho}\frac{dy}{ds}, \quad \frac{d}{ds}\frac{dy}{ds} = \frac{1}{\varrho}\frac{dx}{ds}.$$

Diese Formeln, welche uns im folgenden (§ 591) als evident erscheinen werden, sind besonders bei Fragen der Mechanik nützlich. Erhebt man sie ins Quadrat und summiert sie, so erhält man

$$\frac{1}{\varrho^2} = \left(\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d}{ds}\frac{dy}{ds}\right)^2$$

oder auf Grund der Relation (9)

$$\frac{1}{\varrho^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2s}{ds^2}\right)^2.$$

559. Bemerkungen. a) Die gewöhnliche Differentialrechnung beruht, wie wir in § 555 gesehen haben, ganz auf der Annahme (4) mit Hinzufügung der weiteren $\chi(x) = 1$. Die unendlich vielen Formen, welche die Differentialrechnung den unendlich vielen Funktionen $\chi(x)$ entsprechend annehmen könnte, reduzieren sich alle auf eine einzige; denn der Übergang von einer Funktion χ zu einer andern ist gleichbedeutend mit einem Wechsel der unabhängigen Veränderlichen in der gewöhnlichen Differentialrechnung. Um uns hiervon zu überzeugen, müssen wir vorausschicken, daß es (wie wir am Anfang des siebenten Buches sehen werden) wegen der notwendigen Stetigkeit der Funktion $\chi(x)$ immer eine Funktion t von x gibt, deren Derivierte gleich $1/\chi(x)$ ist. In derjenigen Differentialrechnung, welcher die Funktion $\chi(x)$ zu grunde liegt, sind die Differentiale von t

$$dt = t'dx = \frac{1}{\chi(x)} \cdot \alpha\chi(x) = \alpha, \quad d^2t = d^3t = \cdots = 0,$$

d. h. die Eigenschaften (5) sind von x auf t übertragen, und die gedachte Differentialrechnung unterscheidet sich nicht von der gewöhnlichen, wenn t als unabhängige Veränderliche zu grunde gelegt wird. Es ist also durchaus natürlich, gleich zu Anfang der unabhängigen Veränderlichen die Eigenschaft zuzuschreiben, daß ihr Differential konstant ist. Gegen diese Vereinbarung erhebt sich, ohne sich freilich ihren Sinn klar zu machen, schon seit lange die Schar der Metaphysiker. Manche glauben, man habe sich bei einem konstanten dx zu denken, daß für dx ein ganz kleiner Wert festgesetzt wird; andere, daß man von x sprungweise zu $x + dx$, $x + 2dx$, $x + 3dx$, ... übergeht; andere nur, daß dx von einer Differentiation zu der folgenden ungeändert bleibt; andere endlich geben sich den Anschein[1]), als acceptierten sie diese absurden, plumpen und albernen Interpretationen alle zusammen. Demgegenüber ist zu betonen, daß die Behauptung, dx sei konstant, nichts weiter bedeutet als folgendes: **dx hängt nicht von x ab.** Läßt man also dx nach Null konvergieren, so kann man sich dies so denken, daß die als starr vorausgesetzte x-Achse, nachdem sie in sich verschoben worden ist, wieder ihre alte Lage anzunehmen strebt.

b) Es ist jedoch die Möglichkeit einer Differentialrechnung nicht auszuschließen, in welcher keiner Veränderlichen ein konstantes Differential zukommt. Damit dies für eine Funktion t der Fall ist, muß notwendig $t''dx^2 + t'd^2x = 0$ sein und daher, wenn man (3) durch (2) dividiert, das Verhältnis

$$\frac{d^2x}{dx^2} = \frac{d}{dx}\log\varphi(x, \alpha)$$

einzig und allein von x abhängen. Daraus folgt $\varphi(x, \alpha) = \chi(x)\psi(\alpha)$,

1) „Nuove considerazioni sulla metafisica del Calcolo infinitesimale" (Memorie della R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna, 1895, p. 309).

wo $\psi(\alpha)$, welches mit α infinitesimal ist, immer mit α bezeichnet werden darf, sodaß man auf (4) zurückgeführt wird. Wenn man auf diese Voraussetzung (die für den Leibnizschen Kalkül charakteristisch ist) verzichtet, so bleiben die Rechnungen des § 557 der Form nach bestehen. Es vollziehen sich aber tiefgreifende Änderungen in dem Verhalten der verschiedenen Differentiale. So hat z. B. für $dx = \alpha e^{\alpha x}$ das n-te Differential von x, anstatt von n-ter Ordnung infinitesimal zu sein, die Ordnung $2n-1$, und nur im allgemeinen ist $d^n y$ von der Ordnung n, da man statt (6) für $n > 1$ hat

$$y^{(n)} = \lim \frac{d^n y}{dx^n},$$

ohne das Symbol lim beseitigen zu können. Ebenso ist für $dx = \alpha e^{-\frac{x}{\alpha}}$, wenn man übereinkommt, daß die Infinitesimale α das Zeichen von x bewahrt, jedes n-te Differential quasi (§ 548) von n-ter Ordnung in Bezug auf dx; es besteht aber nicht mehr die Gleichung (6), da das Verhältnis $d^n y / dx^n$ dem absoluten Betrage nach unendlich groß ist, und man hat dagegen

$$y' = \lim \frac{d^n y}{d^n x},$$

was auch n sein mag. Eine solche Differentialrechnung könnte vielleicht ihre Vorteile haben. Es ist aber sicher, daß ihr diejenigen fehlen würden, welche die gebräuchliche Differentialrechnung in der Einfachheit und der Homogeneität ihrer Formeln, sowie in der genauen Schätzung der Ordnung der Infinitesimalen erreicht. Vor allem aber fehlt eins, worin man (nach dem in § 556 Gesagten) den wahren Existenzgrund der Differentialrechnung erblicken kann. Es würden nämlich die Verhältnisse zwischen solchen Potenzen von Differentialen, die infinitesimal von derselben Ordnung sind, nicht mehr gleich ihren eignen Grenzwerten sein, und man würde daher in dem neuen Kalkül nicht den Kalkül der Grenzwerte sozusagen absorbiert finden.

Funktionen von mehreren Veränderlichen.

560. Partielle Differentiation. In der Funktion $f(x, y, z, \ldots)$ erteile man den Veränderlichen, die als unabhängig vorausgesetzt werden, willkürliche Inkremente $\delta x, \delta y, \ldots$. Betrachtet als Funktion (vgl. § 367) von x allein oder von y allein u. s. w. läßt die genannte Funktion die Differentiale

$$d_x f = f_x' \cdot \delta x, \quad d_y f = f_y' \cdot \delta y, \quad d_z f = f_z' \cdot \delta z, \ \ldots$$

zu, welche partielle Differentiale heißen. Ihre Summe ist das totale Differential und wird mit df bezeichnet. Wir beginnen mit der Bemerkung, daß die totalen Differentiale der unabhängigen Veränderlichen die willkürlichen Inkremente δx, δy, δz, ... selbst sind. Setzt man in der Tat $f = x$, so wird $f_x' = 1$, $f_y' = 0$, $f_z' = 0$, ..., folglich $dx = \delta x$; u. s. w. Hiernach werden die Definitionsgleichungen der partiellen Differentiale:

$$f_x' = \frac{d_x f}{dx}, \quad f_y' = \frac{d_y f}{dy}, \quad f_z' = \frac{d_z f}{dz}, \ldots .$$

Jede partielle Derivierte ist auf diese Weise dargestellt als Quotient von zwei Infinitesimalen. Wegen der Einfachheit der Schreibweise ist es zweckmäßig in den Zählern die Indices $x, y, z, \ldots$ zu unterdrücken. Man darf dabei keinerlei Konfusion befürchten, denn jedes df bezieht sich als partielles Differential auf die im Nenner stehende Veränderliche. Da indessen immer noch eine Verwechselung jener Differentiale mit ihrer Summe df möglich wäre, so pflegt man bei den partiellen Differentiationen das Zeichen ∂ anstatt d anzuwenden und zu schreiben

$$f_x' = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_y' = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad f_z' = \frac{\partial f}{\partial z}, \ldots .$$

In dieser Form werden von jetzt ab die partiellen Derivierten in unsern Rechnungen auftreten.

561. Totale Differentiation. Nach seiner Definition ist das totale Differential

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \cdots, \tag{16}$$

wenn die unabhängigen Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ sind. Es ist aber von Wichtigkeit zu bemerken, daß die Relation (16) auch dann besteht, wenn die Veränderlichen nicht unabhängig sind. Man betrachte in der Tat die Funktion $f(u, v, w, \ldots)$, in welcher $u, v, w, \ldots$ Funktionen von beliebig vielen andern Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ sind, die voneinander unabhängig sein sollen. Es ist klar, daß man die partiellen Derivierten von f nach $u, v, w, \ldots$ immer mit

$$f_u' = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad f_v' = \frac{\partial f}{\partial v}, \quad f_w' = \frac{\partial f}{\partial w}, \ldots$$

bezeichnen kann, da bei ihrer Berechnung u, v, w als unabhängige Veränderliche zu betrachten sind. Aber nichts berechtigt uns zu behaupten, daß das durch (16) definierte totale Differential auch durch

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv + \frac{\partial f}{\partial w} dw + \cdots \tag{17}$$

ausgedrückt wird. Wenn man die Funktion f unter der Voraussetzung deriviert, daß nur x oder y variiert u. s. w., so hat man bei Anwendung der Regel für die Derivation der zusammengesetzten Funktionen (§ 369) offenbar

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} + \cdots,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} + \cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Setzt man diese Ausdrücke in (16) ein und beachtet, daß

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \cdots,$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz + \cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

st, so erhält man genau die Formel (17), die als fundamental für den Differentiationskalkül zu betrachten ist. Die große Tragweite der totalen Differentiation beruht gerade auf dem Umstand, daß es, um sie anzuwenden, garnicht nötig ist zu wissen, welches die unabhängigen Veränderlichen sind, noch auch, wie groß ihre Anzahl ist. Wenn im besonderen $y, z, \ldots$ Funktionen von x wären, so würde die Funktion $f(x, y, z, \ldots)$ eine Funktion von x sein, deren Derivierte man erhielte, indem man (16) durch dx deriviert:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx} + \cdots.$$

Diese Bemerkung ist geeignet die Notwendigkeit klarzulegen, die für die Anwendung des Zeichens ∂ anstatt d besteht; denn $\frac{df}{dx}$ ist im allgemeinen nicht gleich $\frac{\partial f}{\partial x}$.

562. Geometrische Interpretation. Um das totale Differential geometrisch zu deuten, wenigstens im Falle von zwei unabhängigen Veränderlichen, betrachte man die durch die Gleichung $z = f(x, y)$ definierte Funktion. Diese Gleichung stellt in cartesischen Koordinaten eine Fläche im Raume dar. Ein Bogen MM' dieser Fläche gehe, wenn man ihn parallel zur z-Achse auf die Tangentialebene der Fläche im Punkte M projiziert, in MQ über. Man vervollständige die Konstruktion des Parallelepipedons, dessen Basis in der (xy)-Ebene das über den Seiten dx und dy (willkürlichen Inkrementen der Koordinaten von M) konstruierte Parallelogramm $PA'P'B'$ ist, während die gegenüberliegende Seitenfläche in der Tangentialebene sich befindet. Da diese Seitenfläche ein Parallelogramm $MAQB$ ist, so fällt der Mittelpunkt von MQ mit dem Mittelpunkt von AB zusammen, und man hat daher $MP + QP' = AA' + BB'$. Andererseits ist, wenn man sich an das in § 553 Gesagte erinnert,

$$MP = z, \quad AA' = z + \frac{\partial z}{\partial x} dx, \quad BB' = z + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Also hat man $QP' = z + \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = z + dz$. Mit anderen Worten, dz stellt das Inkrement HQ der Ordinate der Tangentialebene dar, wie δz das analoge Inkrement HM' für die Fläche darstellt. Ersetzt man daher δz durch dz, so kommt dies darauf hinaus, in der Umgebung jedes Punktes die Fläche durch ihre Tangentialebene in jenem Punkte zu ersetzen.

563. Successive Differentiationen. Wenn man in $f(x, y, z, \ldots)$ nur x als veränderlich annimmt, so sind die Betrachtungen, die wir über die successiven Derivierten der Funktionen einer einzigen unabhängigen Veränderlichen angestellt haben, anwendbar, und wir können daher den successiven partiellen Derivierten von f nach x die Form geben

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}, \quad \ldots,$$

falls wir übereinkommen die willkürlichen Inkremente $dx, dy, dz, \ldots$ nicht von $x, y, z, \ldots$ abhängen zu lassen. Wir haben gesehen (§ 368), daß unter gewissen Bedingungen, die bei den gewöhnlichen Rechnungen im allgemeinen erfüllt sind, das Resultat von n partiellen Derivationen, die nacheinander ausgeführt werden und bei denen i-mal nur x, j-mal nur y u. s. w. als veränderlich vorausgesetzt wird $(i + j + \cdots = n)$, unabhängig ist von der Reihenfolge der Derivationen. Man kann also annehmen, daß zunächst die i Derivationen nach x ausgeführt werden, dann die j Derivationen nach y u. s. w. Das Resultat der n Derivationen kommt man überein in folgender Weise zu bezeichnen:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k \ldots}.$$

Z. B. sind die partiellen Derivierten von z, einer Funktion der Veränderlichen x und y,

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}, \quad \ldots.$$

Die ersten fünf, die man in der Flächentheorie häufig braucht, pflegt man kurz mit p, q, r, s, t zu bezeichnen. Wir wollen nun zu den Differentiationen übergehend die Gleichung (16) vornehmen und sie differentiieren, indem wir $dx, dy, dz, \ldots$ als unabhängig von $x, y, z, \ldots$ voraussetzen. Dann ergibt sich

$$d^2 f = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \cdots\right) \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \cdots\right) \cdot dy +$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + \cdots + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx\, dy + \cdots.$$

Da man unabhängig von der Funktion, welche der Operation d unterworfen wird, diese Operation darstellen kann, indem man schreibt

$$d = \frac{\partial}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial}{\partial z} \cdot dz + \cdots,$$

so sieht man, daß

$$d^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cdot dx^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \cdot dy^2 + \cdots + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \cdot dx dy + \cdots$$

ist oder symbolisch

$$d^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial}{\partial z} \cdot dz + \cdots\right)^2.$$

Differentiiert man noch einmal und fährt immer in derselben Weise fort, so gelangt man offenbar zu der symbolischen Relation

$$d^n = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial}{\partial z} \cdot dz + \cdots\right)^n,$$

welche im Falle $n > 1$ voraussetzt, daß $x, y, z, \ldots$ die unabhängigen Veränderlichen sind. Hat man dagegen z. B. $z = f(x, y)$, während x und y Funktionen von andern unabhängigen Veränderlichen sind, so erhält man durch successive Differentiationen

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy, \quad d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \cdot dy\right)^2 f + \frac{\partial f}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial f}{\partial y} d^2 y,$$

$$d^3 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \cdot dy\right)^3 f + 3\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx\, d^2 x + 3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dy\, d^2 x$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial x} d^3 x + \frac{\partial f}{\partial y} d^3 y + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy\, d^2 y + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dx\, d^2 y,$$

. . . .

564. Formel von Taylor. Die Benutzung des Differentialsymbols ermöglicht es, die Taylorsche Formel (§ 330) auf eine Gestalt von bemerkenswerter Einfachheit zu bringen, die in gleicher Weise für Funktionen von einer und solche von mehreren Veränderlichen gilt:

$$(18) \qquad \delta f = df + \tfrac{1}{2} d^2 f + \tfrac{1}{6} d^3 f + \tfrac{1}{24} d^4 f + \cdots.$$

Wir wollen uns zwecks größerer Klarheit auf den Fall einer einzigen Veränderlichen beschränken und bemerken, daß die genannte Formel sich in folgender Weise schreiben läßt:

$$(19) \qquad \delta f(x) = f'(x)\delta x + \tfrac{1}{2} f''(x)\delta x^2 + \tfrac{1}{6} f'''(x)\delta^3 x + \cdots.$$

Wenn x die unabhängige Veränderliche ist, so hat man $\delta x = dx$, $f^{(n)}(x)\delta x^n = d^n f(x)$ und findet auf diese Weise die Formel (18). Da ferner die Bedeutung jedes Gliedes dieser Formel nicht an eine spezielle Wahl der Veränderlichen gebunden ist, so gilt dieselbe offenbar, welches auch die unabhängige Veränderliche sein mag. Diese Bemerkung ist notwendig, weil man ja nicht behaupten kann, daß das n-te Glied auf der rechten Seite von (19) $\frac{1}{n!}d^n f$ ist. Man müßte vielmehr

$$\delta x = dx + \tfrac{1}{2}d^2x + \tfrac{1}{6}d^3x + \tfrac{1}{24}d^4x + \cdots$$

der Reihe nach zur zweiten, dritten, ... Potenz erheben und schreiben

$$\delta f = (dx + \tfrac{1}{2}d^2x + \tfrac{1}{6}d^3x + \cdots)f' + \tfrac{1}{2}(dx^2 + dx\,d^2x + \cdots)f'' + \cdots.$$

Man käme dann wieder zu (18) zurück, wenn man die Glieder sammelt, die von gleicher Ordnung infinitesimal sind:

$$f'dx = df, \quad \tfrac{1}{2}(f'd^2x + f''dx^2) = \tfrac{1}{2}d^2f,$$
$$\tfrac{1}{6}(f'd^3x + 3f''dx\,d^2x + f'''dx^3) = \tfrac{1}{6}d^3f, \quad \ldots$$

565. Wechsel der Veränderlichen. Will man die partiellen Derivierten der Funktion $f(x, y, z, \ldots)$ ausdrücken unter der Voraussetzung, daß andere Veränderliche $u, v, w, \ldots$ in gleicher Anzahl angenommen werden, so hat man sofort, wenn man zuerst nur u, dann nur v variieren läßt u. s. w.,

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial f}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial u} + \cdots \\[2ex]
\dfrac{\partial f}{\partial v} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial v} + \cdots \\[2ex]
\dfrac{\partial f}{\partial w} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial w} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial w} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial w} + \cdots \\[2ex]
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{array}\right.$$

Dieses System linearer Gleichungen liefert die Werte von $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \ldots,$ vorausgesetzt, daß die Determinante

$$\mathfrak{J} = \left|\begin{array}{cccc}
\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} & \cdots \\[2ex]
\dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \cdots \\[2ex]
\dfrac{\partial x}{\partial w} & \dfrac{\partial y}{\partial w} & \dfrac{\partial z}{\partial w} & \cdots \\[2ex]
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}\right|,$$

die man die Funktionaldeterminante oder die Jacobische Determinante der Funktionen $x, y, z, \ldots$ in Bezug auf $u, v, w, \ldots$ nennt, nicht verschwindet[1]). Man schreibt diese Determinante in folgender Weise:

$$\mathfrak{J} = \frac{\partial(x, y, z, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)}.$$

---

1) Wir werden bald sehen, daß diese Bedingung erfüllt ist, wenn $x, y, z, \ldots$ voneinander unabhängig sind.

Löst man nunmehr das betrachtete System auf, so ergibt sich

$$(20)\qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\mathfrak{J}} \cdot \frac{\partial (f,\, y,\, z,\, \ldots)}{\partial (u,\, v,\, w,\, \ldots)}$$

und ebenso

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\mathfrak{J}} \frac{\partial (x,\, f,\, z,\, \ldots)}{\partial (u,\, v,\, w,\, \ldots)}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{\mathfrak{J}} \frac{\partial (x,\, y,\, f,\, \ldots)}{\partial (u,\, v,\, w,\, \ldots)}, \quad \ldots .$$

Um dann die weiteren Derivierten zu berechnen, braucht man nur in analoger Weise mit den bereits erhaltenen zu verfahren.

566. Zu dem vorstehenden Problem wird man geführt, wenn eine Gleichung oder irgend ein Ausdruck gegeben ist, der die Derivierten von f nach $x, y, z, \ldots$ enthält, und man will ihn derart transformieren, daß die Derivierten nach gewissen neuen Veränderlichen darin auftreten. Man muß alsdann $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \ldots$ durch $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \ldots$ ausdrücken; und wenn $x, y, z, \ldots$ als Funktionen von $u, v, w, \ldots$ gegeben sind, so ist das angegebene Verfahren im allgemeinen jedem andern vorzuziehen. Es kommt manchmal vor, daß umgekehrt $u, v, w, \ldots$ als Funktionen von $x, y, z, \ldots$ gegeben sind. Dann kann man unmittelbar schreiben

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} + \cdots .$$

In analoger Weise würde man $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \ldots$ erhalten. Wie diese Formeln sich auf die des vorigen Paragraphen reduzieren lassen, kann man leicht sehen, indem man $f = x, y, z, \ldots$ annimmt, vorausgesetzt, daß man die (im nächsten Kapitel zu prüfende) Möglichkeit zuläßt, auch $x, y, z, \ldots$ als Funktionen von $u, v, w, \ldots$ zu betrachten, welche erste Derivierte besitzen,

$$\left\{\begin{array}{l}
1 = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} + \cdots \\[2ex]
0 = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} + \cdots \\[2ex]
0 = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} + \cdots \\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.$$

Aus diesen Gleichungen ist zu entnehmen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\mathfrak{J}} \frac{\partial (y, z, \ldots)}{\partial (v, w, \ldots)}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\mathfrak{J}} \frac{\partial (y, z, \ldots)}{\partial (u, w, \ldots)}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{\mathfrak{J}} \frac{\partial (y, z, \ldots)}{\partial (u, v, \ldots)}, \quad \ldots$$

Setzt man diese Ausdrücke in (21) ein, so findet man die Formel (20) wieder, in welcher übrigens auch die letzten Formeln enthalten sind, wie man sofort erkennt, wenn man der Reihe nach $f = u, v, w, \ldots$ annimmt.

567. Es bietet sich noch ein andrer Weg, um zu der Formel (20) zu gelangen. Wir wollen ihn hier angeben nur um in Evidenz zu setzen, daß eine partielle Derivierte nichts anderes als ein Quotient ist, nämlich der Quotient von zwei partiellen Differentialen. So kann man z. B. $\frac{\partial f}{\partial x}$ erhalten, indem man die Differentiale

$$df = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv + \cdots, \quad dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv + \cdots$$

durcheinander dividiert, nachdem man sie zu partiellen Differentialen gemacht hat durch die Annahmen $dy = 0$, $dz = 0$, ... Man hat also

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial u}\right)du + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\right)dv + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial w}\right)dw + \cdots = 0,$$

vorausgesetzt, daß zwischen du, dv, dw, ... die Relationen

$$\begin{gathered}\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv + \frac{\partial y}{\partial w}dw + \cdots = 0,\\ \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv + \frac{\partial z}{\partial w}dw + \cdots = 0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\end{gathered}$$

bestehen. Durch Elimination von du, dv, dw, ... ergibt sich

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} & \cdots \\ \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} & \cdots \\ \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0,$$

woraus man den Ausdruck (20) für $\frac{\partial f}{\partial x}$ findet.

568. Derivierte in einer gegebenen Richtung. Um einen bestimmten Fall vor uns zu haben, wollen wir annehmen, man habe eine Funktion $f(x, y, z)$ von drei unabhängigen Veränderlichen, d. h. eine Größe, von der die Werte in jedem Punkte des Raumes gegeben sind. Die natürlichste Art den Begriff der Derivierten auszudehnen, wenn man von den Funktionen einer einzigen Veränderlichen zu denen von mehreren Veränderlichen übergeht, ist folgende. Man betrachtet das Inkrement, welches die Funktion beim Übergange von einem Punkte M zu einem andern M' erfährt, und sucht den Grenzwert des Verhältnisses dieses Inkrements zu der Größe h der Strecke MM' unter der Voraussetzung, daß bei festgehaltenem M der Punkt M' nach M hinrückt, und dabei soll die Richtung MM' eine gegebene, durch die Kosinus α, β, γ ihrer Winkel mit den Achsenrichtungen definierte sein. Dieser Grenzwert heißt die Derivierte der Funktion in der betrachteten Richtung. Es gibt also in jedem Punkte M unendlich viele Derivierte; aber sie hängen miteinander in einer einfachen und merkwürdigen Weise zusammen. Die Derivierte in der Richtung (α, β, γ) ist nämlich

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+\alpha h, y+\beta h, z+\gamma h) - f(x,y,z)}{h}$$

$$= \lim_{h=0} [\alpha f_x'(x+\theta\alpha h, \ldots) + \beta f_y'(x+\theta\alpha h, \ldots) + \cdots] = \alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\frac{\partial f}{\partial y} + \gamma\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Dabei sind die als stetig vorausgesetzten ersten partiellen Derivierten von f für den Punkt M berechnet. Man denke sich nun eine infinitesimale Strecke $d\sigma$, die mit einem Endpunkt in M auf die in der Richtung (α, β, γ) von M ausgehende Gerade gesetzt ist. Die Derivierte in der genannten Richtung pflegt man dann mit $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$ zu bezeichnen, sodaß

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\frac{\partial f}{\partial y} + \gamma\frac{\partial f}{\partial z}$$

ist. Wir wollen eine Richtung fixieren, deren Richtungskosinus $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ proportional zu den ersten partiellen Derivierten von f sind, sodaß man hat

$$\frac{\alpha_0}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\beta_0}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\gamma_0}{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{1}{\sqrt{\Delta f}}, \quad \text{wo } \Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2$$

ist. Bezeichnet θ den Winkel der Richtung (α, β, γ) mit $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, so hat man

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = (\alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 + \gamma\gamma_0)\sqrt{\Delta f} = \cos\theta \cdot \sqrt{\Delta f}.$$

Tragen wir also in der Richtung $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ eine Strecke gleich $\sqrt{\Delta f}$ auf, so mißt die Projektion dieser Strecke auf jede andere Richtung die Derivierte der Funktion in dieser Richtung. Daraus folgt insbesondere, daß die Richtung $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ diejenige ist, in welcher die Funktion am raschesten variiert. In den unendlich vielen senkrecht auf ihr stehenden Richtungen hat dagegen die Funktion die Tendenz konstant zu bleiben.

569. Differentialparameter. Man nennt so diejenigen aus den partiellen Derivierten einer Funktion gebildeten Ausdrücke, welche mit Invariantencharakter begabt sind, d. h. eine von der Wahl der Achsen unabhängige Bedeutung haben. Man begreift, daß derartige Ausdrücke eine große Wichtigkeit haben müssen in der Geometrie, der Mechanik, der Physik, kurz überall da, wo es sich um die Untersuchung von Verhältnissen handelt, die garnichts mit den

Achsen, die man wählt, zu tun haben[1]). So sind die ersten partiellen Derivierten von f offenbar gebunden an die Achsen, auf die man alles bezieht, und ändern sich mit ihnen; ungeändert bleibt aber die Summe $\varDelta f$ ihrer Quadrate, die aus diesem Grunde als Differentialparameter von erster Ordnung bezeichnet wird. In der Tat haben wir im vorigen Paragraphen gesehen, daß $\varDelta f$ gleich dem Quadrat von $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$ ist, und zwar in der Richtung der raschesten Variation von f. Diese Richtung hängt aber augenscheinlich nur ab von den Werten von f und nicht von den Achsen, die man zu Grunde gelegt hat. Ebenfalls invariant ist der Ausdruck

$$\varDelta^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

der als Differentialparameter von zweiter Ordnung bezeichnet wird. In der Tat ergibt sich, wenn man die Derivation in der Richtung (α, β, γ) wiederholt,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} = \alpha \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \cdots\right) + \beta \frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \cdots\right) + \cdots.$$

Sucht man nun den Ort derjenigen von M ausgehenden Geraden, längs welchen die zweite Derivierte null ist, so findet man den quadratischen Kegel

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \cdots + 2\alpha\beta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \cdots = 0. \tag{22}$$

Offenbar hängt dieser Kegel nicht ab von der Wahl der Achsen. Es ist also invariant die Diskriminante der quadratischen Form (22), die Hessesche Determinante von f, und ebenso erfreuen sich der Invarianteneigenschaft die Summen (§ 89) ihrer Hauptminoren erster oder zweiter Ordnung und insbesondere $\varDelta^2 f$. Die Funktionen, für welche man immer $\varDelta^2 f = 0$ hat (Laplacesche Gleichung), heißen harmonische Funktionen (vgl. § 401) und sind von großer Wichtigkeit in den Anwendungen. Eine harmonische Funktion ist z. B. die Temperatur in einem Körper, der sich im thermischen Gleichgewichtszustand befindet, eine harmonische Funktion ist das Potential außerhalb des von den wirksamen Massen eingenommenen Raumes u. s. w.

570. Die obigen Betrachtungen werfen viel Licht auf die Diskussion der Minima und Maxima bei Funktionen von mehreren Veränderlichen. Wenn man durch M eine beliebige Gerade legt und nur die Werte betrachtet, welche eine Funktion f längs dieser Geraden annimmt, so ist klar, daß man in M weder ein Minimum noch ein

---

1) In diese Richtung fällt der „Calcolo differenziale assoluto", den G. Ricci von der Universität zu Padua erdacht hat (Bulletin des sciences math. et astr., 1892, p. 186).

Maximum haben wird, wenn nicht $\frac{\partial f}{\partial \sigma} = 0$ ist. Da diese Gleichung in den unendlich vielen auf $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ senkrecht stehenden Richtungen erfüllt ist, so sieht man, daß durch jeden Punkt M des Raumes unendlich viele, in einer Ebene liegende Geraden hindurchgehen, längs welchen die Funktion in M ein Minimum oder ein Maximum erfährt. Eine Ausnahme können jedoch zwei gewisse Geraden machen, die Erzeugende des Kegels (22) sind; denn längs dieser Geraden verschwindet die zweite Derivierte in M. Alles dieses setzt voraus, daß die ersten partiellen Derivierten nicht alle in dem betrachteten Punkte verschwinden. Sonst wäre nämlich $\frac{\partial f}{\partial \sigma} = 0$ in jeder Richtung, und es ist klar, daß dann längs aller von einem solchen Punkte ausgehenden Geraden die Funktion in ihm ein Minimum oder ein Maximum erfährt, wobei nur die eventuell eine Ausnahme machen, welche als Erzeugende auf dem Kegel (22) liegen. Ist dieser Kegel imaginär, so findet die Ausnahme nicht statt, und $\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2}$ bewahrt dann für alle Richtungen ein unverändertes Zeichen, weil es eine stetige Funktion ist und für reelle Werte von α, β, γ nicht verschwinden kann. Auf diese Weise wird es klar, warum, wenn man in M in jeder Richtung immer ein Minimum oder immer ein Maximum hat, die Funktion tatsächlich im Raume in M ein Minimum oder Maximum hat. Ist dagegen der Kegel (22) reell, so wird weder ein Minimum noch ein Maximum stattfinden, da längs gewisser Geraden die Funktion in M ein Minimum wird, längs gewisser anderer Geraden aber ein Maximum, während der Kegel (22) die Scheidegrenze zwischen den beiden von diesen Geraden gebildeten Regionen darstellt. In dem Spezialfalle der harmonischen Funktionen können die drei zweiten partiellen Derivierten, deren Summe $\Delta^2 f$ gleich Null ist, nicht alle dasselbe Zeichen haben, und der Kegel (22) ist daher immer reell. Daraus folgt, daß die harmonischen Funktionen keine Minima und Maxima besitzen.

571. Übungen. a) Wir wollen uns die Aufgabe stellen, die Differentialparameter einer Funktion $f(x, y)$ der Punkte der Ebene in Polarkoordinaten auszudrücken. Man hat $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ und

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta.$$

Also ist

$$(23) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\sin\theta, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r}\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\cos\theta.$$

Übrigens lassen sich diese letzten Formeln direkt aufstellen (vgl. § 566) wie die ersten, wenn man beachtet, daß aus den Relationen $r^2 = x^2 + y^2$, $\theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$ sich folgern läßt

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin\theta}{r},$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos\theta}{r}.$$

Quadriert und addiert man die Ausdrücke (23), so kommt

$$\varDelta f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2.$$

Wenden wir jetzt die Formeln (23) auf $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ anstatt auf f, so finden wir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\sin\theta\right)\cdot\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\sin\theta\right)\cdot\sin\theta,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\cos\theta\right)\cdot\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\cos\theta\right)\cdot\cos\theta,$$

d. h.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\cos^2\theta + 2\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial \theta}\right)\sin\theta\cos\theta + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\right)\sin^2\theta,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\sin^2\theta - 2\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial \theta}\right)\sin\theta\cos\theta + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\right)\cos^2\theta.$$

Also ist

$$\varDelta^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}.$$

Im Falle von n Veränderlichen hat man, wenn f eine Funktion von $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + \cdots}$ allein ist,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{df}{dr}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{r}\frac{df}{dr}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{r}\frac{df}{dr}, \quad \ldots,$$

ferner

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{r}\frac{df}{dr} + \frac{x^2}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{df}{dr}\right) \text{ u. s. w.}$$

Mithin ist

$$\varDelta f = \left(\frac{df}{dr}\right)^2, \quad \varDelta^2 f = \frac{n}{r}\frac{df}{dr} + r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{df}{dr}\right) = \frac{1}{r^{n-1}}\frac{d}{dr}\left(r^{n-1}\frac{df}{dr}\right).$$

Aus der letzten Formel geht hervor, daß, wenn man eine harmonische Funktion von r allein haben will, $r^{n-1}\frac{df}{dr}$ konstant sein muß. Es muß demnach abgesehen von einer Konstanten $f = \log r$ sein im Falle $n = 2$ und $f = r^{2-n}$ im Falle $n \gtrless 2$.

b) Will man auch die Hessesche Determinante $H = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2$ berechnen, so muß man noch kennen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\sin\theta\right)\cdot\sin\theta$$
$$+ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\sin\theta\right)\cdot\cos\theta.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\right), \quad \psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta},$$

so findet man

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \varphi \sin 2\theta - \psi \cos 2\theta,$$

und auch die in der letzten Übung erhaltenen Formeln lassen sich in analoger Weise schreiben:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\Delta^2 f + \varphi\cos 2\theta + \psi\sin 2\theta, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{2}\Delta^2 f - \varphi\cos 2\theta - \psi\sin 2\theta.$$

Also ist $H = \frac{1}{4}(\Delta^2 f)^2 - (\varphi^2 + \psi^2)$ oder

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} & \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) \\ \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) & \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \end{vmatrix}.$$

c) Wir gehen jetzt dazu über allgemeiner die zweiten Derivierten von $f(x, y)$ in Bezug auf irgend ein Paar unabhängiger Veränderlicher u, v zu berechnen. Verfährt man wie in § 565, so findet man in erster Linie

$$(24) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\mathfrak{J}}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\mathfrak{J}}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right),$$

ferner lassen sich in analoger Weise aus den Relationen

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \end{cases}$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ableiten. Die Determinante des Systems ist (§ 27, a)

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 & 2\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u} & \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 \\ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} \\ \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 & 2\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v} & \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 \end{vmatrix} = \mathfrak{J}^3,$$

und die algebraischen Komplemente ihrer Elemente sind die homologen Elemente der Determinante

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 & -\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v} & \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 \\ -2\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} & -2\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \\ \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 & -\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u} & \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 \end{vmatrix},$$

multipliziert mit $\mathfrak{J}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = &\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\right)\right] \\ &+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\right)\right] \\ &-2\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}\right)\right] \text{ u. s. w.,} \end{aligned}$$

wo für $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ die Werte (24) einzusetzen sind. Aber rascher und direkter kommt man zum Ziele, indem man (wie in der ersten Übung) die Formeln (24) auf die Funktionen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ anstatt auf f anwendet. Auf diese Weise erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = &\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\right) \\ &-\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\right) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = &\frac{1}{\mathfrak{J}^2}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-2\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right] \\ &+\frac{1}{\mathfrak{J}}\left[\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial v}\right)-\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\right]\frac{\partial f}{\partial u} \\ &+\frac{1}{\mathfrak{J}}\left[\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial u}\right)-\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\right]\frac{\partial f}{\partial v}, \end{aligned}$$

und ähnlich

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = &\frac{1}{\mathfrak{J}^2}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-2\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right] \\ &+\frac{1}{\mathfrak{J}}\left[\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial x}{\partial v}\right)-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\right]\frac{\partial f}{\partial u} \\ &+\frac{1}{\mathfrak{J}}\left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial x}{\partial u}\right)-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right]\frac{\partial f}{\partial v}. \end{aligned}$$

d) Wir sind jetzt in der Lage auch die Differentialparameter von f, den ersten und den zweiten, berechnen zu können, in denen, wie wir sehen werden, die Funktionen

$$a=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2,\quad b=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2,\quad c=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}$$

auftreten, welche sich bei der Transformation von $ds^2=dx^2+dy^2$ in

$$ds^2 = a\,du^2 + 2c\,du\,dv + b\,dv^2 \tag{25}$$

darbieten. Zunächst findet man aus den Formeln (24) durch Quadrieren und Addieren sofort

$$\varDelta f = \frac{1}{\mathfrak{J}^2}\left[b\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 - 2c\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v} + a\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right].$$

Ferner ergibt sich aus den letzten Formeln der vorigen Übung durch Addition

$$\varDelta^2 f = \frac{1}{\mathfrak{J}^2}\left(b\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2c\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v} + a\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)$$
$$+ \frac{1}{\mathfrak{J}}\left[\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{b}{\mathfrak{J}} - \frac{\partial}{\partial v}\frac{c}{\mathfrak{J}}\right)\frac{\partial f}{\partial u} + \left(\frac{\partial}{\partial v}\frac{a}{\mathfrak{J}} - \frac{\partial}{\partial u}\frac{c}{\mathfrak{J}}\right)\frac{\partial f}{\partial v}\right]$$

oder

$$\varDelta^2 f = \frac{1}{\mathfrak{J}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{b}{\mathfrak{J}}\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{c}{\mathfrak{J}}\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{a}{\mathfrak{J}}\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{c}{\mathfrak{J}}\frac{\partial f}{\partial u}\right)\right],$$

die wichtige Formel von Lamé. Zu dieser Formel gelangt man auch, wenn man den in § 566 angegebenen Weg einschlägt. Man findet sofort

$$\varDelta^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\varDelta u + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\varDelta v + \frac{\partial f}{\partial u}\varDelta^2 u + \frac{\partial f}{\partial v}\varDelta^2 v.$$

Andererseits hat man wegen

$$\left\{\begin{aligned} 1 &= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, & 0 &= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}, \\ 0 &= \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, & 1 &= \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}, \end{aligned}\right.$$

folgendes:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\mathfrak{J}}\frac{\partial x}{\partial u},$$

mithin

$$\varDelta u = \frac{b}{\mathfrak{J}^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{c}{\mathfrak{J}^2}, \quad \varDelta v = \frac{a}{\mathfrak{J}^2},$$

$$\varDelta^2 u = \frac{1}{\mathfrak{J}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{b}{\mathfrak{J}} - \frac{\partial}{\partial v}\frac{c}{\mathfrak{J}}\right), \quad \varDelta^2 v = \frac{1}{\mathfrak{J}}\left(\frac{\partial}{\partial v}\frac{a}{\mathfrak{J}} - \frac{\partial}{\partial u}\frac{c}{\mathfrak{J}}\right)$$

u. s. w. Konstruiert man die Kurven u und v (§ 413), so lassen sich die Werte von a, b, c in jedem Punkte M direkt aus geometrischen Betrachtungen ableiten. In der Tat sieht man aus (25), daß $\sqrt{a}\cdot du$ und $\sqrt{b}\cdot dv$ das ds auf den Kurven $v = \text{Const.}$ bezw. $u = \text{Const.}$ darstellen. Wenn α und β die Neigungen sind, welche diese Kurven in M gegen die x-Achse haben, so ist also

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{b}}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{b}}\frac{\partial y}{\partial v},$$

und der Winkel ω beider Kurven ist gegeben durch

$$\cos\omega = \cos(\beta - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{ab}},$$

sodaß man, da offenbar $\mathfrak{J}^2 = ab - c^2$ ist, auch hat $\sin\omega = \frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{ab}}\cdot$ Setzt man z. B. im Falle der Polarkoordinaten $u = r$, $v = \theta$, so sieht man direkt an der Figur, daß $a = 1$, $b = r^2$, $c = 0$ ist, und die Formel von Lamé reduziert sich sofort auf die in der ersten Übung erhaltene Formel. Für jedes zweifache Orthogonalsystem von Kurven nimmt die Lamésche Formel folgende äußerst einfache Gestalt an:

$$\Delta^2 f = \frac{1}{\sqrt{ab}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\,\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\,\frac{\partial f}{\partial v}\right)\right].$$

Implicite Funktionen.

572. Wenn man sich in der Relation $f(x, y) = 0$ y als Funktion von x denkt, so kann man unter Anwendung der Regel für die Derivation der zusammengesetzten Funktionen (§ 369) unmittelbar die Gleichung schreiben

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \tag{26}$$

aus welcher man, falls $\frac{\partial f}{\partial y} \gtrless 0$ ist, den Wert von y' ableitet. Aber wenn man dies macht, so setzt man dabei stillschweigend die Existenz von y' voraus, während uns doch nichts berechtigt a priori zu behaupten, daß y' existiert oder daß überhaupt y als Funktion von x betrachtet werden kann. Trotzdem sind diese Behauptungen zulässig. Es sei in der Tat (x_0, y_0) irgend ein Paar solcher Werte von x und y, die der Gleichung $f = 0$ genügen, und wir wollen annehmen, daß f_x' und f_y' stetig sind, wenn x und y innerhalb der Intervalle $(x_0 - h,\ x_0 + h)$ bezw. $(y_0 - k,\ y_0 + k)$ variieren. Außerdem wollen wir annehmen, h und k seien hinreichend klein gewählt, damit f_y' immer das Zeichen von $f_y'(x_0, y_0) \gtrless 0$ bewahre. Das ist wegen der Stetigkeit von f_y' möglich. Es ist ferner klar, daß auf Grund unserer Voraussetzungen das Verhältnis von f_y' zu f_x' seinem Betrage nach nicht beliebig klein werden kann, und es gibt daher eine positive Zahl α derart, daß, wenn x und y in ihren zugehörigen Intervallen variieren, beständig $|f_y'| > \alpha|f_x'|$ ist. Wenn h, welches man so klein wählen kann als man will, kleiner als $k\alpha$ ist, so hat man

$$h|f_x'| < k\alpha|f_x'| < k|f_y'|.$$

Daraus folgt, daß in der Gleichung

$$f(x_0 + \xi,\ y_0 \pm k) = \xi f_x'(x_0 + \theta\xi,\ y_0 \pm \theta k) \pm k f_y'(x_0 + \theta\xi,\ y_0 \pm \theta k),$$

auf welche sich unter Berücksichtigung von $f(x_0, y_0) = 0$ die Taylorsche Formel reduziert, der absolute Betrag des ersten Bestandteils der rechten Seite kleiner ist als der absolute Betrag des zweiten Bestandteils, und zwar für jedes zwischen $-h$ und h enthaltene ξ. Also ist das Zeichen von $f(x_0+\xi,\ y_0 \pm k)$ dasjenige von $\pm k f_y'(x_0+\theta\xi,\ y_0 \pm \theta k)$, und da das Zeichen von f_y' sich nicht ändert, so erkennt man folgendes: Bei festgehaltenem ξ ist $f(x_0+\xi,\ y)$ eine Funktion von y allein, deren Werte für $y=y_0-k$ und $y=y_0+k$ entgegengesetzte Zeichen haben. Nun ist die genannte Funktion aber stetig, weil sie die Derivierte f_y' hat. Sie ist also null (§ 275) für einen gewissen Wert $y_0+\eta$ von y, der dem Intervall $(y_0-k,\ y_0+k)$ angehört, und sie kann nicht mehr als einmal verschwinden, weil das Zeichen ihrer Derivierten ungeändert bleibt und die Funktion daher (§ 300) in dem genannten Intervall entweder immer wächst oder immer abnimmt.

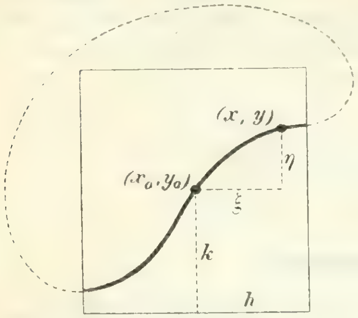

Fig. 28.

Es ist also wahr, daß es bei beliebiger Fixierung eines Wertes $x=x_0+\xi$ einen Wert $y_0+\eta$ von y und nur einen gibt, derart, daß die Relation $f(x,\ y)=0$ besteht. Innerhalb der angegebenen Grenzen definiert also diese Relation eine Funktion y von x, und zwar offenbar eine stetige Funktion; denn wenn man in $f(x_0+\xi,\ y_0+\eta)=0$, d. h. in

$$\xi f_x'(x_0+\theta\xi,\ y_0+\theta\eta)+\eta f_y'(x_0+\theta\xi,\ y_0+\theta\eta)=0$$

ξ nach Null konvergieren läßt, so sieht man, da f_x' endlich und $f_y' \gtrless 0$ ist, daß auch η nach Null konvergiert. Die Funktion besitzt überdies eine Derivierte, da man mit nach Null konvergierendem η hat

$$\lim \frac{\eta}{\xi} = -\lim \frac{f_x'(x_0+\theta\xi,\ y_0+\theta\eta)}{f_y'(x_0+\theta\xi,\ y_0+\theta\eta)} = -\frac{f_x'(x_0,\ y_0)}{f_y'(x_0,\ y_0)}.$$

Wir haben somit von dem Punkte $(x_0,\ y_0)$ ausgehend unendlich viele andere der Gleichung $f=0$ genügende Punkte im Innern des durch die Ecken $(x_0 \pm h,\ y_0 \pm k)$ definierten Rechtecks aufgefunden, und diese Punkte befinden sich alle unter denselben Bedingungen wie $(x_0,\ y_0)$, sodaß der letzte Schluß auf jeden solchen Punkt anwendbar ist. Die Formel (26) ist also bewiesen. Man bemerke schließlich, daß wegen der Stetigkeit von f_x' und f_y' und wegen $f_y' \gtrless 0$ auch y' eine stetige Funktion ist.

573. Allgemeiner gilt folgendes: Wenn die Relation

$$f(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ u)=0 \tag{27}$$

von den Werten $x_0,\ y_0,\ z_0,\ \ldots,\ u_0$ der Veränderlichen erfüllt wird, wenn ferner in der Umgebung dieser Werte die ersten partiellen Derivierten von f existieren und stetig sind, wenn endlich für die betrachteten Werte $f_u' \gtrless 0$ ist, so kann man behaupten, daß u eine Funktion der Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ ist, die stetige erste partielle Derivierte besitzt. Man erhält dieselben, indem man die Relation (27) partiell deriviert, also in folgender Weise:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \ldots .$$

Der Beweis ist genau so zu führen wie in dem bereits betrachteten Spezialfall.

574. Weitere Differentiationen liefern die Werte der successiven Derivierten. Z. B. braucht man im Falle der Relation $f(x, y) = 0$ nur $\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$ zu differentiieren, um y'' zu berechnen. Man erhält nämlich

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial f}{\partial y} d^2 y = 0,$$

woraus man nach Einsetzung des durch (26) gegebenen Wertes von y' sofort findet

$$-y''\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2$$

oder

$$y'' = \frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3}\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix};$$

u. s. w. Wir wollen noch die Aufgabe erledigen, die partiellen Derivierten p, q, r, s, t der Funktion z zu berechnen, welche implicite durch die Relation $f(x, y, z) = 0$ definiert ist. Die beiden ersten ergeben sich aus den Gleichungen

$$\text{(28)} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} q = 0,$$

welche man durch partielle Derivation von $f = 0$ nach x und nach y erhält. Deriviert man jetzt die erste Gleichung nach x, die zweite nach y, so findet man die Relationen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} p + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} p^2 + \frac{\partial f}{\partial z} r = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} q + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} q^2 + \frac{\partial f}{\partial z} t = 0,$$

aus denen sich folgende Werte für r und für t ergeben:

$$r = \frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^3} \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix}, \qquad t = \frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^3} \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix}.$$

Deriviert man die erste der Gleichungen (28) nach y oder die zweite nach x, so kommt

$$s = \frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^3} \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix}.$$

Man bemerke hier, daß die obigen drei Determinanten sich aus der einen Determinante

$$D = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix}$$

ableiten lassen, indem man die algebraischen Komplemente der Elemente $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $-\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ nimmt. Daraus folgt auf Grund bekannter Eigenschaften der Determinanten (§ 38)

$$rt - s^2 = -\frac{D}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^4}.$$

575. Noch allgemeiner gilt folgendes: Sind die m Relationen

$$(29) \qquad \begin{cases} f(x, y, z, \ldots, u, v, w, \ldots) = 0, \\ \varphi(x, y, z, \ldots, u, v, w, \ldots) = 0, \\ \psi(x, y, z, \ldots, u, v, w, \ldots) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

gegeben und werden sie durch $x = x_0$, $y = y_0$, ..., $u = u_0$, $v = v_0$, ... erfüllt, so kann man die m Veränderlichen $u, v, w, \ldots$ als Funktionen von den n Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ betrachten, und diese Funktionen besitzen erste partielle Derivierte. Vorausgesetzt ist aber dabei, daß die ersten partiellen Derivierten von $f, \varphi, \psi, \ldots$ stetig sind, und daß überdies für die betrachteten Werte die Jacobische Determinante

$$\mathfrak{J} = \frac{\partial(f, \varphi, \psi, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)}$$

von Null verschieden ist. Für $m = 1$ gelangt man wieder zu dem Theorem des § 573. Um das allgemeine Theorem zu beweisen, wird es also genügen zu zeigen, daß das Theorem für m Relationen gilt, wenn es im Falle von $m - 1$ Relationen richtig ist. Da nun im Punkte $(x_0, y_0, \ldots, u_0, \ldots)$ vorausgesetzt wird $\mathfrak{J} \gtrless 0$, so kann man sicher sein, daß wenigstens eine der Derivierten $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial w}, \cdots$ in diesem Punkte von Null verschieden ist. Nehmen wir an, es sei $\frac{\partial f}{\partial u} \gtrless 0$. Alsdann können wir unter Beachtung der gemachten Voraussetzungen und unter Benutzung des Theorems in § 573 behaupten, daß u eine Funktion von $x, y, \ldots, v, w, \ldots$ ist, welche stetige erste partielle Derivierte hat. Denken wir uns den Ausdruck von u in die übrigen Gleichungen (29) eingesetzt, so finden wir

$$(30) \qquad \left\{\begin{array}{l} \varphi_1(x, y, z, \ldots, v, w, \ldots) = 0, \\ \psi_1(x, y, z, \ldots, v, w, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Dies ist ein System von $m - 1$ Gleichungen, welches die $m - 1$ Veränderlichen $v, w, \ldots$ an die n übrigen bindet. Die ersten partiellen Derivierten von $\varphi_1, \psi_1, \ldots$ existieren und sind stetig, da man hat

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{u. s. w.}$$

Wir werden sehr bald sehen, daß die neue Jacobische Determinante

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{\partial(\varphi_1, \psi_1, \ldots)}{\partial(v, w, \ldots)}$$

wie $\mathfrak{J}$ von Null verschieden ist. Also definiert das System (30) v, $w, \ldots$ als Funktionen von $x, y, z, \ldots$, und diese Funktionen haben erste partielle Derivierte. Das Gleiche läßt sich aber auch von u sagen, wenn man sich in den Ausdruck von u, der aus der ersten Gleichung (29) entspringt, $v, w, \ldots$ als Funktionen von $x, y, z, \ldots$ eingesetzt denkt. Man erhält auf diese Weise ein System von Funktionen $u, v, w, \ldots$, die für $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0, \ldots$ die Werte $u_0, v_0, w_0, \ldots$ annehmen und in der Umgebung dieses Punktes erste partielle Derivierte zulassen. Es reduziert sich somit alles darauf, zu beweisen, daß $\mathfrak{J}_1 \gtrless 0$ ist. Wir wollen uns nun denken, daß in $\mathfrak{J}$ die Elemente der ersten Vertikalreihe, multipliziert mit $\frac{\partial u}{\partial v}$, zu den entsprechenden der zweiten addiert werden, ferner dieselben Elemente, aber multipliziert mit $\frac{\partial u}{\partial w}$, zu denen der dritten Vertikalreihe u. s. f. Die Elemente der neuen Determinante sind dann folgende:

$$
\begin{array}{lll}
\frac{\partial f}{\partial u}, & \frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v}=0, & \frac{\partial f}{\partial w}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial w}=0, \cdots \\
\frac{\partial \varphi}{\partial u}, & \frac{\partial \varphi}{\partial v}+\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v}=\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}, & \frac{\partial \varphi}{\partial w}+\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial w}=\frac{\partial \varphi_1}{\partial w}, \cdots \\
\frac{\partial \psi}{\partial u}, & \frac{\partial \psi}{\partial v}+\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v}=\frac{\partial \psi_1}{\partial v}, & \frac{\partial \psi}{\partial w}+\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial w}=\frac{\partial \psi_1}{\partial w}, \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

Mithin ist $\mathfrak{I}=\mathfrak{I}_1\frac{\partial f}{\partial u}$, und da $\frac{\partial f}{\partial u}$ endlich ist und $\mathfrak{I}$ als von Null verschieden vorausgesetzt wird, so ist auch $\mathfrak{I}_1 \gtrless 0$.

576. Nachdem wir so die Existenz der ersten partiellen Derivierten bei den durch das System (29) definierten Funktionen konstatiert haben, können wir diese Derivierten sehr leicht berechnen. Wir brauchen nur die Gleichungen (29) nach jeder der als unabhängig vorausgesetzten Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ partiell zu derivieren. So findet man z. B., wenn man nach x deriviert, folgendes System von linearen Gleichungen:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}+\cdots=0, \\
\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}+\cdots=0, \\
\frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}+\cdots=0, \\
\cdots\cdots\cdots
\end{array}
\right.
$$

dessen Determinante gerade $\mathfrak{I} \gtrless 0$ ist. Daraus ergibt sich nach der Cramerschen Regel

$$
\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\mathfrak{I}}\frac{\partial(f, \varphi, \ldots)}{\partial(x, v, \ldots)}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{\mathfrak{I}}\frac{\partial(f, \varphi, \ldots)}{\partial(u, x, \ldots)}, \quad \ldots .
$$

577. Übungen. a) Den Winkel ω zweier ebener Kurven $\varphi=0$, $\psi=0$ zu berechnen, die sich in einem Punkte (x, y) schneiden. Nach der Formel (26) sind die Neigungskoeffizienten der Tangenten der beiden Kurven

$$
\operatorname{tg}\alpha=-\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}, \quad \operatorname{tg}\beta=-\frac{\frac{\partial \psi}{\partial x}}{\frac{\partial \psi}{\partial y}},
$$

sodaß man hat

$$
\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{\Delta\varphi}}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{\Delta\varphi}}\frac{\partial \varphi}{\partial y},
$$

$$
\sin\beta=-\frac{1}{\sqrt{\Delta\psi}}\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{\Delta\psi}}\frac{\partial \psi}{\partial y},
$$

folglich (vgl. § 571, d)

$$\sin\omega = \sin(\beta - \alpha) = \frac{1}{\sqrt{\Delta\varphi\cdot\Delta\psi}}\,\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)}.$$

Man bemerke, daß die Berührung zwischen den beiden Kurven angezeigt wird durch das Verschwinden der Jacobischen Determinante der Funktionen φ und ψ.

b) Wird eine ebene Kurve dargestellt durch eine Gleichung

$$f(x, y, u, v, \ldots) = 0,$$

während $u, v, \ldots$ durch n Gleichungen

$$\varphi(x, y, u, v, \ldots) = 0, \quad \psi(x, y, u, v, \ldots) = 0, \quad \ldots$$

implicite als Funktionen der Koordinaten x und y definiert sind, und will man in irgend einem Punkte die Tangente konstruieren, so ist es nicht nötig $u, v, \ldots$ aus den $n+1$ Gleichungen zu eliminieren, um dadurch zunächst die Gleichung der Kurve in x und y zu erhalten. Man kann vielmehr die Sache so ansehen, daß die genannten Gleichungen $y, u, v, \ldots$ als Funktionen der einen Veränderlichen x definieren, und braucht dann nur zu derivieren und aus den so erhaltenen Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{du}{dx} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{dv}{dx} + \cdots = 0, \\
\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\dfrac{du}{dx} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\dfrac{dv}{dx} + \cdots = 0, \\
\dfrac{\partial \psi}{\partial x} + \dfrac{\partial \psi}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial \psi}{\partial u}\dfrac{du}{dx} + \dfrac{\partial \psi}{\partial v}\dfrac{dv}{dx} + \cdots = 0, \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot
\end{array}\right.$$

die Derivierten von $u, v, \ldots$ zu eliminieren. Einer der größten Vorzüge der Differentialrechnung besteht gerade in der Vermeidung von praktisch unmöglichen Eliminationen. Sie führt mit Hilfe der Derivation oder der Differentiation zu Systemen linearer Gleichungen, die man immer auflösen kann. So gelangt man im vorliegenden Falle zu der Formel

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial(f,\varphi,\psi,\ldots)}{\partial(x,u,v,\ldots)}}{\dfrac{\partial(f,\varphi,\psi,\ldots)}{\partial(y,u,v,\ldots)}},$$

welche offenbar eine Verallgemeinerung von (26) ist.

c) In ähnlicher Weise sei eine Fläche gegeben durch zwei Gleichungen. Man hat sich also zu denken, daß die Relation zwischen den Koordinaten ihrer Punkte durch Elimination von u aus den Gleichungen

$$\varphi(x, y, z, u) = 0, \quad \psi(x, y, z, u) = 0$$

hervorgehen würde. Wir wollen annehmen, man wünsche p, q, r, s, t, d. h. die ersten und zweiten partiellen Derivierten von z, welches eine Funktion der unabhängigen Veränderlichen x und y ist, zu berechnen. Deriviert man die beiden Gleichungen das eine Mal nach x, das andre Mal nach y, so erhält man die Systeme

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x}+\dfrac{\partial\psi}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial\psi}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}=0 \end{cases},\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial y}+\dfrac{\partial\psi}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y}+\dfrac{\partial\psi}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}=0 \end{cases},$$

aus welchen man durch Elimination der Derivierten von u ableitet

$$p=-\frac{\dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,u)}}{\dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(z,u)}},\qquad q=-\frac{\dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(y,u)}}{\dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(z,u)}}.$$

Die andern Derivierten kann man durch direkte Derivation aus p und q gewinnen oder auch durch Auflösung der Gleichungen, welche sich aus den obigen Systemen durch partielle Derivation ergeben. Wenn insbesondere die Gleichung der Fläche $z=f(x,y,u)$ ist, während u implicite als Funktion von x und von y durch die Gleichung $\varphi(x,y,u)=0$ gegeben ist, so hat man sofort

$$p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=0,$$

mithin

$$p=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}-\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}}=\frac{\dfrac{\partial(f,\varphi)}{\partial(x,u)}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}}.$$

Daraus folgt

$$r=\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

wo man für $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ und $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ die Werte einzusetzen hat, die aus den Gleichungen

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \quad \text{u. s. w.}$$

sich ergeben.

578. Wenn m Funktionen $y_1, y_2, \ldots, y_m$ der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gegeben sind, so ist es von Wichtigkeit ein Kennzeichen zu haben, ob dieselben voneinander **unabhängig** sind, d. h. ob keine von ihnen eine Funktion der andern ist. Hierzu genügt es die Jacobische Matrix des Systems zu untersuchen, d. h. die Matrix

$$\left|\begin{matrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_3} & \ldots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_3} & \ldots & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_3} & \ldots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{matrix}\right|,$$

deren Elemente als stetige Funktionen vorausgesetzt werden. Ist μ

der Rang der Jacobischen Matrix, so enthält das betrachtete System μ unabhängige Funktionen, und die $m - \mu$ andern sind Funktionen jener μ ersten. Wir wollen dieses wichtige Theorem jetzt beweisen.

a) Man darf zulassen, daß die Determinante

$$\mathfrak{J} = \frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_\mu)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_\mu)}$$

von Null verschieden ist; denn die Jacobische Matrix soll nach der Annahme mindestens eine Determinante μ-ter Ordnung enthalten, die nicht verschwindet. Denkt man sich gerade diejenigen Funktionen y und Veränderlichen x, welche in der genannten Determinante vorkommen, mit den Indices $1, 2, \ldots, \mu$ numeriert, so kommt man zu dem Fall, wo $\mathfrak{J}$ eine solche Determinante ist. Es seien nun

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \ldots$$

die Ausdrücke der betrachteten Funktionen. Man setze

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) - y_i$$

und betrachte das System

$$(31) \qquad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_m = 0.$$

Dieses System ist nach dem in § 575 Gesagten geeignet die Veränderlichen

$$(32) \qquad x_1, x_2, \ldots, x_\mu, \quad y_{\mu+1}, y_{\mu+2}, \ldots, y_m$$

als implicite Funktionen der übrigbleibenden

$$(33) \qquad y_1, y_2, \ldots, y_\mu, \quad x_{\mu+1}, x_{\mu+2}, \ldots, x_n$$

zu definieren. Dazu ist nämlich nur nötig, daß die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\mu, \varphi_{\mu+1}, \varphi_{\mu+2}, \ldots, \varphi_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_\mu, y_{\mu+1}, y_{\mu+2}, \ldots, y_m)}$$

nicht null ist, und das trifft tatsächlich zu, weil wegen

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_i} = -1, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} = 0$$

die genannte Determinante sich offenbar auf $(-1)^{m-\mu}\mathfrak{J}$ reduziert. Ist also b_i der Wert von y_i im Punkte $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, in dessen Umgebung wir die Existenz (und die Stetigkeit) der ersten partiellen Derivierten der f zulassen, so können wir behaupten, daß das System (31) die Größen (32) als implicite Funktionen der übrigen Veränderlichen in der Umgebung des Punktes $(b_1, b_2, \ldots, b_\mu, a_{\mu+1}, a_{\mu+2}, \ldots, a_n)$ definiert. Mit andern Worten, für jedes System von Werten, die den Größen (33) beliebig beigelegt sind, vorausgesetzt, daß diese Werte bezüglich in einer gewissen Nähe von $b_1, b_2, \ldots, b_\mu,$

$a_{\mu+1}, a_{\mu+2}, \ldots, a_n$ liegen, hat man wohlbestimmte Werte der Größen (32). Wenn man sich daher denkt, daß den μ ersten Veränderlichen x gerade diese Werte beigelegt werden, während die $n-\mu$ übrigen x die ihnen bereits anfangs verliehenen Werte annehmen, so sieht man, daß $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$ die vorgeschriebenen Werte erhalten, die innerhalb gewisser Grenzen beliebig gewählt sind. Es ist also wahr, daß die μ ersten Funktionen y voneinander unabhängig sind.

b) Es muß jetzt noch gezeigt werden, daß die $m-\mu$ übrigen Funktionen y Funktionen der μ ersten sind. Aus dem Obigen geht nur hervor, daß jede von ihnen eine Funktion der Größen (33) ist. Es wird demnach für uns genügen zu zeigen, daß, wenn i und j größer sind als μ, die Funktion y_j unabhängig von x_i ist. Wenn wir aber die Gleichungen (31) nach x_i derivieren, indem wir fortfahren die Größen (32) als Funktionen der Größen (33) zu betrachten, so ergibt sich

$$\begin{gathered}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_i}+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_i}+\cdots+\frac{\partial f_1}{\partial x_\mu}\frac{\partial x_\mu}{\partial x_i}+\frac{\partial f_1}{\partial x_i}=0,\\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_i}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_i}+\cdots+\frac{\partial f_2}{\partial x_\mu}\frac{\partial x_\mu}{\partial x_i}+\frac{\partial f_2}{\partial x_i}=0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{\partial f_\mu}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_i}+\frac{\partial f_\mu}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_i}+\cdots+\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu}\frac{\partial x_\mu}{\partial x_i}+\frac{\partial f_\mu}{\partial x_i}=0,\\
\frac{\partial f_j}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_i}+\frac{\partial f_j}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_i}+\cdots+\frac{\partial f_j}{\partial x_\mu}\frac{\partial x_\mu}{\partial x_i}+\frac{\partial f_j}{\partial x_i}-\frac{\partial y_j}{\partial x_i}=0,
\end{gathered}$$

mithin durch Elimination der Derivierten der x

$$\begin{vmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_\mu} & \frac{\partial f_1}{\partial x_i}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\frac{\partial f_\mu}{\partial x_1} & \frac{\partial f_\mu}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu} & \frac{\partial f_\mu}{\partial x_i}\\
\frac{\partial f_j}{\partial x_1} & \frac{\partial f_j}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_j}{\partial x_\mu} & \frac{\partial f_j}{\partial x_i}-\frac{\partial y_j}{\partial x_i}
\end{vmatrix}=0,$$

d. h. $\mathcal{J}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}=0$ und endlich $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}=0$.

579. Folgerung. Damit n Funktionen $u, v, w, \ldots$ von n Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ voneinander unabhängig seien, ist notwendig und hinreichend, daß man hat

$$\frac{\partial(u, v, w, \ldots)}{\partial(x, y, z, \ldots)} \gtrless 0.$$

Auch hier wird wie früher vorausgesetzt, daß die Funktionen stetige erste Derivierte besitzen.

580. Wir wollen schließlich noch eine bemerkenswerte Eigenschaft der Funktionaldeterminanten angeben, die sich als eine Verallgemeinerung der Regel für die Derivation der Funktionen von Funktionen (§ 284) ansehen läßt. Nehmen wir an, daß die y von den x durch Vermittelung anderer Funktionen u derselben x abhängen. Da man hat

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_i} = \frac{\partial y_j}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial y_j}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial y_j}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_i},$$

so sieht man sofort, daß die Multiplikation der Determinanten

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}, \quad \frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

gerade die Funktionaldeterminante der y in Bezug auf die x liefert. Es ist mit andern Worten

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)} \cdot \frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}. \tag{34}$$

Insbesondere hat man

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \cdot \frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 1. \tag{35}$$

581. Übungen. a) Die Formel (34) schließt andere ein, die wir früher erhalten haben. Will man z. B. in einer Funktion f einen Wechsel der Veränderlichen vornehmen, so kann man sofort schreiben

$$\frac{\partial(f, y, z, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)} = \frac{\partial(f, y, z, \ldots)}{\partial(x, y, z, \ldots)} \cdot \frac{\partial(x, y, z, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)},$$

und da sich der erste Faktor rechts auf $\frac{\partial f}{\partial x}$ reduziert, so findet man die Formel (20) wieder:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\dfrac{\partial(f, y, z, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)}}{\dfrac{\partial(x, y, z, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)}}.$$

Analog findet man sofort

$$\frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(f, \varphi, z, \ldots)}{\partial(x, y, z, \ldots)} = \frac{\dfrac{\partial(f, \varphi, z, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)}}{\dfrac{\partial(x, y, z, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)}}$$

und im besondern

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\dfrac{\partial(z, \ldots)}{\partial(w, \ldots)}}{\dfrac{\partial(x, y, z, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)}} \quad \text{u. s. w.} \tag{36}$$

b) Um die Nützlichkeit der obigen Formeln zu zeigen, wollen wir uns auf den Fall von drei Veränderlichen x, y, z beschränken, die explicite als Funktionen von u, v, w gegeben sind, und uns die Aufgabe stellen die Derivierten von u, v, w nach x, y, z zu berechnen, ohne vorher die Ausdrücke von u, v, w als Funktionen von x, y, z aufzusuchen. Wir denken uns die beiden Tripel als bestehend aus unabhängigen Veränderlichen, sodaß

$$\mathfrak{J} = \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (u, v, w)} \gtrless 0$$

ist. Die Formel (20) liefert unmittelbar

$$(37)\quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\mathfrak{J}} \frac{\partial (y, z)}{\partial (v, w)}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\mathfrak{J}} \frac{\partial (z, x)}{\partial (v, w)}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\mathfrak{J}} \frac{\partial (y, z)}{\partial (w, u)}, \quad \ldots,$$

und die Aufgabe ist also gelöst. Man bemerke, daß es nicht nötig ist diese Derivierten zu kennen, um die Funktionaldeterminante von u, v, w in Bezug auf x, y, z und ihre Minoren zweiter Ordnung zu berechnen; denn auf Grund von (35) und (36) oder auch nach (37) hat man

$$\frac{\partial (u, v, w)}{\partial (x, y, z)} = \frac{1}{\mathfrak{J}}, \quad \frac{\partial (v, w)}{\partial (y, z)} = \frac{1}{\mathfrak{J}} \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial (v, w)}{\partial (z, x)} = \frac{1}{\mathfrak{J}} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \ldots .$$

Handelt es sich um die Berechnung der totalen Differentiale von u, v, w, so beginnt man damit, die totale Differentiation auf x, y, z anzuwenden. Darauf liefern die Relationen

$$(38)\qquad \begin{cases} dx = \dfrac{\partial x}{\partial u} du + \dfrac{\partial x}{\partial v} dv + \dfrac{\partial x}{\partial w} dw, \\[2ex] dy = \dfrac{\partial y}{\partial u} du + \dfrac{\partial y}{\partial v} dv + \dfrac{\partial y}{\partial w} dw, \\[2ex] dz = \dfrac{\partial z}{\partial u} du + \dfrac{\partial z}{\partial v} dv + \dfrac{\partial z}{\partial w} dw \end{cases}$$

die Werte

$$du = \frac{1}{\mathfrak{J}} \left[\frac{\partial (y, z)}{\partial (v, w)} dx + \frac{\partial (z, x)}{\partial (v, w)} dy + \frac{\partial (x, y)}{\partial (v, w)} dz \right] \text{ u. s. w.}$$

Aus ihnen kann man aufs neue die Formeln (37) ableiten.

c) Bei gewissen Anwendungen braucht man die Formeln (38), um die Summe $dx^2 + dy^2 + dz^2$ zu berechnen, die sich sofort in einen Ausdruck von der Form

$$a\,du^2 + b\,dv^2 + c\,dw^2 + 2f\,dv\,dw + 2g\,dw\,du + 2h\,du\,dv$$

verwandelt, wo zur Abkürzung gesetzt worden ist

$$a = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \quad b = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2, \quad \ldots, \quad f = \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial w}, \quad \ldots .$$

Es ist wichtig zu bemerken, daß, wenn die sechs Funktionen a, b, c, f, g, h bekannt sind, auch die Funktionaldeterminante $\mathfrak{J}$ bekannt ist. Man hat nämlich

$$(39)\qquad \mathfrak{J}^2 = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix},$$

und analog lassen sich die Summen

$$\sum \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2, \quad \sum \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2, \quad \ldots, \quad \sum \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \ldots$$

ausdrücken, deren Werte durch die Minoren $bc - f^2$, $ca - g^2$, ..., $gh - af$, ..., dividiert durch $\mathfrak{J}^2$ gegeben sind. Besonders bemerkenswert ist der Fall, wo f, g, h identisch null sind. Alsdann hat man nach den letzten Bemerkungen $\Delta u = \frac{1}{a}$ u. s. w., und man kann außerdem beweisen, daß

$$\Delta^2 u = \frac{1}{\mathfrak{J}} \frac{\partial}{\partial u} \frac{\mathfrak{J}}{a}, \quad \Delta^2 v = \frac{1}{\mathfrak{J}} \frac{\partial}{\partial v} \frac{\mathfrak{J}}{b}, \quad \Delta^2 w = \frac{1}{\mathfrak{J}} \frac{\partial}{\partial w} \frac{\mathfrak{J}}{c}$$

ist. Daraus folgt (vgl. § 571, d), um die Operation Δ^2 angewandt auf eine beliebige Funktion auszudrücken,

$$\Delta^2 = \sum \left(\Delta u \cdot \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \Delta^2 u \cdot \frac{\partial}{\partial u}\right) = \frac{1}{\mathfrak{J}} \sum \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathfrak{J}}{a} \frac{\partial}{\partial u}\right)$$

oder

$$(40) \quad \Delta^2 = \frac{1}{\sqrt{abc}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{bc}{a}} \cdot \frac{\partial}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{ca}{b}} \cdot \frac{\partial}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\sqrt{\frac{ab}{c}} \cdot \frac{\partial}{\partial w}\right)\right].$$

Dies ist die Lamésche Formel für den Raum.

d) Wenn x, y, z noch von einer andern Veränderlichen t abhängen, die von u, v, w unabhängig ist, so hängt im allgemeinen auch $\mathfrak{J}$ von t ab, und man kann in die Lage kommen die Derivierte $\mathfrak{J}'$ nach t berechnen zu müssen. Bezeichnet man durch einen Strich jede in Bezug auf t genommene Derivierte, so liefert die Regel für die Derivation der Determinanten (§ 373)

$$\mathfrak{J}' = \frac{\partial(x', y, z)}{\partial(u, v, w)} + \frac{\partial(x, y', z)}{\partial(u, v, w)} + \frac{\partial(x, y, z')}{\partial(u, v, w)}.$$

Dividiert man durch $\mathfrak{J}$, so erhält man die Formel

$$(41) \qquad (\log \mathfrak{J})' = \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial z},$$

welche in der Hydrodynamik gebraucht wird. Wir werden hier von ihr Gebrauch machen, um die Lamésche Formel anders[1]) zu beweisen. Man denke sich x, y, z als Funktionen der unabhängigen Veränderlichen ξ, η, ζ, t und die Derivierten x', y', z' (nach t) gleich bekannten Funktionen von x, y, z. Offenbar hängen auch u, v, w, als Funktionen von x, y, z, von ξ, η, ζ und von t ab. Ihre Derivierten nach t sind mit x', y', z' durch die Relationen

$$x' = u' \frac{\partial x}{\partial u} + v' \frac{\partial x}{\partial v} + w' \frac{\partial x}{\partial w}, \quad \ldots$$

verbunden. Wählt man x', y', z' gleich den drei ersten partiellen Derivierten einer Funktion $\varphi(x, y, z)$, so hat man

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = x' \frac{\partial x}{\partial u} + y' \frac{\partial y}{\partial u} + z' \frac{\partial z}{\partial u} = au' + hv' + gw', \quad \ldots.$$

Daraus ergibt sich, wenn man mit a_0, b_0, ..., h_0 die durch $\mathfrak{J}$ dividierten

1) Beltrami: „Memorie dell' Acc. di Bologna", serie 3ª, t. I, p. 467.

algebraischen Komplemente von $a, b, \ldots, h$ in der Determinante (39) bezeichnet,

$$\mathfrak{J} u' = a_0 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + h_0 \frac{\partial \varphi}{\partial v} + g_0 \frac{\partial \varphi}{\partial w}, \quad \ldots .$$

Dies vorausgeschickt wende man die Formel (41) auf die erste und die dritte Determinante in der Gleichung

$$\frac{\partial (x, y, z)}{\partial (\xi, \eta, \zeta)} = \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (u, v, w)} \cdot \frac{\partial (u, v, w)}{\partial (\xi, \eta, \zeta)}$$

an, nachdem man bemerkt hat, daß jene Formel auf die Determinante $\mathfrak{J}$ nicht mehr anwendbar ist, weil u, v, w nicht mehr unabhängig von t sind. Man erhält dann

$$\begin{aligned}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial z} &= (\log \mathfrak{J})' + \frac{\partial u'}{\partial u} + \frac{\partial v'}{\partial v} + \frac{\partial w'}{\partial w} \\ &= \frac{1}{\mathfrak{J}} \left[\frac{\partial}{\partial u} (\mathfrak{J} u') + \frac{\partial}{\partial v} (\mathfrak{J} v') + \frac{\partial}{\partial w} (\mathfrak{J} w') \right],\end{aligned}$$

d. h.

$$\Delta^2 \varphi = \frac{1}{\mathfrak{J}} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(a_0 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + h_0 \frac{\partial \varphi}{\partial v} + g_0 \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right) + \cdots \right].$$

Insbesondere hat man für $f = g = h = 0$

$$\mathfrak{J} = \sqrt{abc}, \; a_0 = \sqrt{bc/a}, \; b_0 = \sqrt{ca/b}, \; c_0 = \sqrt{ab/c}, \; f_0 = g_0 = h_0 = 0$$

und findet so die Formel (40) wieder.

Anwendungen auf die ebenen Kurven.

Differential des Bogens.

582. Die strenge Definition der Länge eines Kurvenbogens gibt zu äußerst schwierigen Fragen[1]) Veranlassung, die wir hier vermeiden wollen. Wir nehmen eben an, daß man den intuitiven Begriff der Bogenlänge besitzt, wenigstens bei den wenigen ebenen Kurven, die in den Anwendungen betrachtet werden. Bei diesen Kurven, die alle geometrisch darstellbar sind, ist auch folgende Annahme erlaubt: Jeder Bogen MM' ist so beschaffen, daß, wenn ein Endpunkt M' nach dem festgehaltenen Endpunkt M hinrückt, der Bogen schließlich nach einer und derselben Seite hin in seiner ganzen Ausdehnung konvex ist. Seine Länge wird also zwischen derjenigen der Sehne MM' und der Summe der Abschnitte der Tangenten in M und M',

1) Siehe z. B. den „Cours d'Analyse" von Jordan (2ème éd., 1er vol., pp. 90—107).

gemessen von den Berührungspunkten bis zum gemeinsamen Schnittpunkt Q, enthalten sein. Wird die Derivierte y' als stetig vorausgesetzt, so strebt die Gerade QM', ebenso wie MM', dem Zusammenfallen mit QM zu, und es sind daher die Winkel QMM' und $QM'M$ gleichzeitig mit MM' infinitesimal. Daraus folgt, daß die Verhältnisse von QM und von QM' zu ihren Projektionen auf MM' nach der Einheit konvergieren, und daß daher (§ 549) die genannten Längen sich von ihren Projektionen um höhere Infinitesimalen unterscheiden. Auch $QM + QM'$ unterscheidet sich also von MM' um eine höhere Infinitesimale, und das Gleiche läßt sich a fortiori von dem Bogen MM' sagen. Folglich ist

$$\lim \frac{\text{Bogen } MM'}{\text{Sehne } MM'} = 1.$$

583. Es bezeichne s die Länge eines Kurvenbogens, der einen Endpunkt in einem festen Punkte hat, welcher auf der Kurve beliebig gewählt ist. Der andere Endpunkt befinde sich in M. Offenbar variiert s gleichzeitig mit den Koordinaten x und y des Punktes M. Wenn dieser Punkt nach M' gelangt, dessen Koordinaten $x + \delta x$ und $y + \delta y$ sind, so geht der Bogen s über in $s + \delta s$, sodaß δs die Länge des Bogens MM' darstellt. Es sei l die Länge der Sehne MM', welche sich von δs und folglich (§ 552) auch von ds um eine höhere Infinitesimale unterscheidet. Setzt man in der Relation $l^2 = \delta x^2 + \delta y^2$ an Stelle von l, δx, δy bezüglich ds, dx, dy, so vernachlässigt man dabei sowohl rechts als links Infinitesimalen von einer höheren Ordnung. Da aber in der Gleichung, die man erhält,

$$(1) \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2$$

keine Infinitesimalen mehr auftreten, die nicht Differentiale sind, so kann man (§ 556) sicher sein, daß die Gleichung exakt ist. Diese wichtige Formel dient zur Berechnung von s. Sie sagt uns, daß, wenn man s als Funktion von x betrachtet, die Derivierte dieser Funktion $\sqrt{1 + y'^2}$ ist, und wir werden im siebenten Buche lernen, wie man eine Funktion bestimmt, wenn man ihre Derivierte kennt. Ist x die unabhängige Veränderliche, so stellt ds (§ 553) die Länge desjenigen Abschnitts der Tangente in M dar, welcher zwischen M und der Ordinate von M' liegt, und man hat nicht $ds =$ Bogen MM', außer wenn s die unabhängige Veränderliche ist. In allen Fällen stellt ds die Länge desjenigen Abschnitts der Tangente dar, welcher von dem Berührungspunkt (x, y) bis zu dem Punkte $(x + dx, y + dy)$ reicht.

584. Transformiert man (1) auf Polarkoordinaten, so erhält man (§ 558, d)

$$(2) \qquad ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

Man gelangt aber zu dieser Formel, wie zu der ersten, auch durch direkte geometrische Betrachtungen. Auf dem Radiusvektor OM' trage man $OM'' = OM = r$ ab, und P sei die Projektion von M auf OM'. Dann hat man $l^2 = MP^2 + PM'^2$, und in dieser Gleichung kann man l durch ds ersetzen. $MP = r \sin \delta\theta$ kann man zunächst durch $r\delta\theta$ und weiter durch $rd\theta$ ersetzen. Endlich kann man PM', indem man die Infinitesimale zweiter Ordnung $PM'' = r(1 - \cos \delta\theta)$ vernachlässigt, durch $M''M' = \delta r$ und dann durch dr ersetzen. Man erhält auf diese Weise die Relation (2), die notwendig exakt ist, da sie nur zwischen differentiellen Infinitesimalen besteht. Man kann auch ausgehen von der Relation

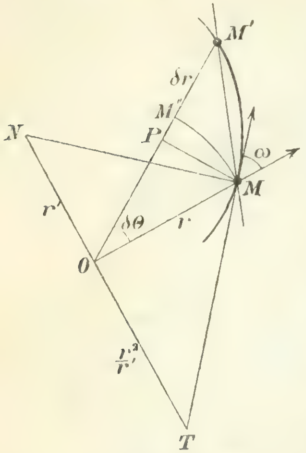

Fig. 29.

$$l^2 = r^2 + (r + \delta r)^2 - 2r(r + \delta r)\cos \delta\theta$$

und a priori sicher sein, daß auf der rechten Seite die nicht infinitesimalen sowie die von erster Ordnung infinitesimalen Glieder fortfallen müssen, und daß ds^2 durch den Inbegriff der infinitesimalen Glieder zweiter Ordnung allein exakt dargestellt werden wird, sobald in ihnen nur differentielle Infinitesimalen zurückbleiben. Und in der Tat reduziert sich der obige Ausdruck auf

$$l^2 = \delta r^2 + 4r(r + \delta r)\sin^2 \frac{\delta\theta}{2}\cdot$$

Wenn man hier l durch ds, δr durch dr, $\sin\frac{\delta\theta}{2}$ durch $\frac{1}{2}d\theta$ ersetzt und $rdrd\theta^2$ vernachlässigt, so findet man die Formel (2) wieder. Man benutzt dieselbe, um s zu berechnen, indem man bemerkt, daß s, betrachtet als Funktion von θ, die Derivierte $\sqrt{r^2 + r'^2}$ hat.

585. Wir wollen jetzt zeigen, daß die Differenz zwischen einem infinitesimalen Bogen und der zugehörigen Sehne im allgemeinen infinitesimal von dritter Ordnung ist in Bezug auf den Bogen selbst. In der Tat hat man (§ 564) nach der Taylorschen Formel

$$(3)\quad \delta x = dx + \tfrac{1}{2}d^2x + \tfrac{1}{6}d^3x + \cdots,\quad \delta y = dy + \tfrac{1}{2}d^2y + \tfrac{1}{6}d^3y + \cdots,$$

welches auch die unabhängige Veränderliche sein mag. Wenn sie s ist, so hat man (§ 558, e)

$$dx^2 + dy^2 = ds^2,\quad d^2x^2 + d^2y^2 = \frac{ds^4}{\varrho^2}$$

und erhält durch zweimalige Differentiation der ersten Gleichung

$$dxd^2x + dyd^2y = 0,\quad dxd^3x + dyd^3y = -\frac{ds^4}{\varrho^2}\cdot$$

Mithin wird

$$l^2 = \delta x^2 + \delta y^2 = ds^2 - \frac{ds^4}{12\varrho^2} + \cdots.$$

Vernachlässigt man nun höhere Infinitesimalen und schreibt insbesondere in der Gleichung

$$\delta s^2 - l^2 = \frac{ds^4}{12\varrho^2} + \cdots$$

$2ds$ statt $\delta s + l$, so findet man

$$\delta s - l = \frac{ds^3}{24\varrho^2} + \cdots$$

oder in präciser Form

$$\lim \frac{\text{Bogen } MM' - \text{Sehne } MM'}{(\text{Bogen } MM')^3} = \frac{1}{24\varrho^2}.$$

Um dieses Resultat in einem speziellen Fall zu verifizieren, betrachte man auf einem Kreise vom Radius ϱ einen Bogen $MM' = 2\varrho\alpha$. Die Länge der Sehne ist $MM' = 2\varrho \sin\alpha$, und die linke Seite der letzten Gleichung wird

$$\lim_{\alpha=0} \frac{\alpha - \sin\alpha}{4\varrho^2\alpha^3} = \frac{1}{24\varrho^2}.$$

In Bezug auf die behandelte Frage kann man also sagen, daß die Kurve sich in der Umgebung von M verhält wie ihr oskulierender Kreis (§ 348, e).

Tangente und Normale.

586. Auf einer Kurve, die in rechtwinkligen cartesischen Koordinaten durch die Gleichung $Y = f(X)$ dargestellt wird, wähle man einen Punkt M, dessen Koordinaten x und y sein mögen. Die Gleichung einer beliebigen Geraden, die durch M hindurchgeht, ist $Y - y = m(X - x)$, und man hat bekanntlich (§ 293) $m = y'$ für die Tangente und folglich $m = -\frac{1}{y'}$ für die Normale. Die Gleichungen der Tangente und der Normale sind also

$$(4) \qquad Y - y = y'(X - x), \qquad Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x),$$

wo y' für $f'(x)$ steht, d. h. den Wert von $f'(X)$ im Punkte M darstellt. In der Differentialrechnung bietet sich uns die Tangente unter einem noch einfacheren Gesichtspunkt dar, nämlich (§ 553) als die Verbindungsgerade des Punktes (x, y) und des Punktes $(x + dx, y + dy)$. Diese Bemerkung führt dazu, die Gleichungen der Tangente und der Normale unmittelbar unter der Form zu schreiben

$$(5) \qquad \frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy}, \quad (X - x)\,dx + (Y - y)\,dy = 0,$$

von welcher man sofort zu (4) gelangt, indem man $y'dx$ für dy schreibt und den gemeinsamen Faktor dx unterdrückt. Als vorteilhaft erweist sich die Form (5) besonders in dem Falle, wo die Kurve durch die Gleichungen $X = \varphi(t)$, $Y = \psi(t)$ dargestellt wird. Wenn ferner die Kurve durch die Gleichung $f(X, Y) = 0$ gegeben ist, so hat man in jedem Punkte (x, y)

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0,$$

und die Gleichungen (5) werden dann

$$(6) \qquad (X - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad \frac{X - x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Auch zu diesen kann man direkt gelangen. In der Tat ist die Richtung, längs welcher die Funktion $f(X, Y)$ den Wert, den sie im Punkte (x, y) hat, d. h. also den Wert 0, zu bewahren strebt, die Richtung der Tangente, und es sind daher (§ 568) die Richtungskosinus der Normale proportional zu den ersten partiellen Derivierten von f, berechnet in dem genannten Punkte, wobei vorausgesetzt wird, daß dieselben nicht beide verschwinden. Übrigens läßt sich die erste Gleichung (6) auch betrachten als diejenige, auf welche sich die Gleichung der Kurve selbst reduziert, wenn man für Punkte (X, Y), die zu (x, y) unendlich benachbart sind, die Infinitesimalen von höherer Ordnung vernachlässigt und beachtet, daß in

$$f(X, Y) = f(x, y) + (X - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial f}{\partial y} + \cdots$$

$f(x, y) = 0$ ist. Wir haben in der Tat bereits die Bemerkung gemacht (§ 553), daß unter den angegebenen Umständen die Kurve in der Umgebung des Berührungspunktes durch die Tangente ersetzt wird. In den Anwendungen ist es zweckmäßig die Formen (4), (5), (6) der Gleichungen der Tangente und der Normale gegenwärtig zu haben, um sie je nach der Zweckmäßigkeit anzuwenden.

587. Es ist auch nützlich die Gleichung der Tangente einer algebraischen Kurve in homogener Form zu schreiben zu wissen. Es sei $f(X, Y) = 0$ die Gleichung der Kurve in rationaler ganzer Form. Bekanntlich läßt man, um sie homogen zu machen, die Glieder vom höchsten Grade n ungeändert, während diejenigen von den Graden $n - 1$, $n - 2$, ... bezüglich mit Z, Z^2, ... multipliziert werden. Auf diese Weise gelingt es die Gleichung auf die homogene Form $f(X, Y, Z) = 0$ zu bringen, und man braucht dann nur $Z = 1$ zu setzen, um die ursprüngliche Form wiederzufinden. Für einen Punkt (x, y, z), der auf der Kurve liegt, hat man

$f(x, y, z) = 0$, und auf Grund des Eulerschen Theorems (§ 372) ist identisch

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = nf(x, y, z) = 0.$$

Nun haben wir gesehen, daß die Gleichung der Tangente in nicht homogenen cartesischen Koordinaten

$$(X - x)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 + (Y - y)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 = 0$$

lautet, wo $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1$ und $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1$ das bezeichnen sollen, was aus $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ wird, wenn man darin $z = 1$ setzt. Man hat aber

$$x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 + y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_1 = 0,$$

und die letzte Gleichung wird daher

$$X\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 + Y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_1 = 0.$$

Macht man sie homogen, so erhält man endlich

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

588. Die Gleichungen der Tangente und der Normale gebraucht man, wenn diese Geraden bei Fragen der analytischen Geometrie vorkommen. Handelt es sich aber nur darum, die Tangente oder die Normale in einem gegebenen Kurvenpunkte zu konstruieren, so genügt es einen zweiten Punkt zu finden, um durch seine Verbindung mit dem gegebenen Punkte die gewünschte Gerade zu erhalten. Im Hinblick darauf werden die Längen gewisser Strecken, der sogenannten Subtangente und Subnormale, berechnet. Wenn P die Projektion von M auf die Abscissenachse ist, wenn ferner T und N die Punkte sind, in denen die Tangente und die Normale in M die genannte Achse treffen, so nennt man die Strecke TP die Subtangente und die Strecke PN die Subnormale. Aus der Figur ergibt sich unmittelbar

$$TP = y\cot\varphi = \frac{y}{y'}, \quad PN = y\operatorname{tg}\varphi = yy'.$$

Macht von Polarkoordinaten Gebrauch, so ist es zur Bestimmung der Tangente vorteilhaft den Winkel ω zu kennen, den dieselbe mit dem Radiusvektor bildet. In dem Dreieck MPM', das wir bereits in § 584 betrachtet haben, hat man

$$\operatorname{tg}\omega = \lim\operatorname{tg}\widehat{OM'M} = \lim\frac{MP}{PM'} = \lim\frac{MM''}{M''M'} = \lim\frac{r\delta\theta}{\delta r} = \frac{r}{r'}\cdot$$

Errichtet man im Pol die Senkrechte auf dem Radiusvektor, so trifft sie in T die Tangente, in N die Normale, und man nennt Polarsubtangente die Strecke OT, Polarsubnormale die Strecke ON. Offenbar ist

$$OT = r \operatorname{tg} \omega = \frac{r^2}{r'}, \quad ON = r \cot \omega = r'.$$

Wenn man von der Länge der Normale in M spricht, so meint man damit die Länge desjenigen Abschnitts der Normale, der vom M bis zur Abscissenachse oder bis zu der im Pol auf dem Radiusvektor errichteten Senkrechten reicht, je nachdem man cartesische oder Polarkoordinaten benutzt. Die erwähnten Längen werden offenbar gemessen durch

$$y\sqrt{1 + y'^2} \quad \text{und} \quad \sqrt{r^2 + r'^2}.$$

589. Übungen. a) Bei der Parabel zweiter Ordnung ist die Konstruktion der Normale (vgl. § 294, a) äußerst einfach. Nimmt man nämlich als Achse der x die Achse der Kurve, so findet man, daß die Subnormale konstant ist, und dies ist eine charakteristische Eigenschaft der Parabel, da aus $yy' = a$ folgt $\frac{1}{2}y^2 = ax +$ Const. und (wenn man den Anfangspunkt auf der Kurve wählt) $y^2 = 2ax$.

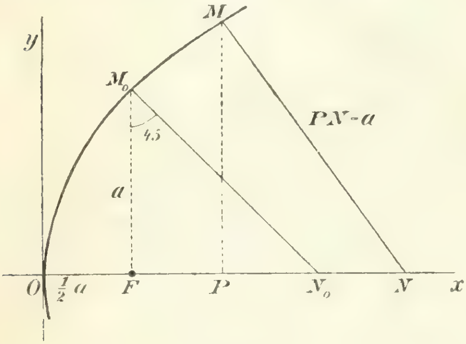

Fig. 30.

b) Welche Kurve hat eine konstante Subtangente? Es muß sein $\frac{y}{y'} = a$, d. h. die Derivierte von $\log y$ muß beständig gleich $\frac{1}{a}$ sein. Erinnert man sich also, daß zwei Funktionen mit gleichen Derivierten sich nur um eine Konstante unterscheiden können, so hat man

$$\log y = \frac{x}{a} + \text{Const.}$$

Die Konstante kann man gleich $\log a$ machen, indem man den Anfangspunkt in geeigneter Weise auf der x-Achse verschiebt, und man gelangt so zu der Gleichung einer *logarithmischen Kurve*:

$$y = ae^{\frac{x}{a}}.$$

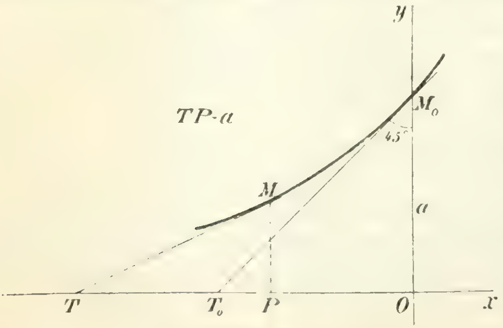

Fig. 31.

c) Eine der interessantesten Kurven (die wir schon in § 527, f betrachtet haben) ist die, welche durch die Gleichung $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ oder (§ 408) durch

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

dargestellt wird. Sie heißt *Kettenlinie*, weil, wie man in der Mechanik beweist, ein biegsamer und unausdehnbarer Faden, der schwer und homogen ist, gerade die Gestalt eines Bogens solch einer Kurve annimmt, wenn man ihn an seinen beiden Enden aufhängt. Außerdem gibt diese Kurve, mit dem Scheitel A nach oben, das Profil der Gewölbe ohne Reibung. Man hat

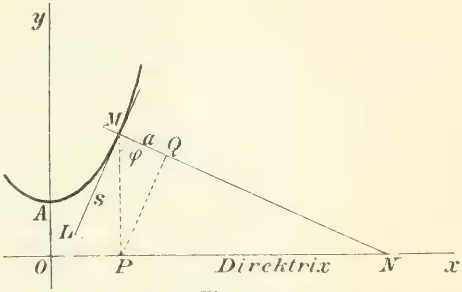

Fig. 32.

$$y' = \operatorname{sh}\frac{x}{a} = \operatorname{tg}\varphi,$$

sodaß φ die hyperbolische Amplitude von $\frac{x}{a}$ darstellt (§ 409). Daraus folgt

$$\operatorname{ch}\frac{x}{a} = \sec\varphi,$$

mithin $y\cos\varphi = a$. Also ist die Projektion der Ordinate auf die Normale konstant. Überdies leitet man aus

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{\cos\varphi} = \frac{y}{a} = a y''$$

ab $ds = a\,dy'$, mithin $s = a\operatorname{tg}\varphi$, wenn man die Bogen vom Scheitel A aus rechnet. Man rektifiziert also den Bogen AM, indem man die Ordinate auf die Tangente projiziert.

d) Man beweist ferner in der Mechanik, daß man die Dichtigkeit von einem Ende des Fadens zum andern derart variieren lassen kann, daß derselbe auf seiner ganzen Länge dem Zerreißen einen gleichen Widerstand entgegensetzt. Aber in diesem Falle ist die Gestalt, welche der Faden annimmt, die einer andern Kurve, welche man der Sachlage entsprechend als *Kettenlinie gleichen Widerstandes* bezeichnet. Sie wird durch die Gleichung $y = -a\log\cos\frac{x}{a}$ dargestellt. Diese Kurve besteht aus unendlich vielen Zweigen, die man erhält, indem man den zwischen den Asymptoten[1]) $x = \pm\frac{1}{2}\pi a$ enthaltenen Zweig, der die Abscissenachse im Anfangspunkt berührt, und sich dort annähernd verhält wie die Parabel $x^2 = 2ay$, parallel zu der genannten Achse nach beiden Seiten wiederholt um $2\pi a$ verschiebt. Dieser zentrale Zweig gibt, mit dem Scheitel nach oben, das Profil der Gewölbe ohne Überlastung.

e) Sehr merkwürdig ist die *logarithmische Spirale*, d. h. die Kurve, welche die von einem Punkte ausgehenden Geraden unter konstantem

---

1) Von den Asymptoten, die bereits aus der analytischen Geometrie bekannt sind, werden wir ausführlicher in § 596 handeln.

Winkel trifft. Wenn ω konstant ist, und man setzt $m = \cot\omega$, so ist aus $\operatorname{tg}\omega = \frac{r}{r'}$ zu entnehmen $\frac{r'}{r} = m$, mithin $\log r = m\theta + \log a$ und endlich $r = ae^{m\theta}$. Das ist die (uns aus dem in § 412 Gesagten bereits bekannte) Gleichung der logarithmischen Spirale. Die Polarsubnormale ist $r' = mr$, die Subtangente $\frac{r^2}{r'} = \frac{r}{m}$. Polarsubtangente und Polarsubnormale sind also proportional zu dem Radiusvektor. Weiter hat man

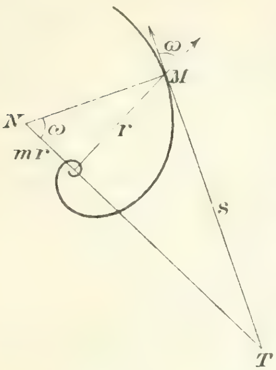

Fig. 33.

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + r'^2} = \frac{\sqrt{1+m^2}}{m} r', \; s = \frac{r}{\cos\omega} = MT.$$

Während M die Kurve durchläuft, findet der Spiralenbogen, gerechnet vom Pol bis zum Punkte M, in jedem Augenblick seine Rektifikation in MT. Aus dieser Eigenschaft folgt unmittelbar eine andere, wegen welcher die logarithmische Spirale in der Praxis benutzt wird: Wenn die Spirale ohne zu gleiten auf einer Geraden rollt, so beschreibt ihr Pol eine Gerade. Endlich bietet sich uns hier Gelegenheit zu der Bemerkung, daß das Verhältnis eines infinitesimalen Bogens zu seiner Sehne (vgl. § 582) unter Umständen nicht nach 1 konvergiert. In der Tat, wenn M längs einer logarithmischen Spirale dem Pol O dieser Kurve zustrebt, so bleibt das Verhältnis der Sehne OM zu dem Bogen OM unaufhörlich gleich $\cos\omega$. Man beachte jedoch, daß die Tangente in O nicht existiert.

f) Will man eine Kurve mit konstanter Polarsubnormale haben, so muß man setzen $r' = a$. Daraus folgt bei passender Orientierung der Polarachse: $r = a\theta$. Die durch diese Gleichung dargestellte Kurve heißt *archimedische Spirale*. Während θ ins Unendliche wächst, geht ω von 0 bis $\frac{\pi}{2}$, da $\operatorname{tg}\omega = \theta$ ist, und die Kurve geht daher vom Pol aus tangential zur Polarachse, um dann immer mehr und mehr normal zu ihren Radienvektoren zu werden. Offenbar liegen die Punkte N, die Endpunkte der Polarsubnormalen, auf einem Kreise vom Radius a, der seinen Mittelpunkt im Pol hat. Von jedem Punkte dieses Kreises aus lassen sich unendlich viele Normalen zur Kurve ziehen, deren Inzidenzpunkte auf einer Geraden liegen, welche den Pol enthält. Aber diese Eigenschaft ist weit entfernt für die archimedische Spirale charakteristisch zu sein. So z. B. erfreuen sich dieser Eigenschaft auch die durch die Gleichung

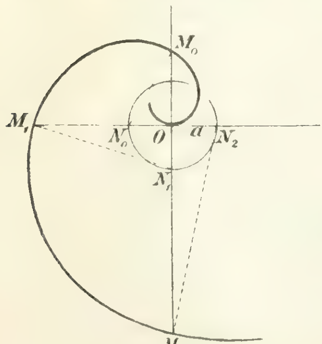

Fig. 34.

$$\theta = \frac{r}{a} + k \log\frac{r}{a}$$

dargestellten Kurven, zu welchen, für $k = 0$, die archimedische Spirale gehört. Eine andere Eigenschaft dieser Kurve läßt sich direkt aus der

Gleichung $r = a\theta$ ableiten, wenn man einen zu dem Kreise vom Radius a konzentrischen Kreis konstruiert, dessen Radius beliebig, aber größer als a ist, und dann von den Punkten Q und Q', in denen die Radienvektoren OM und OM' die Peripherie des genannten Kreises treffen, die Tangenten QP und $Q'P'$ an den andern Kreis zieht. Man bemerke in der Tat, daß wegen der offenbaren Kongruenz der beiden rechtwinkligen Dreiecke OPQ und $OP'Q'$ der Winkel POP' gleich QOQ', d. h. gleich $\delta\theta$ ist, die Länge des Bogens PP' also $a\delta\theta = \delta r$. Fixiert man nun in A den Anfangspunkt der Bogen auf dem inneren Kreise, so hat man

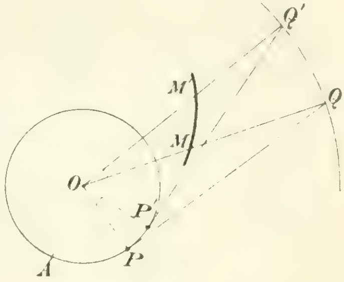

Fig. 35.

$$\text{Bogen } PP' = \text{Bogen } AP' - \text{Bogen } AP,$$
$$\delta r = OM' - OM = QM - Q'M',$$

und daraus folgt, wenn man noch $PQ = P'Q'$ hinzufügt,

$$\text{Bogen } AP + PQ + QM = \text{Bogen } AP' + P'Q' + Q'M',$$

d. h. der längs der Kurve bewegliche Punkt M kann mit dem festen Punkt A durch einen biegsamen und unausdehnbaren Faden $APQM$ verbunden werden, der beständig gespannt, aber gezwungen ist sich an den Kreis anzulegen und durch Q hindurchzugehen. Auf dieser Bemerkung beruht ein ziemlich einfacher Apparat[1]), der zum Zeichnen der archimedischen Spirale dienen kann. Derselben Eigenschaft ($\delta r = a\delta\theta$) ist der Gebrauch zu danken, den man in der Praxis von unserer Spirale macht, als Profil eines Exzenters, der geeignet ist eine gleichförmige Bewegung hervorzubringen.

g) Eine andere Kurve ist charakterisiert durch die Eigenschaft eine konstante Polarsubtangente zu haben. Sie heißt *hyperbolische Spirale* und wird dargestellt durch die Gleichung $r\theta = a$. Für unendlich kleines θ ist r unendlich groß, und die Kurve erstreckt sich daher ins Unendliche; aber dies geschieht asymptotisch zu einer Geraden, welche von der Polarachse den Abstand a hat, da

$$\lim_{\theta=0} r\sin\theta = a$$

ist. Wenn dagegen θ ins Unendliche wächst, so konvergiert r nach Null, indem es beständig abnimmt, d. h. die Kurve wickelt sich unbegrenzt um den Pol herum, ohne ihn jemals zu erreichen. Die Punkte T, die Endpunkte der Subtangenten, liegen offenbar auf einem Kreise vom Radius a mit dem Mittelpunkt im Pol. Von jedem

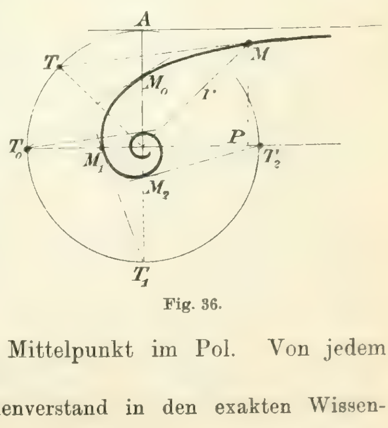

Fig. 36.

1) Clifford: „Der gesunde Menschenverstand in den exakten Wissenschaften“.

Punkte dieses Kreises lassen sich an die Kurve unendlich viele Tangenten ziehen, und die Berührungspunkte liegen auf einer Geraden, die den Pol enthält. Hierdurch wird die völlige Unbestimmtheit der Tangente im Pol anschaulich.

h) Die letzte Eigenschaft der hyperbolischen Spirale kommt auch andern Kurven zu, insbesondere der *Kochleoide*, einer Kurve, die durch die Gleichung $r = a\frac{\sin\theta}{\theta}$ dargestellt wird. In der Tat ist

$$\cot\omega = \frac{r'}{r} = \cot\theta - \frac{1}{\theta}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{\sin(\omega-\theta)}{\sin\omega} = \frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{r}{a}.$$

Andererseits hat man in dem Dreieck OMS, dessen Scheitel S der Schnittpunkt der Tangente in M mit der zur Polarachse in Bezug auf den Radiusvektor symmetrischen Geraden ist,

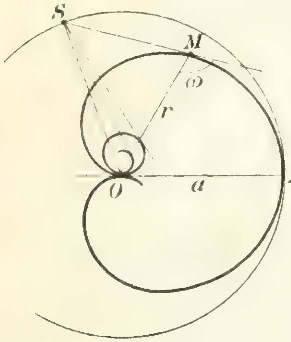

Fig. 37.

$$OS = \frac{r\sin\omega}{\sin(\omega-\theta)} = a,$$

d. h. S gehört dem Kreise vom Radius a an, der seinen Mittelpunkt im Pol hat. Also laufen die Tangenten in den unendlich vielen Punkten, die einem und demselben Radiusvektor angehören, in einem Punkte S des genannten Kreises zusammen, gerade so wie wir es bei der hyperbolischen Spirale haben. Nur ist im Falle der Kochleoide der Punkt S symmetrisch zu dem Scheitel A in Bezug auf den Radiusvektor, während bei der andern Kurve S der Senkrechten angehört, die im Pol auf dem Radiusvektor errichtet ist.

i) Die durch die Gleichung $r = \frac{a\theta}{\sin\theta}$ dargestellte Kurve heißt *Quadratrix.* Sie besteht aus einer unendlichen Zahl von Zweigen, unter denen einer, der zwischen den Asymptoten $x = \pm\pi a$ enthalten ist, eine gewisse Ähnlichkeit hat mit einem Zweig von einer Kettenlinie gleichen Widerstandes. Die Kurve ist besonders bemerkenswert wegen der Anwendung, welche die Alten[1]) bei dem Problem der Quadratur des Kreises von ihr gemacht haben. Die Normale in irgend einem Punkte läßt sich auf Grund der Bemerkung konstruieren, daß die Projektion der Polarnormale auf die Polarachse konstant ist. In der Tat ergibt sich aus $r\sin\theta = a\theta$ durch Derivation

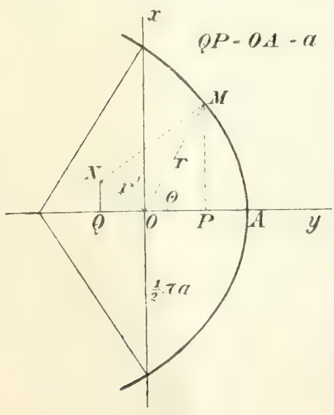

Fig. 38.

$$r\cos\theta + r'\sin\theta = a.$$

Aus der Gleichung in cartesischen Koor-

1) Siehe die „Vorlesungen über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie“ von F. Klein.

dinaten $\left(y = x \cot \frac{x}{a}\right)$ leitet man, indem man für $x \cot \frac{x}{a}$ seine Entwickelung $a - \frac{x^2}{3a} + \cdots$ setzt, ab, daß sich die Kurve in der Umgebung des Scheitels verhält wie die Parabel $x^2 = 3ay$.

j) Wenn man bei allen Radienvektoren einer Kurve eine konstante Länge hinzufügt oder abzieht, so erhält man eine zweite Kurve, welche eine Konchoide der ersten heißt. Da die Funktion r' ungeändert bleibt, wenn man zu r eine Konstante addiert, so sieht man sofort, daß die Normalen aller Konchoiden einer Kurve in Punkten, die auf einem und demselben Radiusvektor liegen, in einem Punkte der Senkrechten zusammenlaufen, welche im Pol auf dem Radiusvektor errichtet ist. Hierin hat man ein Mittel, um die Normalen einer Kurve zu konstruieren, wenn man die Normalen irgend einer von ihren Konchoiden kennt. Es ist interessant zu bemerken, daß die Konchoiden einer archimedischen Spirale in Bezug auf den Pol lauter kongruente Spiralen sind und die unendlich vielen Lagen darstellen, welche die ursprüngliche Spirale bei Drehung um den Pol annimmt. Bemerkenswert ist die eigentlich so genannte *Konchoide*, d. h. die Konchoide der Geraden. Sie hat zwei verschiedene Formen, je nachdem der zu addierende oder zu subtrahierende Abschnitt kleiner oder größer ist als der Abstand des Pols von der Geraden. Diese Kurve wurde, wie die Quadratrix und andere Kurven, erdacht, um die Winkel in drei gleiche Teile zu teilen[1]).

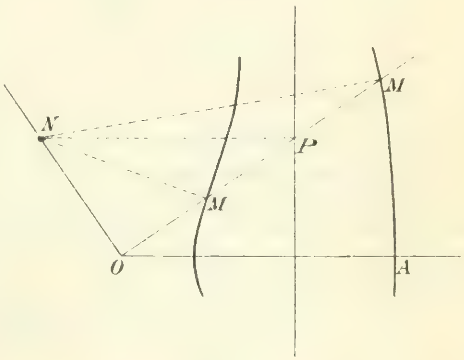

Fig. 39.

k) Noch wichtiger ist die Konchoide des Kreises in Bezug auf einen seiner Punkte: $r = a \cos\theta + b$. Sie heißt *Schnecke* und hat drei verschiedene Formen, je nachdem die Länge b (die man immer als positiv voraussetzen kann) kleiner als a ist oder zwischen a und $2a$ enthalten oder größer als $2a$ ist. Für $b = a$ hat man eine spezielle Schnecke, die sogenannte *Kardioide*, welche sozusagen die Scheidegrenze bildet zwischen dem Typus von Schnecken, die den Pol enthalten und eine innere Schleife haben $(b < a)$, und den andern $(b > a)$, welche den Pol nicht enthalten. Um übrigens zu ermitteln, ob die Kurve durch den Pol hindurchgeht und welches die Geraden sind, die sie in diesem Punkte berührt, braucht man nur $r = 0$ zu setzen. Dann findet man $\cos\theta = -\frac{b}{a}$, eine Gleichung, die

1) Klein: „Vorlesungen u. s. w.". Über eine sehr große Zahl von Kurven findet man Orientierung in dem Buche von Loria: „Spezielle algebraische und transcendente Kurven" (Leipzig, Teubner).

für θ nur im Falle $b \leq a$ reelle Werte liefert. Will man wissen, ob die Kurve die Polarachse in andern Punkten trifft, so muß man $\theta = n\pi$ setzen und die Längen

$$r = (-1)^n a + b$$

im positiven oder im negativen Sinn auf der Polarachse abtragen, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Man erhält auf diese Weise zwei Punkte, die in den Abständen $a + b$ und $a - b$ vom Pol liegen, und man sieht, daß für $b > a$ die Kurve den Pol in allen Richtungen umgibt. Weiter unten werden wir sehen, daß nur für $b \geqq 2a$ die Kurve überall konvex ist. Um die Normale in einem beliebigen Punkte M zu konstruieren genügt es M mit demjenigen Punkte zu verbinden, der auf dem Kreise dem Schnittpunkt mit dem Radiusvektor diametral gegenüberliegt.

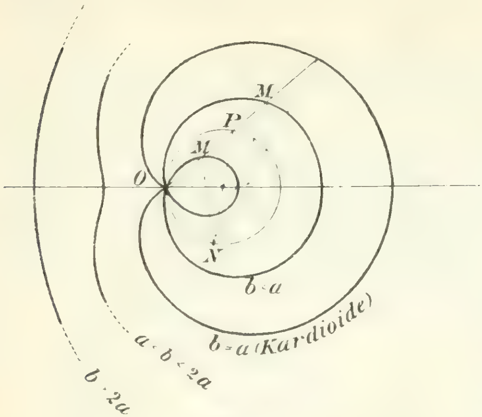

Fig. 40.

l) Wenn man einer Kurve $r = f(\theta)$ eine andere entsprechen läßt, die durch die Gleichung

$$r = \frac{a f(\theta)}{a + f(\theta)}$$

definiert ist, so braucht man nur zu bemerken, daß $\frac{r^2}{r'} = \frac{f^2}{f'}$ ist, um sich zu überzeugen, daß die Tangenten in solchen Punkten der beiden Kurven, welche demselben Wert von θ entsprechen, sich auf der Senkrechten treffen, die im Pol auf dem Radiusvektor errichtet ist. Unter den Kurven, die der Geraden $r = \frac{p}{k \cos\theta}$ entsprechen, findet sich insbesondere der Kegelschnitt $r = \frac{p}{1 + k\cos\theta}$, und man erhält auf diese Weise eine Konstruktion der Tangenten eines Kegelschnitts, die im Grunde mit der folgenden bekannten Eigenschaft gleichwertig ist: Wenn sich zwei Geraden rechtwinklig in einem der beiden Brennpunkte eines Kegelschnitts schneiden, so trifft jede von ihnen die Direktrix, welche zu dem betrachteten Brennpunkt gehört, im Pole der andern Geraden.

m) Man bezeichnet als *Sinusspiralen*[1]) die Kurven, welche durch die Gleichung $r^m = a^m \sin m\theta$ dargestellt werden. Da man hat

$$r^{m-1} r' = a^m \cos m\theta, \qquad \operatorname{tg}\omega = \frac{r}{r'} = \operatorname{tg} m\theta,$$

1) Wegen der Eigenschaften dieser und anderer analoger Kurven siehe das zitierte Werk von Loria, sowie meine „Vorlesungen über natürliche Geometrie", S. 54.

so sieht man, daß ω proportional zu θ variiert. Es gilt also folgendes: Wenn der Radiusvektor sich gleichförmig um den Pol dreht, so dreht sich die Tangente gleichförmig um den Berührungspunkt. Aus diesem Grunde heißen die Sinusspiralen auch Kurven proportionaler Inflexion. Es gehören zu ihnen einige bekannte Kurven, wie die Parabel (mit dem Brennpunkt im Pol) für $m = -\frac{1}{2}$ und die gleichseitige Hyperbel (mit dem Mittelpunkt im Pol) für $m = -2$. Für $m = \frac{1}{2}$ findet man die Kardioide wieder, und für $m = 2$ erhält man eine andere bemerkenswerte Kurve, die sogenannte *Lemniskate*. Sie geht, wie jede andere einem positiven Wert von m entsprechende Sinusspirale durch den Pol und liegt ganz im Endlichen. Dagegen erstrecken sich diejenigen Sinusspiralen, welche negativen Werten von m entsprechen, ins Unendliche und gehen nicht durch den Pol.

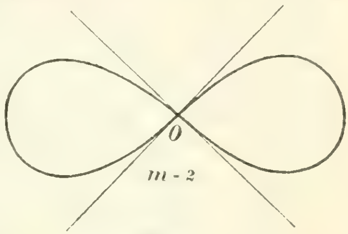

Fig. 41.

590. Der Fundamentalsatz der Differentialrechnung (§ 549) läßt sich auch in geometrischer Form nutzbar machen. Wenn es sich z. B. darum handelt, an eine Kurve in einem Punkte M die Tangente zu ziehen, so kann man den Punkt M', der auf der Kurve unendlich benachbart zu M ist, durch einen Punkt M'' ersetzen, der unendlich benachbart zu M' ist, vorausgesetzt, daß die Entfernung $M'M''$ im Vergleich zu MM' unendlich klein ist, daß man also hat $\lim \frac{M'M''}{MM'} = 0$. Läßt man in der Tat die Existenz der Tangente zu, der MM' zustrebt, so muß auch MM'' dieselbe Gerade als Grenzlage haben, da in dem Dreieck $MM'M''$, wie beschaffen auch der Winkel bei M'' sein mag,

$$\lim \sin \widehat{M'MM''} = \lim \frac{M'M''}{MM'} \sin \widehat{MM''M'} = 0$$

ist. Wir wollen gleich einige Beispiele[1]) hierzu behandeln.

a) Wenn ein Kreis auf einer Geraden rollt, ohne zu gleiten, so beschreibt jeder Punkt seiner Peripherie eine Kurve, welche *Cykloide* heißt. Es seien N und N' die Punkte, in denen der Kreis, betrachtet in zwei unendlich benachbarten Lagen, die Gerade berührt. M und M' seien die zugehörigen Lagen des die Cykloide beschreibenden Punktes. Um den Übergang von M nach M' zu bewerkstelligen, kann man sich offenbar denken, daß der Kreis zunächst um seinen Mittelpunkt derart sich dreht, daß der Punkt M nach L gebracht wird, wobei er sich von dem Punkt N (der Geraden) um einen Bogen ML gleich NN' entfernt. Darauf wird der Kreis parallel zu der Geraden verschoben und dadurch in seine neue

1) Der Leser findet ausgedehntere Anwendungen dieses Prinzips in den alten, aber immer noch interessanten „Éléments de Calcul infinitésimal" von Duhamel (t. I, livre I).

Lage gebracht, wobei der Punkt M, der sich bereits in L befindet, nach M' gelangt, indem er die Strecke $LM' = NN'$ beschreibt. Nunmehr kann man auf dieser Strecke M' durch einen Punkt M'' ersetzen derart, daß $LM'' = LM$ ist. Man vernachlässigt dabei die Differenz

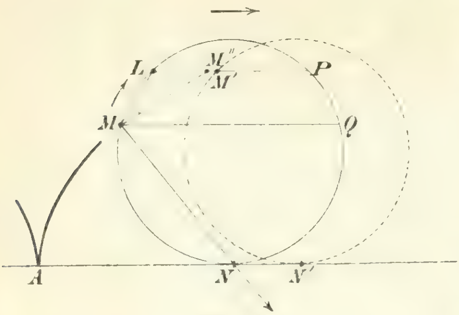

Fig. 42.

$$LM' - LM''$$

$$= \text{Bogen } LM - \text{Sehne } LM,$$

welche unendlich klein von dritter Ordnung ist. Die Normale der Cykloide im Punkte M kann man jetzt betrachten als die Grenzlage der Senkrechten, die in L auf MM'' errichtet ist. Wenn die durch L und M zu der festen Geraden gezogenen Parallelen den Kreis in P und Q schneiden, so muß, da das Dreieck LMM'' gleichschenklig ist, die genannte Senkrechte den Bogen MNP halbieren. Folglich halbiert die Normale in M den Bogen MNQ und geht also durch N hindurch. Diese Eigenschaft wird später (§ 595, n) durch die Rechnung bestätigt werden.

b) Wir wollen die Kurve betrachten, welche von dem Scheitel M eines konstanten Winkels beschrieben wird, dessen Schenkel sich in der Ebene tangential zu zwei gegebenen Kurven bewegen. P und Q seien die Berührungspunkte für eine gegebene Lage des Winkels, P' und Q' die analogen Punkte, wenn der Scheitel sich in der Lage M' befindet, die zu M unendlich benachbart ist. M'' sei der Schnittpunkt der beiden Parallelen, die durch P und Q zu den Schenkeln des Winkels in seiner zweiten Lage gezogen sind. Man bemerke, daß die Abstände des Punktes M'' von diesen Schenkeln im allgemeinen unendlich klein von zweiter Ordnung sind, da jeder solche Abstand gleich ist dem Abstand eines zum Berührungspunkt unendlich benachbarten Kurvenpunktes von der Tangente. Daraus ist leicht zu folgern, daß auch $M'M''$ unendlich klein von einer höheren Ordnung ist, und daß daher die gesuchte Tangente die Grenzlage der Geraden MM'' ist. Aber wegen der Gleichheit der Winkel M und M'' gehört der Punkt M'' dem festen Kreise MPQ an, und MM'' strebt also danach, diesen Kreis in M zu berühren. Mithin wird die Normale des Ortes der Scheitel im Punkte M erhalten, indem man M mit dem Schnittpunkt der Normalen der gegebenen Kurven in P und Q verbindet.

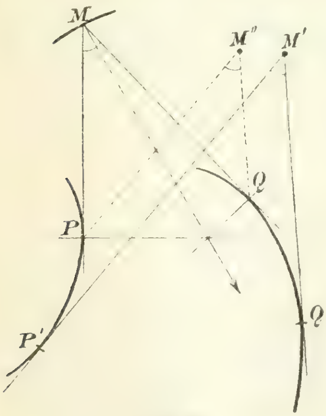

Fig. 43.

c) Als Fußpunktkurve einer Kurve in Bezug auf einen Punkt O

bezeichnet man den Ort der Fußpunkte der von O aus auf die Tangenten der Kurve gefällten Lote. Wenn M ein Punkt dieser Kurve ist und P die Projektion von O auf die Tangente in M, so erhält man die Normale der Fußpunktkurve in P, indem man P mit dem Mittelpunkt von OM verbindet. Diese Konstruktion läßt sich sofort aus der vorigen herleiten durch die Bemerkung, daß im vorliegenden Falle der Winkel ein rechter ist und eine der beiden Kurven sich auf einen Punkt reduziert. Auf diese Weise findet man z. B. die früher (§ 589, k) bereits erhaltene Konstruktion für die Normalen einer Schnecke wieder. Man bestätigt nämlich leicht, daß die Kurve $r = a\cos\theta + b$ sich auch als die Fußpunktkurve eines Kreises vom Radius b in Bezug auf einen Punkt betrachten läßt, der in der Entfernung a vom Mittelpunkt liegt. Hat man insbesondere zwei sich berührende Kreise, deren einer den andern umschließt und einen doppelt so großen Radius hat, so ist die Fußpunktkurve des äußern Kreises in Bezug auf den Berührungspunkt eine Konchoide des innern Kreises, und zwar ist sie eine Kardioide.

d) Zum Schluß wollen wir eine Ellipse betrachten. M und M' seien zwei unendlich benachbarte Punkte auf dieser Kurve, F und F' die Brennpunkte. Ferner sei P die Projektion von M auf $M'F$ und P' die von M' auf MF'. Abgesehen von Infinitesimalen zweiter Ordnung kann man schreiben

$$M'P = M'F - MF, \quad MP' = MF' - M'F',$$
$$M'P - MP' = (M'F + M'F') - (MF + MF') = 0.$$

Folglich ist $M'P = MP'$. Weiter erhält man, wenn man durch MM' dividiert, $\cos\widehat{MM'F} = \cos\widehat{M'MF'}$ und endlich durch Grenzübergang $\widehat{TMF} = \widehat{TMF'}$, d. h. die Tangente ist gleich geneigt gegen die beiden Radienvektoren, die von den Brennpunkten ausgehen. Dies ist eine charakteristische Eigenschaft der Ellipse; denn aus der letzten Gleichung erhält man, indem man den umgekehrten Weg verfolgt, die exakte Gleichung $dMF + dMF' = 0$ und endlich $MF + MF' = \text{Const.}$ In analoger Weise führt man den Beweis im Falle der Hyperbel, und noch einfacher gestaltet er sich bei der Parabel.

Krümmung.

591. Definitionen. Als Kontigenzwinkel wird das Differential bezeichnet, durch welches der Winkel zwischen den Tangenten einer Kurve in zwei unendlich benachbarten Punkten ersetzbar (vgl. § 556) ist. Sein Verhältnis zu dem Differential des Bogens heißt die Krümmung der Kurve in dem betrachteten Punkte. Offenbar ist, wenn φ die Neigung der Tangente gegen eine feste Gerade bedeutet, $d\varphi$ der Kontingenzwinkel, und die Krümmung wird also gemessen durch die Derivierte von φ nach dem Bogen s. Um die hier gegebene Definition der Krümmung zu rechtfertigen, bemerke man folgendes: Wenn man außer dem Punkte M auf der Kurve einen Punkt M' wählt, der nahe genug an M liegt (vgl. § 582), damit der Bogen MM' überall nach derselben Seite hin konvex ist, so ist es durchaus natürlich zu sagen, dieser Bogen sei für einen gegebenen Wert δs seiner Länge um so mehr gekrümmt, je größer der Winkel $\delta\varphi$ seiner äußersten Tangenten ist. Es ist infolgedessen natürlich, als Maß der Krümmung des genannten Bogens das Verhältnis $\frac{\delta\varphi}{\delta s}$ anzunehmen, welches gerade nach $\frac{d\varphi}{ds}$ konvergiert, wenn man bei festgehaltenem M den Punkt M' auf der Kurve nach M hinrücken läßt. Dies vorausgeschickt sei nun die feste Gerade die Abscissenachse. Dann sind die Richtungskosinus der Tangente

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi, \quad \frac{dy}{ds} = \sin\varphi,$$

und aus diesen Gleichungen ergibt sich durch Derivation

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\sin\varphi\frac{d\varphi}{ds}, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \cos\varphi\frac{d\varphi}{ds},$$

mithin (§ 558, d)

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{ds^3} = \frac{d\varphi}{ds}. \tag{7}$$

Im Falle eines Kreises vom Radius ϱ sagt uns diese Formel, daß die Krümmung in allen Punkten beständig durch $\frac{1}{\varrho}$ ausgedrückt wird, und man kann daher folgendes behaupten: Die Krümmung einer beliebigen ebenen Kurve wird in jedem Punkte gemessen durch die Krümmung ihres oskulierenden Kreises (§ 348, e). Demgemäß heißen Radius und Zentrum des oskulierenden Kreises auch Krümmungsradius und Krümmungszentrum.

592. Die Definition der Krümmung läßt sich auch in anderer Weise rechtfertigen, indem man zunächst als Maß für die Krümmung eines Kreises den reziproken Wert der Maßzahl des Radius annimmt. Das kann man offenbar tun auf Grund der Bemerkung, daß die kleinen Kreise im gewöhnlichen Sinne des Wortes mehr gekrümmt sind als die großen. Um nunmehr die Krümmung einer beliebigen Kurve in dem Punkte M zu messen, betrachte man alle Kreise, welche die Kurve in M berühren und zusammen mit ihr alle nach derselben Seite hin konkav sind. Offenbar kann man, und zwar wieder auf Grund des intuitiven Begriffs, den man von der Krümmung hat, sagen, daß die gegebene Kurve stärker gekrümmt ist als die äußeren Kreise und schwächer gekrümmt als die inneren. Man wird auf diese Weise zu der Behauptung geführt, daß die Kurve ebenso stark gekrümmt ist, wie ihr oskulierender Kreis. Vorher muß man aber beweisen, daß dieser gerade die Scheidegrenze zwischen den inneren und den äußeren Kreisen bildet. In der Tat hat man nun, wenn r der Radius eines Tangentialkreises der Kurve in M ist und h der Abstand des Punktes M' von diesem Kreise,

$$(2r + h)h = (\delta x + r\sin\varphi)^2 + (\delta y - r\cos\varphi)^2 - r^2,$$

mithin bei Vernachlässigung der Infinitesimalen von höherer als dritter Ordnung

$$2rh = l^2 - 2r\frac{dx\,\delta y - dy\,\delta x}{ds} + \cdots$$

oder, wenn man sich an das in § 585 Gesagte erinnert,

$$h = \frac{ds^2}{2r} - \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{2\,ds} - \frac{dx\,d^3y - dy\,d^3x}{6\,ds} - \cdots.$$

Wählt man s als unabhängige Veränderliche, so wird

$$dx\,d^2y - dy\,d^2x = \frac{ds^3}{\varrho}, \quad dx\,d^3y - dy\,d^3x = ds^3\,d\frac{1}{\varrho}.$$

Also ist

$$h = \frac{ds^2}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho}\right) + \frac{ds^2\,d\varrho}{6\varrho^2} + \cdots.$$

Im allgemeinen ist h infinitesimal von zweiter Ordnung, und zwar positiv oder negativ in der Umgebung von M, je nachdem $r < \varrho$ oder $r > \varrho$ ist, d. h. die Punkte M' in genügender Nähe von M liegen alle außerhalb oder alle innerhalb des Kreises, je nachdem dieser innerhalb oder außerhalb des oskulierenden Kreises liegt. Für $r = \varrho$ dagegen wird der Abstand h infinitesimal von höherer als zweiter Ordnung und hat das Zeichen von $d\varrho$. Daraus folgt, wenn die Derivierte von ϱ nach s in M als stetig und von Null verschieden vorausgesetzt wird, und wenn man sich die Kurve im Sinne der wachsenden Bogen durchlaufen denkt, daß die Punkte M' in genügender Nähe von M vor M im Innern und nach M außerhalb des oskulierenden Kreises liegen, falls die Krümmung abnimmt. Dagegen liegen, falls die Krümmung mit s zunimmt, die Punkte M' vor M innerhalb und nachher außerhalb. Im allgemeinen also durchsetzt der oskulierende Kreis die Kurve in dem Punkte, in welchem er sie berührt. Jedoch kann es vorkommen, daß dies nicht der Fall ist, in Punkten, für welche $d\varrho$ verschwindet, für welche daher h mindestens von vierter Ordnung infinitesimal wird. Auf alle Fälle ist aber der oskulierende Kreis einer Kurve in einem Punkte M charakterisiert durch die Eigenschaft, daß die zu M unendlich benachbarten Kurvenpunkte M' von

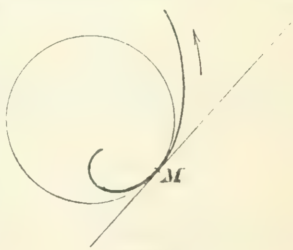

Fig. 44.

ihm Abstände haben, die infinitesimal von höherer als zweiter Ordnung sind.

593. Ist H der Schnittpunkt der Normalen in M und M', so läßt sich leicht zeigen, daß das Krümmungszentrum in M die Grenzlage des Punktes H ist, wenn man bei festgehaltenem M den Punkt M' nach M hinrücken läßt. Bezeichnet man in der Tat mit n die Länge der Strecke MH, so ist der Abstand des Punktes M von der Normale in M' offenbar gleich $n \sin \delta\varphi$ und läßt sich andererseits ausdrücken als Summe der Projektionen von δx und δy auf die Tangente in M', sodaß man hat

$$n \sin \delta\varphi = \cos(\varphi + \delta\varphi) \cdot \delta x + \sin(\varphi + \delta\varphi) \cdot \delta y.$$

Nennt man also ϱ den Grenzwert von n, so ist

$$\varrho\, d\varphi = \cos\varphi \cdot dx + \sin\varphi \cdot dy = ds,$$

d. h. ϱ ist gerade der Krümmungsradius. Man kann demnach behaupten, daß die Normalen in Punkten, die zu M unendlich benachbart sind, in infinitesimalen Entfernungen am Krümmungszentrum in M vorbeigehen. Es ist ferner leicht diese Entfernungen auszurechnen. Man braucht nur zu bemerken, daß abgesehen von höheren Infinitesimalen

$$n = (\cos\varphi \cdot \delta x + \sin\varphi \cdot \delta y) \cot \delta\varphi = \frac{dx \cdot \delta x + dy \cdot \delta y}{ds\, d\varphi} = \frac{ds}{d\varphi} + \frac{d^2 s}{2\, d\varphi}$$

und endlich $n = \varrho + \frac{1}{2} d\varrho$ ist, wenn man φ als unabhängige Veränderliche annimmt.

594. Die Formel (7) schließt alle andern Formeln ein, welche zur Berechnung der Krümmung dienen und übertrifft sie oft durch Einfachheit und Leichtigkeit der Rechnung. Setzt man

$$\varphi = \operatorname{arctg} y' \quad \text{oder} \quad \varphi = \theta + \operatorname{arctg} \frac{r}{r'},$$

je nachdem man von cartesischen oder von Polarkoordinaten Gebrauch macht, so ergibt sich durch Derivation

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{y''}{1 + y'^2}, \quad \frac{d\varphi}{d\theta} = 1 + \frac{r'^2 - r r''}{r^2 + r'^2},$$

und da $ds = \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx = \sqrt{r^2 + r'^2} \cdot d\theta$ ist, so findet man die Formeln wieder

$$(8) \qquad \varrho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}, \quad \varrho = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2 r'^2 - r r''}.$$

Wenn die Kurve durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ gegeben ist, so genügt es auf ein früheres Resultat (§ 574) zurückzugreifen, um den ersten der Ausdrücke (8) in

$$
(9)\qquad \frac{1}{\varrho}=\frac{1}{(\varDelta f)^{\frac{3}{2}}}\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}
$$

zu verwandeln. Auch dieser Ausdruck läßt sich aber aus (7) herleiten. Behandelt man φ als eine Funktion von x und y, welche ihrerseits Funktionen von s sind, so hat man

$$
\frac{d\varphi}{ds}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds}=\cos\varphi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\sin\varphi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y},
$$

mithin

$$
\frac{1}{\varrho}=\frac{\partial}{\partial x}\sin\varphi-\frac{\partial}{\partial y}\cos\varphi.
$$

Andererseits weiß man (§ 586), daß die Richtungskosinus der Normale folgende sind:

$$
(10)\qquad -\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{\varDelta f}}\frac{\partial f}{\partial x},\qquad \cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{\varDelta f}}\frac{\partial f}{\partial y}.
$$

Also ist

$$
-\frac{1}{\varrho}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{\varDelta f}}\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{\varDelta f}}\frac{\partial f}{\partial y}\right)
$$

oder

$$
(11)\qquad -\frac{1}{\varrho}=\frac{\varDelta^2 f}{\sqrt{\varDelta f}}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{\varDelta f}}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{\varDelta f}}.
$$

Dies ist eine wichtige Formel von Bonnet. Eine leichte Rechnung gibt

$$
\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{\varDelta f}}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{\varDelta f}}
$$

$$
=-\frac{1}{(\varDelta f)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right],
$$

und da

$$
\frac{\varDelta^2 f}{\sqrt{\varDelta f}}=\frac{1}{(\varDelta f)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]
$$

ist, so findet man endlich die Formel

$$
\frac{1}{\varrho}=-\frac{1}{(\varDelta f)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right],
$$

welche von (9) nicht verschieden ist. Was die Formel (11) betrifft, so ist sie deshalb wichtig, weil sie den Invariantencharakter der Krümmung in Evidenz setzt. In der Tat ist uns dieser Charakter bereits bekannt (§ 569) bei dem ersten Gliede auf der rechten Seite, und es wird also für uns genügen zu zeigen, daß die andern Glieder zusammen eine geometrische Bedeutung haben, die von den Achsen unabhängig ist. Bezeichnet man nun aber die Funktion $\frac{1}{\sqrt{\Delta f}}$ kurz mit g und zieht durch einen beliebigen Punkt M der gegebenen Kurve $f=0$ die Kurve, längs welcher die Funktion g konstant bleibt, so läßt sich leicht der Winkel ω berechnen, den die beiden Kurven in M bilden. Schreibt man nämlich die Formeln (10) für die zweite Kurve auf, so findet man sofort (vgl. § 577, a)

$$\cos\omega = \frac{1}{\sqrt{\Delta f\cdot\Delta g}}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}\right).$$

595. Übungen. a) Wir stellen uns die Aufgabe die Krümmungscentra derjenigen Kurven zu konstruieren, die in der Praxis am häufigsten benutzt werden. Wir wollen mit der einfachsten von allen, nächst dem Kreise, beginnen, nämlich mit der logarithmischen Spirale ($r=ae^{m\theta}$), die sich übrigens für $m=0$ auf einen Kreis reduziert. Da $r'=mr$, $r''=mr'=m^2r$ ist, so hat man $r'^2=rr''$, und die zweite der Formeln (8) zeigt uns, daß ϱ gleich $\sqrt{r^2+r'^2}=n$ wird. Noch rascher gelangt man zu diesem Resultat mit Hilfe der Formel (7), wenn man bemerkt, daß aus $\varphi=\theta+\omega$ folgt $d\varphi=d\theta$. Man findet also wegen $ds=nd\theta$ sofort $\varrho=n$, d. h. bei der logarithmischen Spirale ist der Krümmungsradius gleich der Polarnormale. Mithin ist (vgl. § 589, e) das Krümmungszentrum N. Diese Eigenschaft erscheint als evident, wenn man unter Erinnerung an das in § 593 Gesagte bemerkt, daß der den Normalen in M und M' gemeinsame Punkt H dem Kreise OMM' angehört, da $\widehat{OMH}=\widehat{OM'H}$ ist. Wenn M' nach M hinrückt, so strebt der Kreis danach die Kurve in M zu berühren, mithin hat H die Tendenz mit N zusammenzufallen, dem Punkte, der M auf dem Grenzkreise diametral gegenüberliegt. Früher haben wir gesehen, daß die Polartangente, d. h. MT, die Länge des Bogens OM darstellt, und jetzt wollen wir die Relation $\varrho=ms$ beachten, die sich sozusagen an dem Dreieck NMT ablesen läßt. Bei jeder ebenen Kurve kann man in analoger Weise die Relation zwischen s und ϱ betrachten. Sie heißt die natürliche Gleichung der Kurve[1]) und reicht aus, um deren Gestalt zu bestimmen.

b) Bei der logarithmischen Kurve $\left(y=ae^{\frac{x}{a}}\right)$ hat man

$$y'=\frac{y}{a}=\operatorname{tg}\varphi,\quad y''=\frac{\operatorname{tg}\varphi}{a}.$$

Mithin gibt die erste der Formeln (8)

$$\varrho=\frac{1}{y''\cos^3\varphi}=\frac{a}{\sin\varphi\cdot\cos^2\varphi}=\frac{a}{\sin\varphi}+\frac{y}{\cos\varphi}.$$

Es seien T und N die Punkte, in welchen die Tangente und die Normale die Asymptote treffen. Wenn die in T auf der Asymptote errichtete Senkrechte in H die Normale schneidet, so ist der Krümmungs-

1) „Natürliche Geometrie", S. 2.

radius so lang wie die Strecke NH, und man kann daher das Krümmungszentrum C konstruieren, indem man $HC = NM$ macht.

c) Bei der auf ihre Asymptoten bezogenen gleichseitigen Hyperbel hat man

$$y = \frac{a^2}{x}, \quad y' = -\frac{a^2}{x^2} = -\frac{y}{x},$$

mithin $\widehat{MTO} = \theta$. Ferner ist

$$y'' = \frac{2a^2}{x^3} = \frac{2y}{x^2}, \quad 1 + y'^2 = 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2}, \quad \varrho = \frac{r^3}{2a^2}.$$

Also variiert der Krümmungsradius proportional zu dem Kubus des Durchmessers. Um das Krümmungszentrum zu konstruieren, bemerke man, daß man hat

$$\varrho = \frac{r^3}{2a^2} = \frac{r^3}{2xy}$$

$$= \frac{r}{\sin 2\theta} = MQ.$$

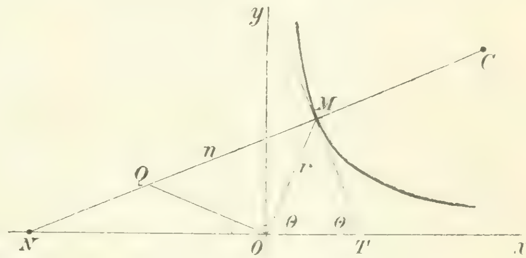

Fig. 45.

Folglich ist $MC = MQ$, d. h. das Krümmungszentrum ist in Bezug auf M symmetrisch zu Q. Zu demselben Resultat gelangt man mit Hilfe von (7), da man wegen $\varphi = \pi - \theta$ hat $d\varphi = -d\theta$, mithin $\varrho = -n$. Wir wollen hier bemerken, daß, wenn man zwei andere Punkte M' und M'' auf der Kurve nimmt, die geradlinige Strecke, die vom Mittelpunkt des Kreises $MM'M''$ nach dem Orthozentrum des Dreiecks $MM'M''$ führt, von dem Schwerpunkt dieses Dreiecks im Verhältnis von 1 zu 2 geteilt wird, und daß andererseits nach einer bekannten Eigenschaft der gleichseitigen Hyperbel das Orthozentrum der Kurve angehört. Rücken nun M' und M'' nach M hin, so streben der Schwerpunkt und der Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises den Lagen M bezw. C zu, und es ist also klar, daß das Orthozentrum dem Schnittpunkt H der Normale mit dem andern Hyperbelzweig zustrebt, und daß man hat $MH = 2\varrho$. Mit andern Worten: Der Durchmesser des oskulierenden Kreises in einem beliebigen Punkte einer gleichseitigen Hyperbel ist gleich dem Abschnitt, den die Kurve selbst auf der Normale bestimmt.

d) Die Kardioide ist zunächst bemerkenswert wegen der Leichtigkeit, mit der sie sich rektifizieren läßt. Aus $r = a(1 + \cos\theta)$ leitet man der Reihe nach ab

$$r' = -a\sin\theta, \quad \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + r'^2} = 2a\cos\frac{\theta}{2}, \quad s = 4a\sin\frac{\theta}{2},$$

wenn man den Scheitel A zum Anfangspunkt der Bogen macht. Wenn der Radiusvektor OM in L den Kreis trifft, der durch A hindurchgeht und seinen Mittelpunkt im Pol hat, so sieht man, daß der Bogen AM

so lang ist wie die gerade Strecke AL. Daraus folgt insbesondere, daß die Länge der ganzen Kardioide gleich $8a$ ist. Außerdem hat man

$$r'' = -a\cos\theta, \quad r'^2 - rr'' = a^2(1+\cos\theta) = \frac{1}{2}n^2, \quad \varrho = \frac{n^3}{n^2 + \frac{1}{2}n^2} = \frac{2}{3}n.$$

Also teilt das Krümmungszentrum, welches zu M gehört, die Polarnormale im Verhältnis von 2 zu 1. Zu dieser Eigenschaft gelangt man rascher mit Hilfe von (7), nachdem einmal die Konstruktion der Normale bekannt ist. Man beschreibe in der Tat den Kreis vom Durchmesser a, dessen Konchoide (§ 589, k) in Bezug auf einen seiner Punkte O die betrachtete Kurve ist. H sei der Mittelpunkt des Kreises, P derjenige von seinen Punkten, welcher auf dem Radiusvektor OM liegt, und Q der dem Punkt P diametral gegenüberliegende Punkt. Bekanntlich ist MQ die Normale der Kardioide in M. Aus dem Umstand, daß das

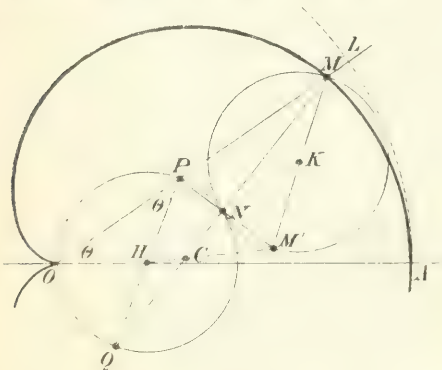

Fig. 46.

Dreieck MPQ wie OHP gleichschenklig ist, folgt $\widehat{PMQ} = \frac{1}{2}\theta$. Also ist die Neigung der Normale gegen die Polarachse $\frac{3}{2}\theta$, sodaß $d\varphi = \frac{3}{2}d\theta$ ist, folglich $\varrho = \frac{2}{3}n$. Es sei N der andere Punkt unseres Kreises, der auf MQ liegt. Da das Dreieck MPQ gleichschenklig ist, so halbiert offenbar N als Projektion von P auf MQ die Strecke MQ. Der zu P in Bezug auf N symmetrische Punkt heiße M'. Die Gerade HM' trifft MQ im Krümmungszentrum. In der Tat ist der so konstruierte Punkt C der Schwerpunkt des Dreiecks PQM', und man hat daher

$$MC = MN + \tfrac{1}{3}NQ = \tfrac{4}{3}MN = \tfrac{2}{3}MQ.$$

Endlich bemerke man, daß die natürliche Gleichung der Kardioide $s^2 + 9\varrho^2 = \text{Const.}$ ist. Wenn man die Bogen vom Pol aus rechnet, so findet man, daß die Länge des Bogens OM folgende ist:

$$s = 4a\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\right).$$

Andererseits ist die Länge der Sehne OM folgende:

$$r = a(1+\cos\theta) = s - \frac{s^2}{8a}.$$

Zu dieser Relation kann man auch auf geometrischem Wege gelangen mit Hilfe der Bemerkung, daß nach der Gleichung der Kardioide das von A auf OM gefällte Lot durch den zu L in Bezug auf M symmetrischen Punkt hindurchgeht. Hiernach ist $AL^2 = 4a \cdot 2ML$ oder $(4a - s)^2$

$= 8a(2a - r)$ u. s. w. Daraus folgt, daß, wenn M nach O hinrückt, die Differenz zwischen dem Bogen und der Sehne nicht infinitesimal von dritter Ordnung ist (vgl. § 585), sondern von zweiter. Das liegt an dem Umstand, daß die Krümmung in O unendlich ist.

e) Aus der Gleichung der Sinusspiralen $r^m = a^m \sin m\theta$ leitet man ab $r^{m-1} r' = a^m \cos m\theta$, ferner $(m-1) r^{m-2} r'^2 + r^{m-1} r'' = -m r^m$, d. h. $(m-1) r'^2 + r r'' = -m r^2$ und endlich $r'^2 - r r'' = m(r^2 + r'^2)$. Also hat man

$$\varrho = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+m)(r^2 + r'^2)} = \frac{\sqrt{r^2 + r'^2}}{1+m} = \frac{n}{1+m},$$

ein nach (7) evidentes Resultat, da $\varphi = \theta + \omega = (1+m)\theta$ ist. Es folgt daraus, daß der Krümmungsradius proportional zu der Polarnormale ist. Für $m = -2$ und für $m = \frac{1}{2}$ findet man die oben angegebenen Konstruktionen des Krümmungszentrums der gleichseitigen Hyperbel und der Kardioide wieder. Für $m = 2$ erhält man die analoge Konstruktion für die Lemniskate. Für $m = -\frac{1}{2}$ findet man, daß bei der Parabel die im Brennpunkt auf den Radiusvektor errichtete Senkrechte den Krümmungsradius halbiert, u. s. w. Setzt man endlich $m = 0$, so kommt man wieder auf die bei der logarithmischen Spirale gefundene Konstruktion. Man pflegt aus diesem Grunde, obwohl andererseits die Gleichung $r^m = a^m \sin m\theta$ für $m = 0$ illusorisch wird, auch die logarithmische Spirale als eine Sinusspirale zu betrachten, die dem Werte 0 des Index m entspricht. Sie bildet gewissermaßen die Grenze zwischen der Klasse der im Endlichen gelegenen Sinusspiralen (§ 589, m) und der Klasse derjenigen Sinusspiralen, die sich ins Unendliche erstrecken.

f) Die beiden Klassen von Sinusspiralen lassen sich auseinander durch Inversion ableiten. Man nennt so diejenige geometrische Transformation, welche jedem Punkt der Ebene seinen reziproken in Bezug auf einen festen Kreis entsprechen läßt. Wenn $r = f(\theta)$ die Gleichung einer beliebigen Kurve ist, so ist $r = a^2/f(\theta)$ die Gleichung ihrer inversen in Bezug auf einen Kreis vom Radius a mit dem Mittelpunkt im Pol. So bieten uns die archimedische Spirale und die hyperbolische Spirale, die Kochleoide und die Quadratrix, die gleichseitige Hyperbel und die Lemniskate, die Parabel und die Kardioide und allgemeiner zwei Sinusspiralen mit entgegengesetzt gleichen Indices Beispiele für Paare von inversen Kurven. Es ist also nützlich zu wissen, wie man die Krümmungszentra einer Kurve konstruiert, wenn man die einer zu ihr inversen Kurve konstruieren kann. Wir überlassen es dem Leser zu zeigen, daß in zwei Punkten, die sich auf zwei inversen Kurven entsprechen, die Tangenten in Bezug auf den Radiusvektor antiparallel sind und die Krümmungszentra in gerader Linie mit dem Inversionszentrum liegen.

g) *Astroide* heißt die in rechtwinkligen cartesischen Koordinaten durch die Gleichung $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ dargestellte Kurve. Sie ist symmetrisch in Bezug auf beide Achsen und besteht aus vier gleichen Bogen, die in ihren Endpunkten die Achsen zu Tangenten haben. AB sei einer dieser Quadranten, und man lege in seinen Mittelpunkt $\left(x = y = a/2\sqrt{2}\right)$ den Anfangspunkt der Bogen. Offenbar ist

$$y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \sqrt{1+y'^2} = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad s = \frac{3}{2}\left(a x^2\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{3}{4}\,a.$$

Daraus folgt insbesondere, daß die Länge der ganzen Kurve gleich $6a$ ist. Ferner hat man

$$y'' = \frac{1}{3x}\left(\frac{a^2}{xy}\right)^{\frac{1}{3}}, \qquad \varrho = 3\,(axy)^{\frac{1}{3}}.$$

Eine leichte Rechnung zeigt dann, daß $4s^2 + \varrho^2 = \frac{9}{4}a^2$ die natürliche Gleichung der Astroide ist. Man gelangt aber leichter zur Aufdeckung der Eigenschaften dieser Kurve, wenn man sie als einen geometrischen Ort betrachtet, der in folgender Weise definiert ist. Man beschreibe um den Anfangspunkt einen Kreis mit dem Radius a und projiziere jeden Punkt N dieses Kreises zunächst auf die beiden Achsen, nach P und Q, sodann auf PQ, nach M. Der Ort von M ist eine Astroide. Wenn man nämlich mit θ den Winkel NOA bezeichnet, so hat man $MP = a\sin^2\theta$,

$$MQ = a\cos^2\theta.$$

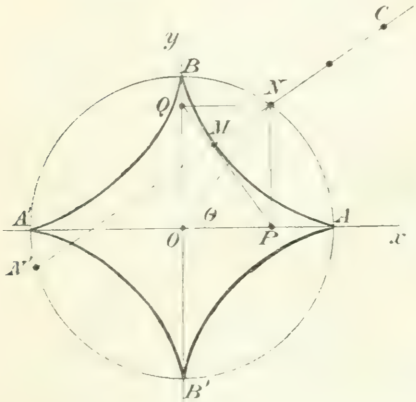

Fig. 47.

Die Koordinaten von M sind daher

$$x = MQ \cdot \cos\theta = a\cos^3\theta,$$
$$y = MP \cdot \sin\theta = a\sin^3\theta$$

und genügen, wie man sieht, der Gleichung $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Dies vorausgeschickt hat man

$$dx = -3a\sin\theta\cos^2\theta\,d\theta, \quad dy = 3a\cos\theta\sin^2\theta\,d\theta, \quad ds = 3a\sin\theta\cos\theta\,d\theta.$$

Also ist zunächst die Neigung der Tangente gegen die Achse der x gleich $\pi - \theta$, d. h. die Tangente in M ist die Gerade PQ selbst. Daraus ergibt sich sofort, daß der durch die Achsen auf der Tangente bestimmte Abschnitt beständig gleich a ist. Ferner hat man, wenn man den Anfangspunkt der Bogen in den Mittelpunkt des Bogens AB legt, $s = -\frac{3}{4}a\cos 2\theta$ und daher

$$\text{Bogen } MA = \tfrac{3}{4}a\,(1 - \cos 2\theta) = \tfrac{3}{2}a\sin^2\theta = \tfrac{3}{2}MP.$$

Also lassen sich die Bogen MA und MB sofort auf der Tangente rektifizieren, indem man die Strecken MP und MQ um die Hälfte verlängert. Endlich ist der Krümmungsradius, abgesehen vom Vorzeichen,

$$\varrho = \frac{ds}{d\theta} = \frac{3}{2}\,a\sin 2\theta,$$

und man erkennt aufs neue, daß $4s^2 + \varrho^2 = \frac{9}{4}a^2$ ist. Bemerkt man ferner, daß $MN = a\sin\theta\cos\theta$ ist, so erhält man $\varrho = 3MN$. Also ist der Krümmungsradius das Dreifache von MN. Bezeichnet man mit N' den andern Schnittpunkt der Normale mit dem Kreise, so kann man auch sagen, daß das Krümmungszentrum in Bezug auf M symmetrisch zu N' liegt.

h) Längs eines *Kegelschnitts* variiert die Krümmung wie der Kubus des Abstandes zwischen Mittelpunkt und Tangente. Wählt man, um einen bestimmten Fall zu haben, eine Ellipse, bezogen auf ihre Achsen, so kann man aus der Gleichung $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ der Reihe nach ableiten

$$b^2x + a^2yy' = 0\,, \quad b^2 + a^2y'^2 + a^2yy'' = 0\,, \quad a^2y^3y'' = -b^4.$$

Führt man den Abstand des Mittelpunktes von der Tangente ein

$$h = \frac{y - xy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{b^2}{y\sqrt{1 + y'^2}}$$

und wählt das Zeichen von ϱ passend, so wird

$$\varrho = \frac{a^2b^2}{h^3}.$$

Andere Formen von ϱ erhält man, indem man versucht anstatt h die Länge l des zu OM konjugierten Halbdurchmessers hineinzubringen oder die Länge n des Normalenabschnitts MN, der zwischen Incidenzpunkt und Fokalachse enthalten ist. Man braucht nur zu beachten, daß $lh = ab$, $nh = b^2$ ist, um zu finden

$$\varrho = \frac{l^3}{ab}\,, \qquad \varrho = \frac{n^3}{p^2}\,,$$

wo wie üblich $b^2/a = p$ gesetzt ist. Zu der letzten Formel gelangt man in bequemer Weise bei Benutzung von Polarkoordinaten. Die Gleichung des Kegelschnitts, bezogen auf einen Brennpunkt F als Pol und die Fokalachse als Polarachse, lautet nämlich $r = p/(1 - k\cos\theta)$, und eine bekannte Formel (§ 558, d), in welcher man

$$f = \frac{1 - k\cos\theta}{p}\,, \quad f' = \frac{k}{p}\sin\theta\,, \quad f'' = \frac{k}{p}\cos\theta\,, \quad f + f'' = \frac{1}{p}$$

zu setzen hat, liefert uns sofort

$$\varrho = \frac{(r^2 - 2kr^2\cos\theta + k^2r^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

Inzwischen bemerke man, daß in dem Dreieck FMF', in welchem MN den Winkel M halbiert,

$$\frac{FN}{2ka} = \frac{FM}{2a}\,, \quad FN = kr, \quad n^2 = r^2 - 2kr^2\cos\theta + k^2r^2$$

ist (wenn man sich daran erinnert, daß $MF + MF' = 2a$, $NF + NF' = 2ka$). Man kommt auf diese Weise wieder zu der oben erhaltenen Formel.

i) Wir wollen nunmehr die letzte Form von ϱ geometrisch interpretieren und das Krümmungszentrum in einem Punkt eines Kegelschnitts zu konstruieren versuchen. Zunächst bemerken wir, daß man durch Projektion von FNM auf FM findet

$$n \cos \psi = r - kr \cos \theta = p,$$

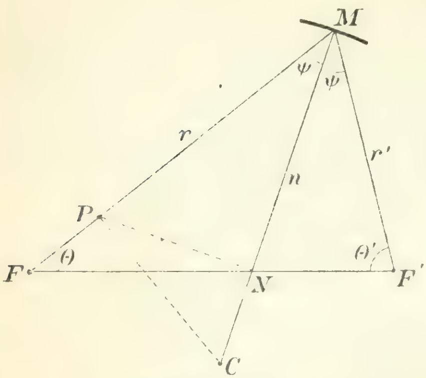

Fig. 48.

d. h. die Projektion der Normale auf den Radiusvektor ist konstant und gleich p. Dies vorausgeschickt hat man

$$\varrho = \frac{n^3}{p^2} = \frac{n}{\cos^2 \psi}.$$

Man errichte also in N auf der Normale ein Lot bis zum Schnittpunkt P mit einem Radiusvektor; darauf errichte man in P ein Lot auf dem Radiusvektor: dieses trifft die Normale in dem gesuchten Krümmungszentrum. Man gelangt zu demselben Resultat, indem man einige Bemerkungen infinitesimalgeometrischer Art (§ 590, d) zu Hilfe nimmt, nach welchen, wenn man $MF = r$, $MF' = r'$ setzt und mit θ und θ' die Winkel des Dreiecks MFF' in F und F' bezeichnet,

$$r d\theta = - r' d\theta' = \cos \psi \cdot ds$$

ist. Da man die Neigung der Normale gegen die Fokalachse durch $\theta + \psi$ oder durch das Supplement von $\theta' + \psi$ ausdrücken kann, so hat man offenbar für den Kontingenzwinkel

$$d\varphi = d\theta + d\psi, \qquad - d\varphi = d\theta' + d\psi.$$

Daraus folgt, wenn man subtrahiert und durch ds dividiert,

$$\frac{2}{\varrho} = \frac{d\theta}{ds} - \frac{d\theta'}{ds} = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \cos \psi.$$

Andererseits werden die Brennpunkte durch die Normale und die Tangente harmonisch getrennt, ihre Projektionen auf die Normale teilen folglich die Strecke n harmonisch, sodaß

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{r \cos \psi} + \frac{1}{r' \cos \psi} = \frac{2}{\varrho \cos^2 \psi}$$

ist oder $\varrho \cos^2 \psi = n$ u. s. w. Mit Hilfe ganz einfacher geometrischer Betrachtungen läßt sich ferner die oben angegebene Konstruktion in eine andere, ebenso nützliche verwandeln, die man Mannheim[1]) verdankt. Das von C auf FF' gefällte Lot möge PP' in Q treffen und G, G' seien die Schnittpunkte der durch Q gezogenen Parallelen zu FF' mit MF und MF'. Da die Winkel CPG und CQG rechte sind, so liegen die Punkte C, P, Q, G auf einem Kreise, und es ist daher $\widehat{CGQ} = \widehat{CPQ}$.

1) „Cours de Géométrie descriptive“, p. 175.

In analoger Weise zeigt man, daß $\overset{\frown}{CG'Q} = \overset{\frown}{CP'Q}$ ist, und da man offenbar hat $\overset{\frown}{CPQ} = \overset{\frown}{CP'Q}$, so ist $\overset{\frown}{CGQ} = \overset{\frown}{CG'Q}$, d. h. das Dreieck CGG' ist gleichschenklig, mithin halbiert Q die Strecke GG'. Daraus ergibt sich,

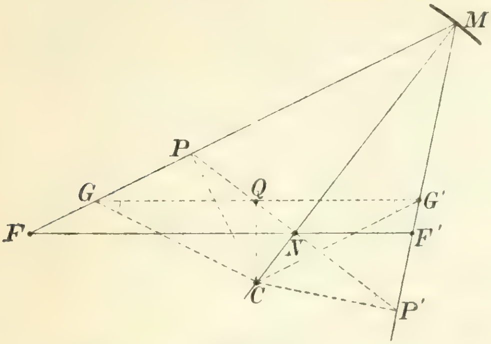

Fig. 49.

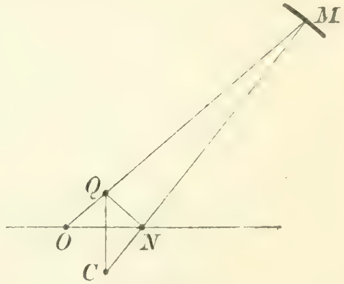

Fig. 50.

daß die Gerade MQ durch den Mittelpunkt von FF', d. h. den Mittelpunkt des Kegelschnitts, hindurchgeht. Man gelangt auf diese Weise zu folgender zweiten Konstruktion: Man errichte in N ein Lot auf der Normale bis zum Schnittpunkt Q mit dem Durchmesser; darauf fälle man von Q aus ein Lot auf die Fokalachse: dieses trifft die Normale in dem Krümmungszentrum.

j) Die erste Konstruktion des Krümmungszentrums eines Kegelschnitts ermöglicht es uns folgendes Problem zu lösen: In einem Punkte der von einem gegebenen Punkt aus gebildeten Fußpunktkurve einer beliebigen Kurve das Krümmungszentrum zu konstruieren, wenn man das zugehörige Krümmungszentrum der Kurve selbst kennt. Dem Punkte M der gegebenen Kurve entspreche auf der Fußpunktkurve der Punkt P, d. h. P sei die Projektion eines festen Punktes O auf die Tangente der Kurve in M. Die Projektion des Krümmungszentrums dieser Kurve auf OM sei Q. Man projiziere ferner Q auf die Normale MC und verbinde den so erhaltenen Punkt N mit O. Das Krümmungszentrum der Fußpunktkurve in P liegt im Schnittpunkt K von ON mit der Normale der Fußpunktkurve in P. In der Tat läßt sich, wenn man die unendlich kleinen Größen von höherer als zweiter Ordnung vernachlässigt, die gegebene Kurve in der

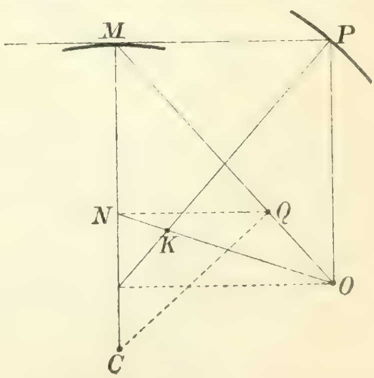

Fig. 51.

Umgebung von M durch den oskulierenden Kreis ersetzen (§ 592) oder durch irgend eine andere Kurve, die in M dasselbe Krümmungszentrum C hat. An die Stelle der von O aus gebildeten Fußpunktkurve der gegebenen Kurve wird dabei offenbar in der Umgebung von P die Fußpunktkurve der neuen Kurve treten, ohne daß die Lage des Krümmungszentrums K sich ändert. Nun ist aus der analytischen Geometrie bekannt, daß die Fußpunktkurve eines Kegelschnitts in Bezug auf einen Brennpunkt der über der großen Achse als Durchmesser beschriebene Kreis ist. Also können wir behaupten, daß K der Mittelpunkt eines Kegelschnitts ist, der einen Brennpunkt in O hat, durch M hindurchgeht und in C das zugehörige Krümmungszentrum hat. Aus der Konstruktion ist aber ganz klar ersichtlich, daß dieser Kegelschnitt gerade der ist, der die Fokalachse ON hat. Also gehört K der Geraden ON an. Es ist eine gute Übung für den Leser diese Konstruktion anzuwenden auf die Lemniskate, betrachtet als Fußpunktkurve einer gleichseitigen Hyperbel in Bezug auf den Mittelpunkt, und auf die Kardioide, die Fußpunktkurve eines Kreises in Bezug auf einen seiner Punkte. Er wird auf solche Weise mit Hilfe ganz einfacher geometrischer Betrachtungen die oben bereits angegebenen speziellen Konstruktionen wiederfinden.

k) Wendet man auf die Parabel die erste Konstruktion des Krümmungszentrums eines Kegelschnitts an, so erkennt man leicht aus der Gleichheit der betreffenden Winkel, daß die Dreiecke MFN, PFN gleichschenklig sind, und leitet daraus ab, daß MP durch F halbiert wird. Man kommt auf diese Weise zu der bereits gefundenen Konstruktion, auf Grund deren man sagen kann, daß die Parabel eine Sinusspirale ist mit dem Brennpunkt als Pol. Wenn aber anstatt des Brennpunktes die Direktrix gegeben ist, so muß man die genannte Konstruktion durch eine andere ersetzen, die wir jetzt durch ganz einfache Überlegungen aus ihr ableiten werden. Man projiziere M in G auf die Direktrix, und es sei S der Schnittpunkt der Normale mit der Direktrix. Die rechtwinkligen Dreiecke MFL, MGS sind kongruent, da die Winkel bei M einander gleich sind und überdies nach einer wohlbekannten Eigenschaft der Parabel $MF = MG$ ist. Es sind somit die Hypotenusen ML, MS einander gleich. Daraus folgt, daß der Krümmungsradius doppelt so groß ist wie der vom Incidenzpunkt aus gerechnete Abschnitt, den die Direktrix auf der Normale abschneidet. Nun nennt man *Ribaucoursche Kurven* alle diejenigen, bei welchen der Krümmungsradius proportional ist zu der cartesischen Normale. Man kann also sagen, daß die Parabel eine Ribaucoursche Kurve ist.

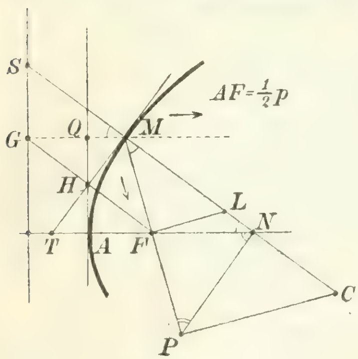

Fig. 52.

l) Auch die Kettenlinie ist eine Ribaucoursche Kurve. In der Tat haben wir bewiesen (§ 589, c), daß in dem rechtwinkligen Dreieck MPN die Projektion MQ von $MP = y$ auf die Hypotenuse $MN = n$ gleich a ist, sodaß man hat $y^2 = an$, und aus der Gleichung der Kurve folgt dann

$$y'' = \frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{y}{a^2}, \qquad \varrho = \frac{n^3}{y^3 y''} = \frac{a^2 n^3}{y^4} = n.$$

Also ist das Krümmungszentrum in Bezug auf M symmetrisch zu N. Wir haben früher auch gesehen, daß der Bogen s, gerechnet vom Scheitel A, gleich PQ ist. Daraus folgt, daß man in dem Dreieck MPN hat $s^2 = MQ \cdot QN$. Da nun $n = MQ + QN$ ist, so sieht man, daß die natürliche Gleichung der Kettenlinie folgende ist: $\varrho = a + \frac{s^2}{a}$.

m) Bei der Kettenlinie gleichen Widerstandes

$$y = -a \log\cos\frac{x}{a}$$

hat man

$$y' = \operatorname{tg}\frac{x}{a}, \quad \sqrt{1 + y'^2} = \frac{1}{\cos\frac{x}{a}}, \quad y'' = \frac{1}{a\cos^2\frac{x}{a}}, \quad \varrho = \frac{a}{\cos\frac{x}{a}},$$

d. h. $\varrho\cos\varphi = a$. Also ist die Projektion des Krümmungsradius auf die Symmetrieachse der Kurve beständig gleich a. Weniger leicht ist die Berechnung von s, die wir im folgenden Buch werden ausführen können. Alsdann werden wir imstande sein zu erkennen, daß die natürliche Gleichung der Kettenlinie gleichen Widerstandes folgende ist:

$$\varrho = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right).$$

n) Eine andere wichtige Ribaucoursche Kurve ist die Cykloide (§ 590, a). Unter Bezugnahme auf die Figur bemerken wir, daß (nach

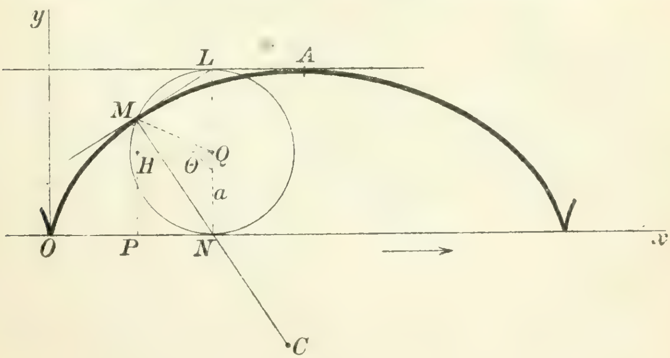

Fig. 53.

der Definition) $ON =$ Bogen $MN = a\theta$ ist, und daß daher die Koordinaten von M

$$x = ON - PN = a(\theta - \sin\theta), \qquad y = PH + HM = a(1 - \cos\theta)$$

sind. Daraus folgt

$$dx = a(1 - \cos\theta)\,d\theta, \qquad dy = a\sin\theta\,d\theta,$$

mithin $dy/dx = \cot\frac{\theta}{2}\cdot$ Andererseits ist $\widehat{MLN} = \frac{1}{2}\widehat{MQN} = \frac{1}{2}\theta$. Also ist ML die Tangente und infolgedessen MN die Normale der Kurve in M. Quadriert und addiert man die Ausdrücke für dx, dy, so erhält man ds^2 und daraus successiv

$$ds = 2a\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta, \quad s = 4a\left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\right) = 8a\sin^2\frac{\theta}{4},$$

wenn man übereinkommt die Bogen von O aus zu rechnen. Die Länge eines vollständigen Cykloidenbogens, d. h. eines bei einem vollständigen Umlauf des Kreises erzeugten Bogens, erhält man, wenn man $\theta = 2\pi$ setzt. Die genannte Länge ist also $8a$, d. h. viermal so groß wie der Durchmesser des erzeugenden Kreises. Da ferner abgesehen vom Vorzeichen der Kontingenzwinkel gleich $\frac{1}{2}d\theta$ ist, so hat man sofort $\varrho = 4a\sin\frac{\theta}{2}$, d. h. $\varrho = 2n$. Also ist das Krümmungszentrum in Bezug auf M symmetrisch zu N. Dies ist eine Eigenschaft, die nach dem in §§ 593 und 590, a Gesagten fast evident[1]) ist. Verlegt man endlich den Anfangspunkt der Bogen nach dem Scheitel A (dem Mittelpunkt eines vollständigen Bogens), so hat man $s = 4a\cos\frac{\theta}{2}$ und sieht sofort, daß die natürliche Gleichung der Cykloide folgende ist: $s^2 + \varrho^2 = \text{Const.}$

o) Allgemeiner nennt man Rollkurven diejenigen Kurven, welche von einem Punkte einer Kurve beschrieben werden, die auf einer andern, in der Ebene festen Kurve ohne zu gleiten rollt. Bei allen Rollkurven hat man die Eigenschaft, die wir bei der Cykloide bemerkt haben, daß nämlich die Normale durch den augenblicklichen Berührungspunkt der beweglichen Kurve mit der festen Kurve hindurchgeht. Wenn die feste Kurve eine Gerade, die bewegliche Kurve dagegen ein Kreis ist, so haben wir die Cykloide. In dem umgekehrten Falle, wo eine Gerade ohne zu gleiten auf einem Kreise rollt, beschreibt jeder von ihren Punkten eine Kurve, die man *Kreisevolvente* nennt. Wenn θ der Winkel ist, um welchen die Gerade sich im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers gedreht hat seit dem Augenblick, wo der bewegliche Punkt sich in A befand, so sind die Koordinaten

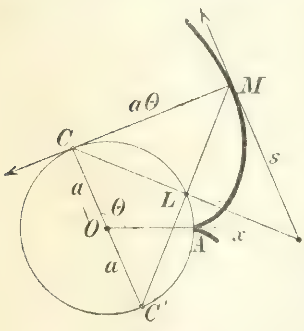

Fig. 54.

von M, falls man die Achse der x längs OA richtet,

$$x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta), \qquad y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta).$$

Man hat hiernach

$$dx = a\theta\cos\theta\,d\theta, \quad dy = a\theta\sin\theta\,d\theta, \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta,$$

$$ds = a\theta\,d\theta, \quad \varrho = \frac{ds}{d\theta} = a\theta.$$

1) Duhamel: „Éléments de Calcul" (t. I, p. 177).

Also bleibt die Kurve beständig normal zu der beweglichen Geraden und hat ihr Krümmungszentrum in dem Berührungspunkt der Geraden mit dem festen Kreise. Die Länge des Bogens AM ist $s = \frac{1}{2} a\theta^2$ und daher die natürliche Gleichung der Kreisevolvente $\varrho^2 = 2as$. Aus ihr können wir folgendes entnehmen: Wenn die Verbindungsgerade von M mit dem Punkte C', der auf dem Kreise dem Punkte C diametral gegenüberliegt, diesen Kreis in L schneidet, so bestimmt die Gerade CL auf der Tangente von M aus gerechnet einen Abschnitt gleich s.

p) Wenn die feste und die bewegliche Kurve Kreise sind, so hat man die *Hypocykloiden* und die *Epicykloiden*, je nachdem ein Kreis innerhalb oder außerhalb des andern liegt. Wir wollen uns hier mit der Untersuchung dieser speziellen Rollkurven begnügen, die in der Theorie der Mechanismen von Wichtigkeit sind. Um einen bestimmten Fall vor uns zu haben, wollen wir annehmen, daß ein Kreis vom Radius ma auf einem andern Kreise vom Radius a äußerlich rollt ohne zu gleiten. Die Resultate, zu denen wir gelangen, werden dann sowohl auf die Epicykloiden als auch auf die Hypocykloiden anwendbar sein, je nachdem m als positiv oder als negativ vorausgesetzt wird. Wir wollen uns denken, der bewegliche Punkt M befinde sich zunächst in A, also auf dem festen Kreise, der seinen Mittelpunkt in O hat, und wollen die Abscissenachse längs OA richten. Der Kreis vom Radius ma mit dem Mittelpunkt in Q soll nun im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers rollen,

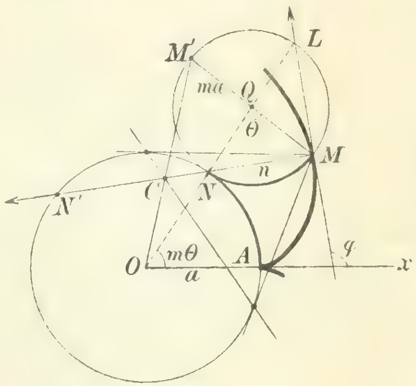

Fig. 55.

und wir betrachten ihn in irgend einer neuen Lage, nachdem die Zentrale der beiden Kreise eine Drehung $m\theta$ um O ausgeführt hat. N sei der Berührungspunkt der beiden Kreise. Wir beachten, daß nach der Definition die Bogen AN und MN gleich sind, mithin der Winkel NQM notwendig gleich θ ist. Daraus ergibt sich, daß die Koordinaten von M folgende sind:

$$x = a\left\{(1+m)\cos m\theta - m\cos(\theta + m\theta)\right\},$$

$$y = a\left\{(1+m)\sin m\theta - m\sin(\theta + m\theta)\right\}.$$

Folglich ist

$$dx = 2m(1+m)a\sin\frac{\theta}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2} + m\theta\right)d\theta,$$

$$dy = 2m(1+m)a\sin\frac{\theta}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2} + m\theta\right)d\theta$$

und endlich

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2} + m\theta\right), \quad \frac{ds}{d\theta} = 2m(1+m)a\sin\frac{\theta}{2}\cdot$$

Die Neigung der Tangente gegen die Achse der x ist also $\varphi = \frac{\theta}{2} + m\theta$. Verbindet man nun M mit dem Punkte L, der auf dem beweglichen Kreise dem Punkte N diametral gegenüberliegt, so ist die Neigung von ML gegen Ox gerade gleich der Summe der Winkel $QLM = \frac{1}{2}\theta$ und $AON = m\theta$. Also ist ML die Tangente und infolgedessen MN die Normale. Ferner muß, wenn man die Bogen vom Punkte A $(\theta = 0)$ aus rechnet, offenbar sein

$$s = 4m(1+m)a\left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\right) = 8m(1+m)a\sin^2\frac{\theta}{4},$$

und es ist daher die Länge eines vollständigen Bogens $8m(1+m)a$. Wenn man dagegen s vom Mittelpunkt $(\theta = \pi)$ eines vollständigen Bogens rechnet, so hat man

$$s = -4m(1+m)a\cos\frac{\theta}{2},$$

und da andererseits

$$\varrho = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{2}{1+2m}\frac{ds}{d\theta} = \frac{4m(1+m)}{1+2m}a\sin\frac{\theta}{2}$$

ist, so sieht man, daß $s^2 + (1+2m)^2\varrho^2 = \text{Const.}$ die natürliche Gleichung der Epicykloiden und der Hypocykloiden ist. Um das Krümmungszentrum zu konstruieren, bemerke man, daß der Normalenabschnitt MN die Länge $n = 2ma\sin\frac{\theta}{2}$ hat. Der andere Abschnitt MN', der auf der Normale durch den festen Kreis bestimmt wird, hat die Länge n', die man berechnet, indem man die Proportion $(n'-n)/n = a/ma$ beachtet, aus der man entnimmt $mn' = (1+m)n$. Dies vorausgeschickt hat man

$$\varrho = \frac{2(1+m)}{1+2m}n \quad \text{oder} \quad \frac{2}{\varrho} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n'}.$$

Also ist C harmonisch konjugiert zu M in Bezug auf NN', d. h. das Krümmungszentrum in jedem Punkte M gehört der Polare von M in Bezug auf den festen Kreis an. Diese Eigenschaft verwandelt sich sofort in eine andere, wenn man die folgenden Bemerkungen macht. Der Radius ON' ist offenbar parallel zu QM. Nun fällt aber, wenn man das harmonische Quadrupel $MNCN'$ von O aus auf die Gerade QM projiziert, die Projektion von N' ins Unendliche, und es muß folglich diejenige von N, also Q, die Projektion von MC halbieren, d. h. C projiziert sich in den Punkt, der in Bezug auf Q zu M symmetrisch liegt. Mit andern Worten: Das Krümmungszentrum in jedem Punkte M befindet sich auf demjenigen Durchmesser des festen Kreises, der durch den dem Punkte M diametral gegenüberliegenden Punkt des beweglichen Kreises hindurchgeht.

q) In dem besonderen Falle $m = 0$ erhält man (vorausgesetzt, daß ma konstant bleibt, wozu man sich denken muß, daß a unbegrenzt zunimmt, während m nach Null konvergiert) die Cykloide $(\varrho = 2n)$. Dagegen findet man für $m = \infty$ (d. h. wenn man m ins Unendliche wachsen läßt, sodaß $m\theta$ einen Wert ϑ bewahrt) die Eigenschaften der Kreisevolvente $(\varrho = n)$ wieder:

$$\varrho = 2\,a \lim m \sin\frac{\theta}{2} = a\vartheta, \quad s = 8\,a \lim m\,(1+m) \sin^2\frac{\theta}{4} = \frac{1}{2}\,a\vartheta^2.$$

Übrigens ist es klar, daß in diesem Falle wegen des Zusammenrückens der Punkte N und N' auch C mit ihnen zusammenrücken muß. Für $m = -\frac{1}{2}$ erhält man $\varrho = \infty$, und die Hypocykloide ist daher eine Gerade, wie man auch erkennt, wenn man die Konstruktion der Normale oder die des Krümmungszentrums ausführt. Mit andern Worten, wenn ein Kreis auf einem doppelt so großen Kreise innerlich rollt ohne zu gleiten, so bewegt sich jeder von seinen Punkten längs eines Durchmessers des festen Kreises. Diese Eigenschaft, welche unmittelbar aus der Figur zu entnehmen ist, kommt bei gewissen Zahnradgetrieben zur Anwendung. Auch die Kardioide ist eine Epicykloide, wie man sofort erkennt, wenn man in den allgemeinen Formeln $m = 1$ setzt. Dies geht übrigens auch aus Figur 46 hervor. Beachtet man in der Tat, daß der Winkel PHN doppelt so groß ist wie PQN und infolgedessen gleich θ, so sieht man, daß HN parallel zu OM ist, mithin durch den Mittelpunkt K von MM' hindurchgeht, weil es PM' halbiert. Daraus folgt, daß der über MM' als Durchmesser beschriebene Kreis in N den festen Kreis berührt. Andererseits zeigt die offenbare Gleichheit der Winkel OHN und MKN, daß auch die Bogen ON und MN auf den beiden Kreisen gleich sind. Also läßt sich die Kardioide betrachten als erzeugt von einem Punkte eines Kreises, der ohne zu gleiten auf einem gleich großen Kreise rollt. Wendet man die allgemeine Konstruktion des Krümmungszentrums an, so kommt man zu der früher bereits gefundenen speziellen Konstruktion. Endlich erhält man für $m = -\frac{1}{4}$ die Astroide. Die Figur zeigt sofort, daß der über der Hälfte LN des Radius ON als Durchmesser beschriebene Kreis durch den Punkt M der Astroide hindurchgeht. Da der Winkel MKN offenbar viermal so groß ist wie AON, so ist der Bogen MN des inneren Kreises immer gleich dem Bogen AN des äußeren Kreises. Also kann man die Astroide betrachten als erzeugt von einem Punkte eines Kreises, der innerlich auf einem viermal so großen Kreise rollt ohne zu gleiten. Die allgemeine Konstruktion des Krümmungszentrums führt zu der oben bereits erhaltenen Konstruktion, da nach der bekannten Relation,

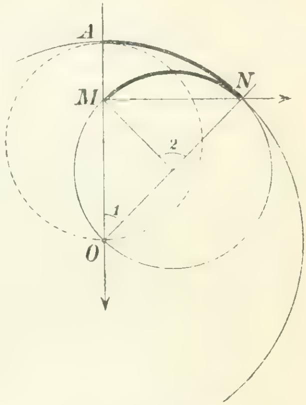

Fig. 56.

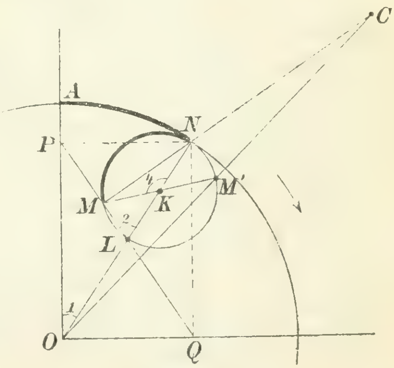

Fig. 57.

die zwischen den durch die Transversale OC auf den Seiten des Dreiecks MKN bestimmten Abschnitten bestehen muß,

$$NC = \frac{KM'}{MM'} \cdot \frac{ON}{OK} \cdot MC = \frac{2}{3} MC, \quad \varrho = \frac{3}{2} NC = 3\,MN$$

ist.

r) Die erste Form der Konstruktion des Krümmungszentrums der Epicykloiden oder Hypocykloiden legt es nahe diejenigen Kurven zu studieren, welche durch folgende Eigenschaft definiert sind: In jedem Punkte M ist der Krümmungsradius proportional zu dem Normalenabschnitt, der zwischen M und der Polare von M in Bezug auf einen festen Kreis liegt. Wir möchten die Untersuchung dieser Kurven dem Leser zur Übung vorschlagen. Außer den oben genannten haben diese Eigenschaft unendlich viele andere Kurven, insbesondere alle Kegelschnitte. Bei diesen ist der feste Kreis der Mongesche Kreis, d. h. der mit dem Kegelschnitt konzentrische Kreis vom Radius $\sqrt{a^2+b^2}$. Wenn in dem allgemeinen Falle der feste Kreis sich auf einen Punkt reduziert, so findet man die Sinusspiralen wieder. Wenn dagegen der Kreis eine Gerade wird, so hat man die Ribaucourschen Kurven. Die Familie der Kegelschnitte enthält also eine Sinusspirale, mit dem Pol im Mittelpunkt, und eine Ribaucoursche Kurve. Die erste erhält man, wenn man setzt $a^2 + b^2 = 0$. Sie ist also die gleichseitige Hyperbel. Zu der zweiten gelangt man, indem man $a^2 + b^2$ unendlich zunehmen läßt oder sich denkt, daß der Mittelpunkt ins Unendliche fortrückt. Sie ist also die Parabel.

Asymptoten.

596. Wir wollen uns zwei Punkte denken, die zwei Kurven durchlaufen und dabei dem Zusammenfallen zustreben, während die sie verbindende Gerade ins Unendliche fortrückt oder sich unaufhörlich um einen festen Punkt dreht. Wenn so etwas eintritt (wobei nicht ausgeschlossen wird, daß es möglicherweise nicht der Fall ist, wenn irgend ein besonderes Entsprechen zwischen den beiden Punkten besteht), so sagt man, die beiden Kurven seien zueinander asymptotisch. Wir wollen uns z. B. denken, ein Punkt M entferne sich ins Unendliche längs einer Kurve $y = f(x)$, sodaß also seine Entfernung vom Anfangspunkt jede Grenze zu überschreiten strebt und daher wenigstens eine seiner cartesischen Koordinaten ins Unendliche wächst. Wenn dies nur bei einer der beiden Koordinaten der Fall ist, so werden wir immer voraussetzen dürfen, daß es die x-Koordinate ist, indem wir erforderlichen Falles x und y vertauschen. Dies vorausgeschickt betrachte man auf einer andern Kurve $y = g(x)$ für jede Lage von M den Punkt, der dieselbe Abscisse wie M hat. Es werde ferner vorausgesetzt, daß für unendlich zunehmendes (positives oder negatives) x die Differenz $f(x) - g(x)$ nach Null konvergiert.

Alsdann darf man behaupten, daß die beiden Kurven zueinander asymptotisch sind, und das Gleiche läßt sich von den Kurven sagen, die in Polarkoordinaten durch die Gleichungen $r = f(\theta)$ und $r = g(\theta)$ dargestellt werden. Da außerdem auch die Differenz $f'(x) - g'(x)$ nach Null konvergiert (§ 308, c), wenn sie nicht unaufhörlich oszilliert, so sieht man, daß die beiden Kurven, nicht bloß einen gemeinsamen Punkt zu haben, sondern im allgemeinen auch sich zu berühren streben; aber dieses Faktum muß mit größerer Sorgfalt untersucht werden.

597. Die Koordinaten des Punktes M, der sich längs einer gegebenen Kurve ins Unendliche entfernt, seien x und y. Wenn es gelingt, die Konstanten m und h derart zu bestimmen, daß $y - mx - h$ die Null als Grenzwert hat, falls x (positiv oder negativ) unendlich wird, so kann man sagen, daß die Gerade $Y = mX + h$ eine Asymptote der gegebenen Kurve ist. Mit der Aufsuchung dieser geradlinigen Asymptoten wollen wir uns eingehender beschäftigen. Aus der Gleichung

$$\lim_{x = \pm \infty} (y - mx - h) = 0$$

ergibt sich sofort, daß $y - mx$ oder $x\left(\frac{y}{x} - m\right)$ nach dem endlichen Grenzwert h konvergiert; und da der erste Faktor seinem absoluten Betrage nach unbegrenzt zunimmt, so muß der zweite Faktor notwendig nach Null konvergieren. Also ist

$$\lim_{x = \pm \infty} \frac{y}{x} = m, \quad \lim_{x = \pm \infty} (y - mx) = h.$$

In der successiven Anwendung dieser beiden Gleichungen (die geometrisch evident sind) besteht die Regel für die Aufsuchung der Asymptoten, wenn man von cartesischen Koordinaten Gebrauch macht. In Polarkoordinaten kann die Asymptote bestimmt werden durch ihre Neigung α gegen die Polarachse und den Abstand q vom Pol. Zunächst bemerke man, daß, wenn $\frac{1}{r} = f(\theta)$ die Gleichung der Kurve ist, $f(\theta)$ nach Null konvergiert, wenn M ins Unendliche fortrückt. Falls also die genannte Funktion stetig ist, sind die Winkel, welche die Polarachse mit den Asymptoten bildet, die Wurzeln der Gleichung $f(\theta) = 0$. Um die Bestimmung der Asymptote, die zu einer gegebenen Wurzel α gehört, zu vollenden, genügt es zu bemerken, daß der Abstand des Punktes M von der Asymptote nach Null konvergieren muß, und daß folglich auf Grund der Definition von $f'(\alpha)$ sein muß

$$q = \lim_{r = \infty} r \sin(\theta - \alpha) = \lim_{\theta = \alpha} \frac{\theta - \alpha}{f(\theta)} = \frac{1}{f'(\alpha)}\cdot$$

598. Wir wollen jetzt unter der Voraussetzung, daß M ins Unendliche fortrückt, folgendes beweisen: Wenn die Tangente in M einer Grenzlage zustrebt, ist diese notwendig eine Asymptote. Wegen dieser Eigenschaft pflegt man in der analytischen Geometrie die Asymptoten zu betrachten als die Tangenten in den Schnittpunkten der unendlich fernen Geraden und der Kurve. Vergleicht man in der Tat die Gleichung der Tangente $Y = Xy' + (y - xy')$ mit der ihrer Grenzlage $Y = m_1 X + h_1$, so sieht man, daß die Zulassung der Existenz dieser Grenzlage gleichbedeutend ist mit der Zulassung der Existenz der Grenzwerte von y' und von $y - xy'$ für unendliches x, sodaß

$$\lim y' = m_1, \qquad \lim (y - xy') = h_1$$

ist. Inzwischen hat man unter Anwendung des Theorems von L'Hospital

$$m = \lim \frac{y}{x} = y' = m_1,$$

ferner

$$h = \lim (y - mx) = \lim \frac{\frac{y}{x} - m}{\frac{1}{x}} = \lim (y - xy') = h_1.$$

Zu demselben Resultat gelangt man mit ebenso großer Leichtigkeit unter Anwendung von Polarkoordinaten. In der Tat ist der Abstand zwischen Tangente und Pol, wenn man ihn wie im vorigen Paragraphen berechnet, $-r \sin \omega$ und kann für unendlich zunehmendes r nicht nach einem Grenzwert q_1 konvergieren, ohne daß ω nach einem Vielfachen von π konvergiert. Daraus ergibt sich folgendes: Wenn die Gerade, welche die Grenzlage der Tangente sein soll, gegen die Polarachse die Neigung α_1 hat, d. h. wenn $\theta + \omega$ einem Grenzwert α_1 zustrebt, so existiert auch $\alpha = \lim \theta = \alpha_1 - n\pi$, und es ist außerdem

$$q = \lim \frac{1}{f'(\theta)} = -\lim \frac{r^2}{r'} = -\lim r \operatorname{tg} \omega = -\lim r \sin \omega = q_1.$$

599. Übungen. a) Die Kurve $y = \frac{\cos x}{x}$ ist offenbar asymptotisch zu beiden Achsen. Während sich aber die Achse der y als Grenzlage der Tangente in M betrachten läßt für den Fall, daß die Ordinate y unbegrenzt wächst, kann man so etwas von der Achse der x nicht sagen, da $y - xy'$ nach keinem Grenzwert konvergiert, wenn x ins Unendliche wächst. Mit andern Worten, die Tangente hört nicht auf zu oszillieren, wie man auch aus der Bemerkung erkennt, daß die Tangenten in den unendlich vielen Schnittpunkten der Kurve mit der x-Achse alle auf der y-Achse in den Punkten $y = \pm 1$ zusammenlaufen. Es ist also unter Umständen eine Asymptote nicht die Grenzlage der Tangente, d. h. es gilt nicht die Umkehrung des Satzes, den wir im vorigen Paragraphen bewiesen haben.

b) Bei dem vorigen Beispiel hat die Tangente, obwohl sie keine

Grenzlage hat, doch die Tendenz parallel zu der Asymptote zu werden. Anders ist es bei der Kurve

$$y = 2^{-[x]}\left(1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{x - [x]}\right),$$

die wir früher bereits betrachtet haben (§ 294, f). Hier oszilliert die Tangente auch hinsichtlich ihrer Richtung unaufhörlich derart, daß sie unendlich oft senkrecht zu der Asymptote wird. Bei der Kurve $xy = [x]$ dagegen hat man für unendliches x zunächst $\lim y = 1$, ferner $\lim y' = 0$, $\lim (y - xy') = 2 \lim ([x]/x) = 2$, d. h. die Tangente strebt einer Grenzlage $(y = 2)$ zu, aber diese fällt nicht mit der Asymptote $(y = 1)$ zusammen. Das widerspricht nicht dem im vorigen Paragraphen bewiesenen Theorem; denn beim Beweise dieses Theorems haben wir, indem wir das Theorem von L'Hospital in Anspruch nahmen, stillschweigend vorausgesetzt, daß die Derivierte von y einzig sei, während in dem von uns hier betrachteten Falle die linksseitige Derivierte in allen Punkten mit ganzzahliger Abscisse fehlt. Dieses Beispiel ist geeignet zu zeigen, wie man bei der Anwendung eines Theorems auf der Hut sein und darauf achten muß, ob auch die einschränkenden Bedingungen des Satzes erfüllt sind.

c) Um die Asymptoten der durch die Gleichungen $x \cos\theta = a$, $y = b(\operatorname{tg}\theta - \theta)$ dargestellten Kurve (des Profils eines abwickelbaren Helikoids) zu finden oder besser die Asymptoten desjenigen Zweiges der Kurve, der den zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegenden Werten von θ entspricht, ist zunächst zu bemerken, daß man, um eine Koordinate zu unendlichem Wachsen zu bringen, θ nach $\pm\frac{\pi}{2}$ konvergieren lassen muß. Unter diesen Bedingungen hat man

$$m = \lim \frac{y}{x} = \frac{b}{a} \lim (\sin\theta - \theta\cos\theta) = \pm \frac{b}{a},$$

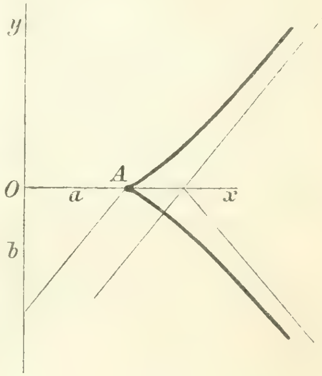

Fig. 58.

$$\lim\left(y \mp \frac{b}{a}x\right) = b \lim \frac{\sin\theta - \theta\cos\theta \mp 1}{\cos\theta} = -\, b \lim \theta = \mp \frac{1}{2}\pi b.$$

Die gesuchten Asymptoten sind also die durch die Gleichungen $\frac{x}{a} \mp \frac{y}{b} = \frac{\pi}{2}$ dargestellten Geraden.

d) Bei der Aufsuchung der Asymptoten muß man nicht unterlassen, x nach $-\infty$ wie nach $+\infty$ variieren zu lassen, da in beiden Fällen verschiedene Asymptoten herauskommen können. So hat man z. B. bei der Kurve $y = x\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, wenn x nach $\pm\infty$ hingeht,

$$m = \lim \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \pm 1,$$

$$h = \lim (y \mp x) = \mp \lim \frac{2x}{e^{2x} + 1} = 0,$$

und die Kurve ist daher asymptotisch zu den Winkelhalbierenden der Achsen. Ein einfacheres Beispiel liefert uns die Kurve $y = \operatorname{arctg} x$. Die

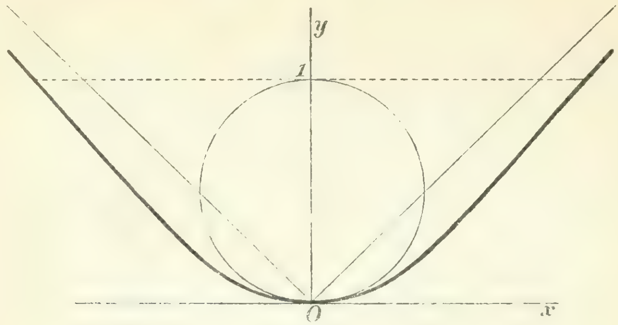

Fig. 59.

Betrachtung der beiden Fälle ist auch notwendig, um zu wissen, ob die Kurve sich der Asymptote nur in einem Sinne oder in beiden unbegrenzt nähert.

e) Die Kurve $y = x / \left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)$ hat im Anfangspunkt zwei Tangenten, da man (§ 282, c) links vom Anfangspunkt $y' = 1$, rechts dagegen $y' = 0$ hat. Wenn x nach $\pm\infty$ hin variiert, so nimmt auch y seinem absoluten Betrage nach beständig zu. Aber die beiden unendlichen Zweige, die man auf diese Weise erhält, sind asymptotisch zu einer und derselben Geraden, da man hat $\lim e^{\frac{1}{x}} = 1$, $\lim x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) = 1$ und folglich

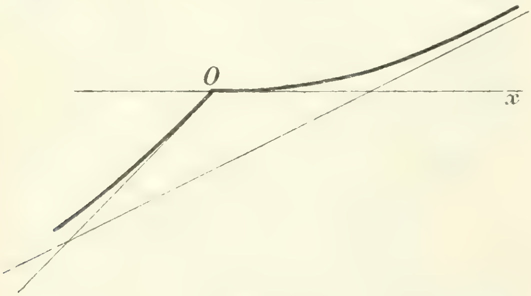

Fig. 60.

$$m = \lim \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2}, \quad h = \lim\left(y - \frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}\lim x\,\frac{1 - e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = -\frac{1}{4}$$

für $x = \pm\infty$. Also ist die Gleichung der Asymptote $x - 2y = \frac{1}{2}$. Zu diesem Resultat gelangt man auch, indem man y in eine Reihe entwickelt:

$$y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{48x^2} + \cdots.$$

f) Die Reihenentwickelungen sind sehr nützlich, wenn man das Verhalten der Kurven in den ins Unendliche sich erstreckenden Zweigen untersuchen will. Ist z. B. die Kurve $y = xe^{\frac{1}{x}}$ gegeben, so genügt es zu bemerken, daß man hat $y = x + 1 + \frac{1}{2x} + \cdots$, um zu erkennen, daß die Kurve asymptotisch zu der Geraden $y = x + 1$ ist. Da ferner y auch dann ins Unendliche wächst, wenn x abnehmend nach Null konvergiert, während es den Grenzwert Null hat, wenn x zunehmend nach Null konvergiert, so sieht man, daß die Kurve aus zwei Zweigen besteht, die beide asymptotisch zu jener Geraden sind, aber so, daß nur einer von ihnen auch zur y-Achse asymptotisch ist, während der andere im Anfangspunkt aufhört. In ähnlicher Weise sieht man bei der Kurve $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ sofort, daß sie die y-Achse als einzige geradlinige Asymptote zuläßt (nur für den Zweig rechts), dafür aber die parabolische Asymptote $y = x^2 + x + \frac{1}{2}$ besitzt, die innerhalb des linken und außerhalb des rechten Zweiges sich ausdehnt. Es ist ferner merkwürdig die Kurve $y = x^2/\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)$, da sie große Ähnlichkeit mit einer Parabel hat und im Unendlichen genau wie die Parabel $y = \frac{1}{4}(2x^2 - x)$ sich zu verhalten strebt. Unterwirft man diese einer Translation in der Ebene derart, daß der Scheitel nach dem Anfangspunkt gelangt, so durchsetzen die beiden Kurven einander in diesem Punkte, wo sie sich gleichzeitig berühren; denn man hat rechts vom Anfangspunkt $y < \frac{1}{2}x^2$ und links $y > \frac{1}{2}x^2$.

g) Wendet man auf die hyberbolische Spirale die am Schlusse von § 597 angegebenen Formeln an, so erhält man

$$f(\theta) = \frac{\theta}{a}, \quad f'(\theta) = \frac{1}{a}, \quad \alpha = 0, \quad q = a$$

und findet so die zur Polarachse parallele Asymptote wieder, auf die wir früher (§ 589, g) hingewiesen haben. Ebenso hat man bei der Quadratrix (§ 589, i)

$$f(\theta) = \frac{\sin\theta}{a\theta}, \quad f'(\theta) = \frac{\theta\cos\theta - \sin\theta}{a\theta^2}, \quad \alpha = n\pi, \quad q = (-1)^n n\pi a.$$

In analoger Weise zeigt man, daß die Sinusspiralen (§ 589, m) nur für $m < -1$ Asymptoten im Endlichen besitzen, und in diesem Falle gehen die Asymptoten alle vom Pol aus und bilden mit der Polarachse die Winkel

$$0, \quad \frac{\pi}{m}, \quad \frac{2\pi}{m}, \quad \frac{3\pi}{m}, \quad \ldots.$$

h) Bei dem durch die Gleichung $r = p/(1 - k\cos\theta)$ dargestellten Kegelschnitt hat man

$$f(\theta) = \frac{1 - k\cos\theta}{p}, \quad f'(\theta) = \frac{k}{p}\sin\theta, \quad \cos\alpha = \frac{1}{k}, \quad q = \frac{\pm p}{\sqrt{k^2 - 1}}.$$

Nur im Falle der Hyperbel, d. h. für $k > 1$, ist α reell; aber die unendlich vielen Winkel, deren Kosinus $\frac{1}{k}$ ist, bestimmen nur zwei Richtungen, die antiparallel in Bezug auf die Fokalachse sind. In diesem Falle ist

$p = -\frac{b^2}{a}$, $k^2 - 1 = \frac{b^2}{a^2}$ und daher $q = \pm b$ und auch $q = \pm ka \sin\alpha$. Also gehen die beiden Asymptoten durch den Mittelpunkt hindurch und sind um b vom Pol, d. h. von den Brennpunkten, entfernt.

i) So oft man beim Diskutieren von Kurven, die in Polarkoordinaten gegeben sind, findet, daß r einem Grenzwert a zustrebt, wenn θ (positiv oder negativ) unendlich wird, so kann man behaupten, daß die Kurve einen asymptotischen Kreis zuläßt, dessen Radius gleich a ist und dessen Mittelpunkt im Pol liegt. Es ist nützlich zu bemerken, daß das Konvergieren von r nach a für gewöhnlich so stattfindet (§ 308, c), daß gleichzeitig r' der Null zustrebt, mithin ω dem Wert $\frac{\pi}{2}$, d. h. daß die Kurve die Tendenz hat, den Kreis zu berühren. Insbesondere ist im Falle $a = 0$ der Pol ein asymptotischer Punkt. Dieser Fall tritt ein bei verschiedenen früher betrachteten Kurven (§ 589, e, g, h), wie bei der logarithmischen Spirale, der hyperbolischen Spirale, der Kochleoide. Es genügt die Konchoiden (§ 589, j) dieser Kurven in Bezug auf den Pol zu nehmen, um andere Kurven zu erhalten, die asymptotische Kreise besitzen. Besonders bemerkenswert sind die Konchoiden der logarithmischen Spirale, welche für eine gegebene Spirale alle untereinander ähnlich sind. Richtet man in der Tat die Polarachse vom Pol der Spirale nach dem Schnittpunkt derselben mit dem asymptotischen Kreis einer ihrer Konchoiden, so ist die Gleichung der Konchoide notwendig $r = a(e^{m\theta} \pm 1)$, wo nur a, der Radius des Kreises, beliebig ist. Der Zweig, welcher dem Zeichen $+$ entspricht, liegt ganz außerhalb des Kreises, und wickelt sich unbegrenzt um ihn herum. Der andre Zweig dringt in den Kreis ein, geht durch den Pol hindurch, wo er sich verhält wie eine archimedische Spirale $(r = ma\theta)$, und indem er sich dann mit unendlich vielen Windungen von ihm entfernt, nähert er sich unbegrenzt der Peripherie des Kreises.

600. Wir wollen uns jetzt genauer mit den Asymptoten der algebraischen Kurven beschäftigen, und zwar zunächst diejenigen aufsuchen, welche zur y-Achse parallel sind. Zu dem Zwecke wollen wir die Gleichung der Kurve, die wir uns auf ganze rationale Form gebracht denken, nach y ordnen:

$$y^n \psi(x) + y^{n-1}\psi_1(x) + y^{n-2}\psi_2(x) + \cdots + \psi_n(x) = 0.$$

Für unendliches y muß x nach einem Grenzwert l konvergieren, um dessen Berechnung es sich gerade handelt, und es streben daher die stetigen Funktionen $\psi(x)$, $\psi_1(x)$, ... den endlichen Grenzwerten $\psi(l)$, $\psi_1(l)$, ... zu. Daraus folgt, wenn man die Gleichung durch y^n dividiert und dann y unendlich werden läßt, $\psi(l) = 0$. Dies ist die Gleichung, welche die Werte von l liefert, deren jedem eine Asymptote $X = l$ entspricht. Wir ordnen nunmehr unter Beiseitelassung der Asymptoten, welche zur y-Achse parallel sind, die Gleichung der Kurve nach homogenen Gruppen. Setzt man $y = tx$, so kann man schreiben:

$$x^n\varphi(t) + x^{n-1}\varphi_1(t) + x^{n-2}\varphi_2(t) + \cdots + \varphi_n(t) = 0. \tag{12}$$

Nun hat man $m = \lim t$, und m ist endlich. Wenn man also die obige Gleichung durch x^n dividiert, so erhält man für unendliches x das Resultat $\varphi(m) = 0$. Man braucht diese Gleichung nur aufzulösen, um die Richtungen der Asymptoten zu bestimmen. Wir wollen zunächst annehmen, m sei eine einfache Wurzel von φ, sodaß $\varphi'(m) \gtrless 0$ ist, und h zu berechnen suchen. Dividiert man die Gleichung (12) durch x^{n-1}, so hat man

$$(13) \qquad x\varphi(t) + \varphi_1(t) + \frac{\varphi_2(t)}{x} + \cdots = 0;$$

ferner erhält man für unendliches x, wenn man zuvor bemerkt, daß

$$\lim x(t-m) = \lim (y - mx) = h$$

ist, und daran denkt, daß $\varphi(m) = 0$ ist,

$$\lim x\varphi(t) = \lim x(t-m) \cdot \lim \frac{\varphi(t)}{t-m} = h\varphi'(m)$$

auf Grund der Definition von $\varphi'(m)$. Also wird die Gleichung (13)

$$h\varphi'(m) + \varphi_1(m) = 0 \quad \text{und liefert} \quad h = -\frac{\varphi_1(m)}{\varphi'(m)}.$$

Ist m eine vielfache Wurzel von φ, so hat man $\varphi'(m) = 0$, und wenn nicht $\varphi_1(m) = 0$ ist, so kann man sagen, daß die Asymptote unendlich fern ist. Aber auch, wenn $\varphi_1(m) = 0$ ist, wird die letzte Formel illusorisch, und man muß auf die Formel (12) zurückgreifen. Dividiert man dieselbe durch x^{n-2}, so erhält man

$$(14) \qquad x^2\varphi(t) + x\varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \frac{\varphi_3(t)}{x} + \cdots = 0.$$

Nun ist

$$\lim x^2\varphi(t) = \lim x^2(t-m)^2 \cdot \lim \frac{\varphi(t)}{(t-m)^2} = \frac{1}{2} h^2\varphi''(m);$$

mithin wird für unendliches x die Gleichung (14)

$$(15) \qquad \tfrac{1}{2} h^2\varphi''(m) + h\varphi_1'(m) + \varphi_2(m) = 0$$

und liefert zwei Werte für h, die zwei (reellen oder imaginären) parallelen Asymptoten entsprechen. Wenn ferner m eine dreifache Wurzel von φ ist, so liegt im allgemeinen eine der zugehörigen Asymptoten nicht im Endlichen; es sind zwei von ihnen unendlich fern, wenn auch $\varphi_1'(m) = 0$ ist, und wenn endlich alle Koeffizienten der Gleichung (15) gleich Null sind, so muß man wieder die Gleichung (12) vornehmen, sie durch x^{n-3} dividieren und dann zur Grenze für unendliches x übergehen, wodurch man erhält

$$\tfrac{1}{6} h^3\varphi'''(m) + \tfrac{1}{2} h^2\varphi_1''(m) + h\varphi_2'(m) + \varphi_3(m) = 0;$$

u. s. f.

601. Mit Hilfe homogener Koordinaten läßt sich die Aufsuchung der Asymptoten der algebraischen Kurven in einfacherer Weise durch-führen, wenn man von dem in § 598 bewiesenen Theorem Gebrauch macht. Zunächst bemerke man, daß sich das Resultat $\varphi(m) = 0$ in folgender Weise aussprechen läßt: Wenn man in der Gleichung einer Kurve n-ter Ordnung alle Glieder von niedrigerem als n-tem Grade unterdrückt, so stellt die dadurch erhaltene Gleichung das System der Parallelen dar, die durch den Anfangspunkt zu den n Asymptoten gezogen sind und reell oder imaginär, verschieden oder zusammenfallend sein können. Dies wird sozusagen evident, wenn man setzt

$$\Phi(x, y, z) = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + z x^{n-1} \varphi_1\left(\frac{y}{x}\right) + z^2 x^{n-2} \varphi_2\left(\frac{y}{x}\right) + \cdots,$$

um die Gleichung der Kurve homogen zu machen, und dann bemerkt, daß das Hinschreiben der Gleichung $\varphi = 0$ soviel bedeutet als in $\Phi = 0$ zu setzen $z = 0$, d. h. die n Schnittpunkte der Kurve mit der unendlich fernen Geraden zu betrachten. Nunmehr schreibe man die Gleichung der Tangente (§ 587)

$$X \frac{\partial \Phi}{\partial x} + Y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + Z \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \tag{16}$$

und um auszudrücken, daß der Berührungspunkt im Unendlichen liegt, setze man in den Koeffizienten $z = 0$. Man erhält auf diese Weise eine Gleichung, die in x und y homogen ist. Darauf eliminiere man y/x aus dieser Gleichung und derjenigen, welche aus $\Phi = 0$ für $z = 0$ entsteht. Man gelangt dann zu der Gesamtgleichung der Asymptoten. Im Grunde ist diese Methode nicht verschieden von der früheren. In der Tat hat man, für $z = 0$, $\Phi = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, d. h. $\Phi = 0$, wenn man für y/x einen Wert m annimmt, der der Gleichung $\varphi = 0$ genügt. Außerdem ist

$$x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + y \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = x^{n-1} \varphi'\left(\frac{y}{x}\right), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = x^{n-1} \varphi_1\left(\frac{y}{x}\right)$$

und folglich

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -m x^{n-1} \varphi'(m), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = x^{n-1} \varphi'(m), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = x^{n-1} \varphi_1(m).$$

Mithin wird die Gleichung (16) in nichthomogenen Koordinaten

$$Y = m X - \frac{\varphi_1(m)}{\varphi'(m)}.$$

602. Übungen. a) Wenn die Kurve $x^3 + y^3 = 3axy$ gegeben ist, die man das *Folium Cartesii* nennt, so hat man zur Bestimmung der Neigungskoeffizienten der Asymptoten die Gleichung $1 + m^3 = 0$, welche als einzige reelle Wurzel $m = -1$ zuläßt; ferner ist

$$h = -\frac{\varphi_1(m)}{\varphi'(m)} = \frac{3ma}{3m^2} = -a.$$

Also hat die Kurve nur eine reelle Asymptote, welche durch die Gleichung

$x + y + a = 0$ dargestellt wird. Für die Anwendungen braucht man nicht die in § 600 erhaltenen Formeln im Kopfe zu haben, sondern nur das Verfahren, welches zur Gewinnung dieser Formeln angewandt wurde. So kann man im Falle des Folium, nachdem man bemerkt hat, daß $x + y$ der einzige reelle Faktor von $x^3 + y^3$, der Summe der Glieder höchsten Grades, ist, unmittelbar die Gleichung der Asymptote hinschreiben:

$$x + y = \left(\frac{3axy}{x^2 - xy + y^2}\right)_{y=-x} = -a.$$

Zu demselben Resultat gelangt man, indem man y in eine Reihe entwickelt:

$$y = -x - a + \frac{a^3}{3x^2} - \frac{a^4}{3x^3} + \cdots.$$

b) Etwas allgemeiner betrachte man die Gleichung

$$(x + y)(x^2 - 2kxy + y^2) = 2(1 + k)axy,$$

welche für $k = \frac{1}{2}$ das Folium darstellt und für $k = 0$ eine andere wichtige Kurve, die sogenannte *Logocyklika.* Solange $k^2 < 1$ ist, gibt es nur eine reelle Asymptote, deren Gleichung

$$x + y = \left(\frac{2(1 + k)axy}{x^2 - 2kxy + y^2}\right)_{y=-x} = -a$$

ist, sodaß die betrachteten Kurven alle asymptotisch zu einer und derselben Geraden sind. Dagegen besitzen diejenigen, für welche $k^2 > 1$ ist, noch zwei andere reelle Asymptoten, die zu den Geraden

$$x^2 - 2kxy + y^2 = (y - mx)(y - m'x) = 0$$

parallel sind, wobei $m = k \pm \sqrt{k^2 - 1}$ ist. Die Gleichung einer Asymptote ist

$$y - mx = \left(\frac{2(1 + k)axy}{(x + y)(y - m'x)}\right)_{y=mx} = \frac{2(1 + k)ma}{(1 + m)(m - m')} = \frac{ma}{m - 1},$$

sodaß man zur Darstellung der beiden Asymptoten findet

$$y = kx + \frac{1}{2}a \pm \left(x + \frac{\frac{1}{2}a}{k - 1}\right)\sqrt{k^2 - 1}.$$

Diese Asymptoten treffen sich in dem Punkte $x = y = -\frac{1}{2}a/(k - 1)$ unter einem Winkel, dessen Kosinus $1/k$ ist. Nur für $k = 2$ gehen die drei Asymptoten durch einen Punkt hindurch und sind alsdann parallel zu den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks.

c) Um zu zeigen, in welcher Weise man die homogenen Koordinaten anwendet, betrachten wir wieder das Folium und setzen

$$\Phi(x, y, z) = x^3 + y^3 - 3axyz,$$

um das im vorigen Paragraphen Gesagte anzuwenden. Für $z = 0$ hat man

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 3y^2, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -3axy,$$

und die Gesamtgleichung der Asymptoten ergibt sich also durch Elimination des Verhältnisses y/x aus den Gleichungen

$$x^3 + y^3 = 0, \qquad Xx^2 + Yy^2 - axy = 0$$

oder (wenn man x und y für die laufenden Koordinaten schreibt) durch Elimination von m aus $1 + m^3 = 0$ und $x + m^2 y = ma$. Führt man diese Elimination aus, so erhält man $x^3 + y^3 + a^3 = 3axy$, und diese Gleichung zerlegt sich in die drei folgenden

$$x + y + a = 0, \quad x + \omega y + \omega^2 a = 0, \quad x + \omega^2 y + \omega a = 0,$$

wo ω eine imaginäre kubische Einheitswurzel darstellt. Das Folium hat somit außer der reellen Asymptote $x + y + a = 0$ zwei imaginäre Asymptoten, die sich in dem Punkte (a, a) schneiden. Die erhaltene Gleichung kann man auch unmittelbar aufstellen, wenn man sich von der Bemerkung leiten läßt, daß die Gesamtgleichung der Asymptoten einer Kurve n-ter Ordnung sich aus der Gleichung der Kurve selbst ergeben muß, indem man die Koeffizienten der Glieder von niedrigerem als $(n - 1)$-tem Grade derart ändert, daß die Gleichung sich in n lineare Gleichungen spaltet. Im Falle des Folium führt diese Bemerkung sofort zum Ziele, weil es, wie wir wissen (§ 473), genügt a^3 zu $x^3 + y^3 - 3axy$ zu addieren, um den Wert der Zirkulante (x, y, a) zu erhalten, die in drei lineare Faktoren zerlegbar ist.

d) Es sei jetzt noch

$$\Phi(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy.$$

Die Gleichung der Tangente ist

$$(ax + hy + gz)X + (hx + by + fz)Y + (gx + fy + cz)Z = 0.$$

Setzt man $z = 0$ und $Z = 1$, so erhält man also

$$(aX + hY + g)x + (hX + bY + f)y = 0$$

und hat nun y/x aus dieser Gleichung und aus

$$ax^2 + by^2 + 2hxy = 0$$

zu eliminieren. Man erhält dabei, wenn man X und Y durch x und y ersetzt,

$$a(hx + by + f)^2 + b(ax + hy + g)^2 - 2h(ax + hy + g)(hx + by + f) = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} a & h & ax + hy + g \\ h & b & hx + by + f \\ ax + hy + g & hx + by + f & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Subtrahiert man von der letzten Vertikalreihe die mit x multiplizierte erste und die mit y multiplizierte zweite und verfährt dann in analoger Weise mit den Horizontalreihen, so findet man

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c - \Phi \end{vmatrix} = 0.$$

Man erhält also die Gesamtgleichung der Asymptoten des Kegelschnitts

$$ax^2 + by^2 + c + 2fy + 2gx + 2hxy = 0,$$

indem man auf der rechten Seite 0 durch die Diskriminante D, geteilt durch $ab - h^2$, ersetzt. Zu diesem Resultate gelangt man sehr viel rascher mit Hilfe der Bemerkung, die wir beim vorigen Übungsbeispiel gemacht haben, indem man also c durch eine Zahl c' ersetzt derart, daß die Gleichung sich in zwei lineare Gleichungen zerlegt. Dazu ist erforderlich, daß die neue Diskriminante

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & h & 0 \\ h & b & 0 \\ g & f & c'-c \end{vmatrix} = D + (ab - h^2)(c' - c)$$

gleich Null ist, daß man also hat $c' = c - \frac{D}{ab - h^2}$.

Singularitäten.

603. Wendepunkte. Gewisse Besonderheiten, die sich in Punkten einer Kurve darbieten können und die ihrer Gestalt anhaften, geben Veranlassung dazu, diese Punkte als singuläre Punkte zu bezeichnen. So bietet sich z. B. in den Punkten, wo $y' = 0$ ist, die Besonderheit, daß die Ordinate im allgemeinen ein Minimum oder ein Maximum wird, und doch sind diese Punkte keine singulären Punkte, da man nur die Richtung der Achsen zu ändern braucht, um die beobachtete Besonderheit anderswohin zu verlegen. Das gilt aber nicht von den Punkten, in welchen $y'' = 0$ ist: sie heißen Wendepunkte oder Inflexionspunkte und sind singuläre Punkte, weil in ihnen die Krümmung null ist, d. h. eine Eigenschaft vorhanden ist, die keine Änderung der Achsen zu zerstören imstande ist. Es ist übrigens leicht zu konstatieren, daß in der Umgebung eines solchen Punktes M die Kurve ein außergewöhnliches Verhalten in Bezug auf die Tangente in M hat. Verlegt man den Anfangspunkt nach M und läßt die Achsen mit der Tangente und der Normale zusammenfallen, so hat man, nach der Definition von y'' als der Derivierten von y', $\lim (y'/x) = 0$, mithin auf Grund des Theorems von L'Hospital $\lim (y/x^2) = 0$. Die Entfernung der Tangente in M von den zu M unendlich benachbarten Kurvenpunkten ist also infinitesimal von höherer als zweiter Ordnung, sodaß man sagen könnte, die Kurve berühre in den Wendepunkten ihre Tangente *inniger*. Um ferner die Bezeichnung „Wendepunkte" zu rechtfertigen, muß man bemerken, daß y'', wenn es verschwindet, im allgemeinen sein Zeichen wechselt, und daß daher (§ 348, d), wenn man die Kurve durchläuft, beim Überschreiten eines Wendepunktes die Konvexität derselben sich in Konkavität verwandelt oder umgekehrt. Man hat also eine wirkliche und eigentliche Wendung (Inflexion) im gewöhnlichen Sinne des Wortes, d. h. die Kurve durchsetzt die Tangente. Dies ist nicht mehr der Fall, wenn y'' in der

Umgebung von M ein bestimmtes Zeichen bewahrt, in welchem Falle der Wert Null ein Minimum oder ein Maximum von y'' darstellt. Daraus folgt, daß (§ 313) die Abscissen der Punkte, in welchen die Kurve ihre Tangente durchsetzt, die einfachen Wurzeln von y'' sind oder die vielfachen Wurzeln von ungerader Ordnung. Dies erklärt sich in einfacher Weise durch die Bemerkung, daß jene Werte von x gerade diejenigen sind, welche die Funktion y' zu einem Minimum oder Maximum machen, d. h. die Abscissen derjenigen Punkte, in deren Umgebung es passiert, daß die Tangente aufhört in dem einen Sinne fortzuschreiten und im entgegengesetzten sich zu verschieben anfängt, was noch klarer aus der Formel (7) hervorgeht.

604. Um die Wendepunkte der Kurve $y = f(x)$ zu bestimmen, muß man die Gleichung $f''(x) = 0$ auflösen oder irgend eine andere mit ihr äquivalente (§ 594), die also ausdrücken muß, daß die Krümmung null ist. Wenn z. B. die Kurve durch ein Paar von Gleichungen $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ gegeben ist, so ist es zweckmäßig statt $y'' = 0$ zu schreiben $dx d^2y - dy d^2x = 0$. Mit andern Worten, die Wendepunkte entsprechen den Werten von t, die $\varphi'(t)\psi''(t) - \psi'(t)\varphi''(t)$ zum Verschwinden bringen. Ist dagegen die Kurve in Polarkoordinaten gegeben, so ist die Gleichung, welche man anzuwenden hat, $r^2 + 2r'^2 - rr'' = 0$, die (notwendig vielfachen) Wurzeln von r ausgeschlossen; oder man schreibt, wenn die Gleichung der Kurve unter der Form $1/r = f(\theta)$ gegeben ist, $f + f'' = 0$. Wenn man ferner unter Anwendung cartesischer Koordinaten die Kurve als dargestellt durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ betrachtet, so ist die Gleichung, welche die Wendepunkte liefert, folgende:

$$(17) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

vorausgesetzt, daß man die Punkte ausschließt, in welchen auch $\Delta f = 0$ ist. Der Gleichung (17) kann man im Falle der algebraischen Kurven eine bemerkenswerte Form geben, wenn die Gleichung der Kurve bereits homogen gemacht ist. Es sei n der Grad der Gleichung, und man subtrahiere in der obenstehenden Determinante von der mit $n-1$ multiplizierten letzten Vertikalreihe die mit x multiplizierte erste und die mit y multiplizierte zweite; darauf mache man dasselbe mit den Horizontalreihen. Die beiden ersten Elemente der letzten Vertikalreihe oder der letzten Horizontalreihe verwandeln sich (§ 371) in

$$(n-1)\frac{\partial f}{\partial x} - \left(x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = z\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z},$$

$$(n-1)\frac{\partial f}{\partial y}-\left(x\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}+y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)=z\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}$$

und das letzte Element in

$$-(n-1)\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)-z\left(x\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}+y\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\right)$$
$$=(n-1)z\frac{\partial f}{\partial z}-z\left((n-1)\frac{\partial f}{\partial z}-z\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right),$$

was sich auf $z^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ reduziert. Die betrachtete Gleichung wird somit

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix}=0.$$

Man bestimmt also die Wendepunkte der algebraischen Kurve $f=0$, indem man die Hessesche Form H der homogen gemachten Funktion f gleich Null setzt (vgl. §§ 378, 569). Die Kurve $H=0$ heißt die Hessesche Kurve der Kurve $f=0$. Die Wendepunkte einer algebraischen Kurve sind also Punkte, in welchen sie ihre Hessesche Kurve schneidet; und da diese die Ordnung $3(n-2)$ hat, so hat man auf einer Kurve von der Ordnung n im allgemeinen $3n(n-2)$ Wendepunkte. Ein Kegelschnitt z. B. hat keine Wendepunkte, eine Kurve dritter Ordnung hat deren neun (unter ihnen immer sechs imaginäre), u. s. w. Man bemerke unter Bezugnahme auf die Formel (9), daß jeder gemeinsame Punkt der beiden Kurven $f=0$ und $H=0$ ein Wendepunkt der ersten Kurve ist, sobald nicht $\Delta f=0$ ist, sobald also nicht die ersten Derivierten von f gleichzeitig verschwinden. Die Bedingung $\Delta f=0$ (zusammen mit $f=0$) definiert für sich allein andere singuläre Punkte, die ebenfalls der Gleichung (17) genügen und daher auf der Hesseschen Kurve liegen. Von diesen Punkten werden wir in kurzem (§ 606) handeln; schon jetzt aber beachte man, daß ihre Anwesenheit die Zahl der Wendepunkte, $3n(n-2)$, herabdrückt.

605. Übungen. a) Bei der Quadratrix $\left(y=x\cot\frac{x}{a}\right)$ reduziert sich, da $y''=\frac{2(y-a)}{a^2\sin^2\frac{x}{a}}$ ist, die Gleichung der Wendepunkte auf $y=a$, vorausgesetzt, daß $x\gtrless 0$ ist. Der zentrale Zweig hat also keinen Wendepunkt, aber die Tangente im Scheitel schneidet alle andern Zweige in den zugehörigen Wendepunkten. Die Normalen der Kurve in allen diesen Punkten gehen durch den Anfangspunkt hindurch.

b) Die Gestalt der durch die Gleichung $y=x\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ dargestellten

Kurve (§ 599, d) läßt sofort die Existenz zweier in Bezug auf die y-Achse symmetrischer Wendepunkte vermuten; und in der Tat reduziert sich die Gleichung $y''=0$ auf $y=1$, die Gleichung einer Geraden, welche die gegebene Kurve in ihren beiden Wendepunkten trifft.

c) Bei der Kurve $y = x^2 \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$ ist die Gleichung der Wendepunkte zu kompliziert, um daraus Nutzen ziehen zu können. Es ist aber leicht, sich von der allgemeinen Gestalt der Kurve Rechenschaft zu geben, indem man bemerkt, daß dieselbe durch den Anfangspunkt tangential zur x-Achse hindurchgeht (vgl. § 294, b) und sich asymptotisch zu der Geraden $y = \frac{1}{2}x$ ins Unendliche erstreckt. Außerdem sagt uns die Entwickelung

$$y = \frac{x}{2} - \frac{1}{8x} + \cdots,$$

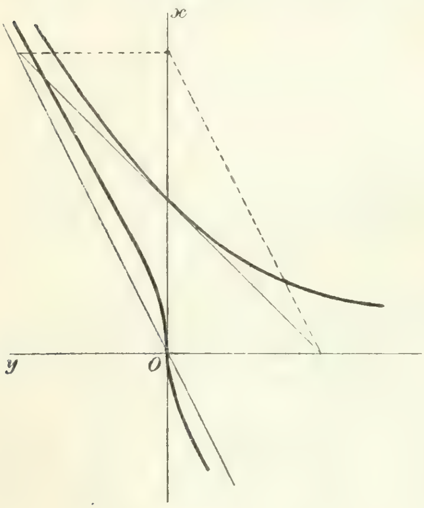

Fig. 61.

daß die Kurve asymptotisch zu der Hyperbel $x^2 - 2xy = \frac{1}{4}$ ist, und dadurch wird ihre angenäherte Konstruktion erleichtert. Es gelingt auf diese Weise vorauszusehen, daß die Kurve an drei Stellen, zu denen der Anfangspunkt O gehört, eine Wendung macht. Nichtsdestoweniger muß bemerkt werden, daß O kein Wendepunkt ist, und man hat auf diese Weise ein Beispiel für eine Kurve, die ihre Tangente in einem Punkte durchsetzt, der kein Wendepunkt ist. In der Tat wissen wir (§ 314, i), daß y'', betrachtet als rechtsseitige oder linksseitige Derivierte von y', den Wert 2 oder den Wert -2 hat. Es genügt übrigens zu bemerken, daß $\lim(y/x)^2) = \pm 1$ ist, um sich zu vergewissern, daß im Punkte O eine wesentliche Eigenschaft der Wendepunkte fehlt, da der Abstand zwischen der Tangente in O und den zu O unendlich benachbarten Kurvenpunkten nicht unendlich klein von höherer als zweiter Ordnung ist, sondern vielmehr von zweiter Ordnung, wie in den gewöhnlichen Punkten.

d) Um sich zu überzeugen, wie nützlich es ist, ein sicheres analytisches Kriterium ($y''=0$) zur Aufsuchung der Wendepunkte zu haben, genügt es die Kurve $y = e^x + \sin x$ zu konstruieren, indem man $\sin x$ zu den Ordinaten der logarithmischen Kurve $y = e^x$ hinzufügt. Eine rohe Zeichnung dieser Kurve würde zu der Meinung führen, daß die Kurve auch für $x > 0$ unendlich oft sich wendet; dies ist aber nicht der Fall, da die Funktion $y'' = e^x - \sin x$ keine positiven Wurzeln zuläßt, weil man für $x > 0$ hat $e^x > 1 \geq \sin x$. Dagegen gibt es für $x < 0$ unendlich viele Wendepunkte. Ihre Abscissen sind die der Schnittpunkte der logarithmischen Kurve mit der Sinuskurve $y = \sin x$.

e) Wenn eine beliebige Schnecke ($r = a\cos\theta + b$) gegeben ist, so findet man leicht

$$r^2 + 2r'^2 - rr'' = 2a^2 + b^2 + 3ab\cos\theta.$$

Damit nun diese Funktion von θ für reelle Werte von θ null werde, ist nötig, daß $2a^2 + b^2$ nicht $3ab$ übertrifft, daß also b in das Intervall $(a, 2a)$ fällt; aber die untere Grenze ist ausgeschlossen, da für $b = a$ sich $\theta = \pi$ ergibt, eine Doppelwurzel von r. Also sind (vgl. § 589, k) die einzigen Schnecken, welche Wendepunkte haben, diejenigen, bei denen b größer als a, aber nicht größer als $2a$ ist.

f) Unter den Konchoiden (§ 589, j) einer Geraden betrachte man diejenige, welche den Pol enthält. Aus ihrer Gleichung $(r - a)\cos\theta = a$ leitet man, um ihre Wendepunkte zu bestimmen, die Gleichung ab $\cos^3\theta + 3\cos^2\theta - 2 = 0$, aus welcher sich für $\cos\theta$ die Werte -1, $-1 + \sqrt{3}$, $-1 - \sqrt{3}$ ergeben. Den ersten braucht man nicht zu beachten, da er r (und gleichzeitig r') zum Verschwinden bringt; der letzte entspricht keinem reellen Wert von θ; es bleibt nur der zweite übrig, der $r = \frac{a}{2}(3 + \sqrt{3})$ gibt: das ist der Radius eines Kreises, mit dem Mittelpunkt im Pol, der die Kurve in den beiden Wendepunkten berührt. Es ist leicht zu zeigen, daß die Wendepunkte aller Konchoiden einer und derselben Geraden in Bezug auf denselben Pol auf die semikubische Parabel $x^3 = 4ay^2$ fallen.

g) Zum Schluß wollen wir uns fragen, ob die Konchoiden einer logarithmischen Spirale (§ 599, i) Wendepunkte haben können, obwohl es a priori den Anschein hat, als könne dies nicht der Fall sein. Aus $r = a(e^{m\theta} \pm 1)$ leitet man ab

$$r^2 + 2r'^2 - rr'' = (1 + m^2)r^2 \mp 2m^2ar + 2m^2a^2$$

und erkennt, daß im Falle $m^2 < 8$ dieses Trinom für reelle Werte von r nicht verschwinden kann. Daraus folgt, daß die gesuchten Spiralen nur diejenigen sind, welche ihre Radienvektoren unter einem hinreichend kleinen Winkel treffen, nämlich einem solchen, dessen Sinus nicht größer ist als $1/3$. Bei jeder von ihnen haben sämtliche Konchoiden zwei Wendepunkte, die Werten von r entsprechen, welche immer zwischen a und $2a$ enthalten sind. Die Bogen der unendlich vielen Konchoiden einer und derselben Spirale, die ihre Endpunkte in den Wendepunkten haben, werden vom Pol aus unter konstantem Winkel gesehen, der für $m = 2\sqrt{2}$ null und für sehr großes m äußerst klein ist.

606. Vielfache Punkte. Bekanntlich (§ 572) macht man zur Bestimmung der Tangente in einem Punkte der Kurve $f(x, y) = 0$ Gebrauch von der Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \tag{18}$$

welche den Wert von y' liefert unter der Voraussetzung, daß

$\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ stetig sind und daß man außerdem hat $\frac{\partial f}{\partial y} \gtrless 0$. Wenn in einem Punkte M aber $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ ist, so kann man nicht mehr behaupten, daß, in der Umgebung von M, y eine Funktion von x ist, d. h. daß jedem Werte von x ein Wert von y und nur einer entspricht; das bleibt aber wegen der vorausgesetzten Stetigkeit wahr in der Umgebung von M, d. h. in Punkten M', die zu M unendlich benachbart sind, existiert die Derivierte y' und hat den aus (18) zu entnehmenden Wert. Wenn M' nach M hinrückt, so strebt $\frac{\partial f}{\partial y}$ dem Verschwinden zu, während sich $\frac{\partial f}{\partial x}$ einem Grenzwert nähert, der im allgemeinen von Null verschieden ist, sodaß also y' unendlich wird. Daraus folgt, daß in M die Tangente parallel zur y-Achse ist, und darin liegt keine Singularität. Wenn dagegen auch $\frac{\partial f}{\partial x}$ nach Null konvergierte, so könnte man ohne weitere Untersuchung nichts über den Grenzwert von y' aussagen. Die Gleichung (18) wird dann bei dem Grenzübergang illusorisch, und um dies zu vermeiden, nimmt man zu einer neuen Differentiation seine Zuflucht:

$$(19) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2y'\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y'^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + y''\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Wir wollen zulassen, daß beim Hinrücken des Punktes M' nach M sich y' einem endlichen Grenzwert nähert, und denselben zu bestimmen suchen. Dabei bemerken wir, daß man, falls y' unendlich werden sollte, nur anstatt dy/dx den (nach Null konvergierenden) Quotienten dx/dy zu betrachten brauchte, um sich zu überzeugen, daß die Resultate, welche wir erhalten werden, gültig bleiben. Wir wollen nunmehr beweisen, daß $y''\frac{\partial f}{\partial y}$ nicht nach einem von Null verschiedenen Grenzwert konvergieren kann. Dazu benutzen wir das Theorem von L'Hospital und schreiben

$$\lim y' = \lim \frac{y'\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \lim\left(y' + \frac{y''\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y}}\right).$$

Da die Funktion

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y'\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

nach Voraussetzung endlich bleibt, so hat man $\lim y''\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Also wird die Gleichung (19) beim Übergang zur Grenze:

$$(20) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2y'\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y'^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

wobei den zweiten Derivierten von f die Werte beizulegen sind, die sie in M annehmen, während y' den Grenzwert von y' bei nach M hinrückendem M' darstellt. Man hat demnach in M für y' zwei Werte, d. h. die Kurve läßt in dem genannten Punkte zwei Tangenten zu, die reell und verschieden oder zusammenfallend oder imaginär sein können, was von dem Vorzeichen von

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} \tag{21}$$

abhängt. Im ersten Falle heißt der Punkt M ein **Doppelpunkt**, im zweiten ein **Rückkehrpunkt** oder eine **Spitze**, und im dritten Falle

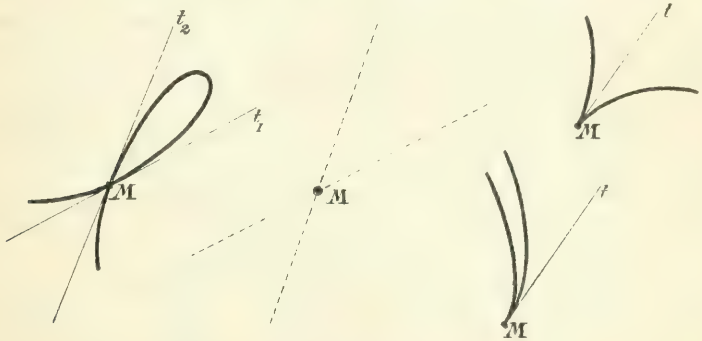

Fig. 62.

ist er ein **isolierter Punkt**, da in der Umgebung von M kein andrer reeller Kurvenpunkt existieren kann. In der Tat, wenn die Determinante (21) positiv ist, so weiß man (§ 379), daß die Funktion f in M ein Minimum oder Maximum hat; und da in diesem Punkte ihr Wert **null** ist, so ist damit gesagt, daß in seiner Umgebung die Funktion immer positiv oder immer negativ ist. Wenn dagegen die Determinante (21) negativ ist, so zerlegt sich der Winkelraum um M in zwei Regionen (vgl. § 570), in deren einer in der Nähe von M man hat $f > 0$, während in der andern $f < 0$ ist; und diese Regionen werden voneinander getrennt durch die Geraden, in deren Richtung f den Wert Null zu bewahren strebt. Es sind dies gerade die beiden Tangenten der Kurve $f = 0$ im Punkte M. In Wirklichkeit ist die vorstehende Diskussion wenig streng. Um sie in exakter Weise durchzuführen, müßte man sich von analogen Betrachtungen leiten lassen[1]), wie sie in § 572 entwickelt worden sind.

607. Wir sehen also, um zusammenzufassen, daß man zur Aufsuchung der letzthin beschriebenen Singularitäten längs einer ge-

1) D'Arcais: „Corso di Calcolo infinitesimale", vol. I, pp. 509—515.

gebenen Kurve $f=0$ die ersten Derivierten von f gleich Null setzen, alle Lösungen $x=a$, $y=b$ des so gebildeten Systems bestimmen muß und nur diejenigen behalten, welche auch der Gleichung der Kurve genügen. Setzt man in den zweiten Derivierten für x und y die Werte a, b ein und bringen sie $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ nicht zum Verschwinden, so hat man einen Doppelpunkt, eine Spitze oder einen isolierten Punkt, je nachdem die Funktion (21) oder $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$ einen negativen, verschwindenden oder positiven Wert annimmt. Wenn ferner $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, aber $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \gtrless 0$ ist, so läßt die Gleichung (20) eine einzige endliche Wurzel zu, und man hat einen Doppelpunkt, wo eine Tangente zur y-Achse parallel ist. Wenn im Punkte (a, b) auch $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, aber $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \gtrless 0$ ist, so kann man sagen, daß die Wurzeln der Gleichung (20) beide unendlich sind, und man hat daher eine Spitze, bei der die Tangente parallel zur y-Achse ist. Endlich kann der Fall eintreten, daß die zweiten Derivierten im Punkte (a, b) alle null sind. Da alsdann die Gleichung (20) illusorisch wird, so muß man zu der folgenden seine Zuflucht nehmen:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3y'\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + 3y'^2\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + y'^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 0.$$

Sie liefert im allgemeinen drei Werte für y', sodaß man einen dreifachen Punkt findet. Fährt man in dieser Weise fort, so gelangt man zum Begriffe eines vielfachen Punktes von m-ter Ordnung oder eines m-fachen Punktes. Ein solcher Punkt ist geometrisch dadurch charakterisiert, daß er m Zweigen der Kurve angehört, die reell oder imaginär sind, und analytisch durch den Umstand, daß in ihm alle partiellen Derivierten von niedrigerer Ordnung als der m-ten null sind, während wenigstens eine unter denen von m-ter Ordnung von Null verschieden ist. Macht man die Gleichung der Kurve homogen, so kann man noch einfacher sagen, daß der m-fache Punkt durch das Verschwinden aller partiellen Derivierten von $(m-1)$-ter Ordnung charakterisiert ist. Wir wollen zum Schluß bemerken, daß die vielfachen Punkte einer Kurve wie die Wendepunkte der Hesseschen Kurve angehören, und man kann überdies beweisen, daß sie auch für die Hessesche Kurve vielfache Punkte sind.

608. Spitzen. Unter den Doppelpunkten haben besondere Wichtigkeit die Spitzen, weil in der Umgebung solcher Punkte wie in der Umgebung der Wendepunkte die Kurve in Bezug auf die Tangente ein exceptionelles Verhalten hat. In der Tat, macht man den zu betrachtenden Punkt zum Anfangspunkt und wählt man als Achsen die Tangente und die Normale der Kurve, so ist klar, daß mit x

und y gleichzeitig f und seine ersten und zweiten Derivierten mit Ausnahme von $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ verschwinden müssen, da die Gleichung (20) als Doppelwurzel $y' = 0$ liefern muß. Da ferner im allgemeinen auch $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$ im Anfangspunkt einen von Null verschiedenen Wert hat, so reduziert sich die Gleichung der Kurve auf die Form $y^2 = kx^3$, wenn man die Infinitesimalen von höherer als dritter Ordnung vernachlässigt. Also verhält sich die Kurve in der Umgebung des Anfangspunktes wie eine semikubische Parabel und hat demnach die Tendenz, sich nur auf einer Seite der Normale in zwei durch die Tangente voneinander getrennten Zweigen zu entwickeln. Dies ist der allgemeine Fall, und man pflegt alsdann zu sagen, die Spitze sei von erster Art, während man den Namen Spitze zweiter Art für den Ausnahmefall vorbehält, wo die Zweige nicht durch die Tangente getrennt werden. Dieser Fall kann nur dann eintreten, wenn in dem betrachteten Punkte auch $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0$ ist. In dem allgemeinen Falle ist $\lim (y/x^2) = \infty$, und man sieht also, daß die Kurve sich von der Tangente *stärker entfernt*. Daraus leitet man ab, daß in Spitzen die Krümmung im allgemeinen unendlich ist. Mit andern Worten, der Krümmungsradius verschwindet; und da beim Verschwinden im allgemeinen ein Zeichenwechsel eintritt, so wird auf eine andere Weise klar, daß nur ausnahmsweise der Fall einer Spitze zweiter Art sich bieten kann.

609. Es erscheint jetzt zweckmäßig für einen Augenblick zu der Aufsuchung der Wendepunkte einer ebenen Kurve zurückzukehren, die in Polarkoordinaten dargestellt ist. In § 604 haben wir diejenigen Werte von θ ausgeschlossen, welche mit $r^2 + 2r'^2 - rr''$ zugleich r zum Verschwinden bringen, weil sie auch r' zu Null machen, folglich auch $r^2 + r'^2$, sodaß man nicht zu sagen vermag, was mit der Krümmung passiert. Es ist sogar im allgemeinen leicht zu konstatieren, daß dieselbe, anstatt nach Null zu konvergieren, über jede Grenze wächst, sodaß man anstatt eines Wendepunktes eine Spitze hat. Um also zu wissen, ob der Pol ein Wendepunkt ist, muß man den vollständigen Ausdruck der Krümmung gleich Null setzen und nicht bloß den Zähler, oder man muß den Verlauf der Kurve in der Umgebung des Pols direkt diskutieren. Wir wollen annehmen, daß r für $\theta = \alpha$ verschwindet, und in der Nähe des Pols einen Punkt auf der Kurve betrachten, dessen Koordinaten in Bezug auf Tangente und Normale im Pol $x = r \cos(\theta - \alpha)$, $y = r \sin(\theta - \alpha)$ sind. Offenbar hat man für nach α konvergierendes θ

$$\varrho = \lim \frac{x^2}{2y} = \lim \frac{r \cos^2(\theta - \alpha)}{2 \sin(\theta - \alpha)} = \frac{1}{2} \lim \frac{r}{\theta - \alpha} = \frac{1}{2} r'$$

auf Grund der Definition der Derivierten r', welche für $\theta = \alpha$ berechnet gedacht wird. Übrigens reduziert sich auch die zweite Formel (8) für $r = 0$ und $r' \gtrless 0$ auf $\varrho = \frac{1}{2} r'$. Wenn also die Funktion r' für $\theta = \alpha$ gleichzeitig mit r verschwindet, so hat man $\varrho = 0$. Um einen Wendepunkt zu haben, würde nötig sein $r' = \infty$.

610. Übungen. a) Bei dem Folium Cartesii, welches durch die Gleichung $x^3 + y^3 = 3axy$ dargestellt wird, ist der Anfangspunkt ein Doppelpunkt, da die Funktionen $\frac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 - ay$, $\frac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial y} = y^2 - ax$ für $x = 0$, $y = 0$ gleichzeitig verschwinden (ebenso für $x = a$, $y = a$, welche Werte aber der Gleichung der Kurve nicht genügen). Ferner hat man $\frac{1}{3}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2x$, $\frac{1}{3}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -a$, $\frac{1}{3}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2y$. Mithin läßt die Gleichung (20), welche hier lautet $0 + y' + 0 \cdot y'^2 = 0$, eine verschwindende und eine unendliche Wurzel zu, sodaß die Kurve im Anfangspunkt beide Achsen berührt. Man braucht übrigens garnicht auf das allgemeine Verfahren zurückzugreifen. Läßt man nämlich zu, daß y' für nach Null konvergierendes x einen endlichen Grenzwert hat, so genügt es, der Gleichung der Kurve die Form $x + y\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 3a\frac{y}{x}$ zu geben, um sich zu überzeugen, daß der genannte Grenzwert notwendig null ist. Also berührt die Kurve im Anfangspunkt die x-Achse und (aus Symmetriegründen) auch die y-Achse. Wünscht man, um die Kurve zu konstruieren, ihren Verlauf in der Umgebung des Anfangspunktes zu kennen, so braucht man nur x nach Null konvergieren zu lassen derart, daß y/x der Null zustrebt, und in der Gleichung die Infinitesimalen von höherer als dritter Ordnung zu vernachlässigen. Man sieht dann, daß der die x-Achse berührende Zweig sich verhält wie die Parabel $x^2 = 3ay$ und infolgedessen der andre wie die Parabel $y^2 = 3ax$. Zu ähnlichen Konsequenzen führt die Untersuchung der Logocyklika und der allgemeineren Kurven, die in § 602 betrachtet worden sind.

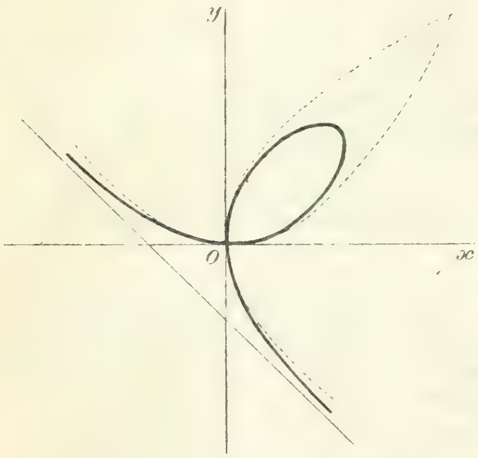

Fig. 63.

b) Die Kurve $x^4 = (x^2 - y^2)y$ hat im Anfangspunkt einen dreifachen Punkt, was man mit Hilfe der in § 607 auseinandergesetzten Methode konstatieren oder noch einfacher und rascher dadurch erkennen kann, daß man die Gleichung der Kurve in der Form $x = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^3$ schreibt. Konvergiert jetzt nämlich x nach Null, so erhält man $y' - y'^3 = 0$, mithin hat y' im Anfangspunkte die Werte 0, 1, -1. Will man die Kurve konstruieren, so ist es nützlich, als unabhängige Veränderliche das Verhältnis $t = y/x$ anzunehmen und die gegebene Gleichung durch das Paar von Gleichungen $x = t - t^3$, $y = t^2 - t^4$ zu ersetzen. In der Figur sind die Grenzen der Intervalle bezeichnet, in welchen t variiert, wenn ein Punkt aus dem Unendlichen herkommend die Kurve durchläuft, um wieder ins Unendliche zurückzukehren, nachdem er dreimal ($t = -1, 0, 1$) den Anfangspunkt passiert hat.

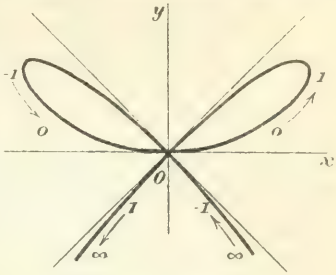

Fig. 64.

c) Bei der Kurve $x^5 + y^5 = 5ax^2y^2$ gelangt man zu einem vierfachen Punkt, der aus der Vereinigung zweier Spitzen im Anfangspunkt entsteht. Allgemeiner stellt die Gleichung $x^{2n+1} + y^{2n+1} = (2n+1)ax^ny^n$ eine Kurve von diesem Typus dar oder aber vom Typus des Folium, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist. Das hängt mit der verschiedenen Lage der einzigen reellen Asymptote $x + y = (-1)^n a$ zusammen.

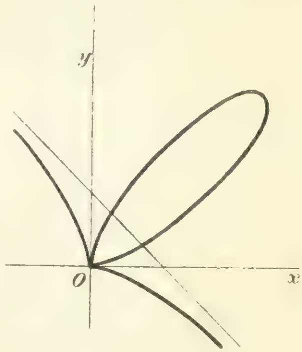

Fig. 65.

d) Beispiele von Spitzen hatten wir bereits bei vielen der früher behandelten Kurven (Kardioide, Kreisevolvente, Astroide, Cykloide u. s. w.), und der Leser kann zu seiner Übung verifizieren, daß die genannten Kurven sich in der Umgebung solcher Punkte verhalten wie eine semikubische Parabel in der Umgebung ihrer Spitze, und er kann konstatieren, daß in ihnen der Krümmungsradius immer null ist. So hat man z. B. bei dem Vertikalprofil (§ 599, c) des abwickelbaren Helikoids, wenn man den Anfangspunkt nach der Spitze verlegt, $\lim(x/\theta^2) = \frac{1}{2}a$, $\lim(y/\theta^3) = \frac{1}{3}b$, sodaß die Gleichung $9a^3y^2 = 8b^2x^3$ für infinitesimales θ richtig zu sein strebt. Dagegen trifft man auf der Kurve $(y - x^2)^2 = x^5$ eine Spitze zweiter Art an. Damit y reell sei, ist offenbar ein positives x nötig. Schreibt man $y = x^2(1 \pm \sqrt{x})$, so sieht man sofort, daß die Kurve aus zwei Zweigen besteht, die die x-Achse im Anfangspunkt berühren. Aber die beiden Zweige verhalten sich in Bezug auf die Tangente wie in einem gewöhnlichen Punkt, da man hat $\lim(y/x^2) = 1$, woraus folgt, daß die Krümmung im Anfangspunkt durch die Zahl 2 gemessen wird. Wir wollen noch hinzufügen, daß der eine der beiden Zweige sich in parabolischer Form ins Unendliche erstreckt, während der andre nach einer Inflexion im Punkte mit

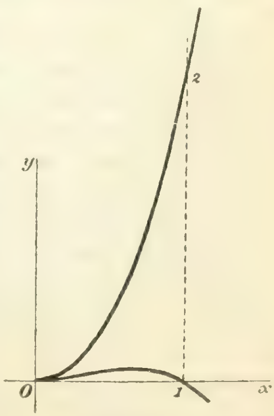

Fig. 66.

der Abscisse $(8/15)^2$ die größte Ordinate für $x = (4/5)^2$ annimmt und dann ebenfalls parabolisch ins Unendliche absteigt, im Punkte $x = 1$ die Abscissenachse schneidend.

e) Ein bemerkenswertes Beispiel einer Kurve mit Wendepunkten und Spitzen haben wir in dem *Zweihorn* (dem cocked hat der Engländer):

$$y = \frac{a^2 - x^2}{2a \pm \sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Um die in § 607 angegebene Methode anzuwenden, müßte man die Gleichung auf ganze rationale Form bringen. Es ist hier aber zweckmäßig sie so zu lassen, wie sie ist, und zu bemerken, daß man zwei Zweige erhält, je nachdem man im Nenner das Zeichen $+$ oder das Zeichen $-$ nimmt. Vielfache Punkte sind offenbar diejenigen Punkte, in welchen die beiden Bestimmungen von y zusammenfallen. Hierzu ist notwendig, daß man hat $x^2 = a^2$, folglich $y = 0$. Um y' in diesen Punkten $(\pm a, 0)$ zu berechnen, kann man unter Vermeidung der Derivation bemerken, daß auf Grund der Definition der Derivierten

$$y' = \lim_{x = \pm a} \frac{y}{x \mp a} = \pm 2a \lim_{x = \pm a} \frac{y}{x^2 - a^2} = \mp 1,$$

d. h. $y' = -1$ für $x = a$ und $y' = 1$ für $x = -a$, ist. Da in jedem Punkt die Tangente eine einzige ist, so hat man zwei Spitzen. Die Tangenten in diesen Punkten laufen in einem Scheitel $(0, a)$ der Kurve zusammen. Auch die Krümmung in diesem Scheitel A läßt sich durch ein analoges Verfahren berechnen:

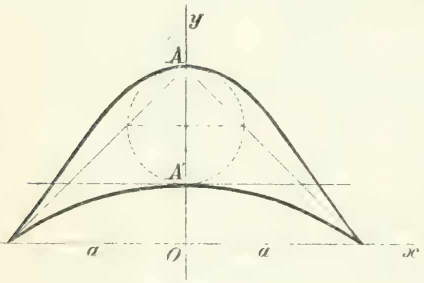

Fig. 67.

$$\frac{1}{2\varrho} = \lim_{x=0} \frac{a - y}{x^2}$$

$$= \frac{1}{a} + \lim_{x=0} \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} = \frac{3}{2a}.$$

Also ist $\varrho = \frac{1}{3} a$, sodaß man, wenn der andre Scheitel $(0, \frac{1}{3} a)$ mit A' bezeichnet wird, sieht, daß die Kurve in A den über AA' als Durchmesser beschriebenen Kreis oskuliert. Was die Wendepunkte betrifft, so findet man, wenn man $y'' = 0$ setzt, $3\sqrt{a^2 - x^2} \pm 2a = 0$, eine Gleichung, die (vorausgesetzt, daß man das Zeichen $-$ nimmt) nur für $x = \pm \frac{1}{3} a \sqrt{5}$ erfüllt ist; mithin wird $y = \frac{1}{3} a$. Die Wendepunkte befinden sich also auf der Tangente im Scheitel A'.

f) Wenn man das in § 607 auseinandergesetzte Verfahren auf die Gesamtgleichung zweier Kurven $(\varphi = 0, \psi = 0)$ anwendet, so findet man außer den vielfachen Punkten der beiden Kurven auch ihre Schnittpunkte. Setzt man in der Tat $f = \varphi\psi$, so ist klar, daß $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ wie f verschwinden, so oft φ und ψ beide gleich Null werden; und da überdies in diesem Falle

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix}^2$$

ist, so sieht man, daß die den beiden Kurven gemeinsamen Punkte als wirkliche Doppelpunkte erscheinen. Wenn insbesondere die rechte Seite verschwindet, wie es der Fall ist (§ 577, a), wenn die beiden Kurven einander berühren, so verschwindet auch die linke Seite, und es bieten sich also die Berührungspunkte der beiden Kurven als Spitzen dar, obwohl die Kurven sich auf beide Seiten der Normale erstrecken.

611. Die bis jetzt untersuchten Singularitäten sind die einzigen, welche auf algebraischen Kurven vorkommen, wenn man dieselben als erzeugt von Punkten betrachtet. Wenn man ferner von Tangentialkoordinaten Gebrauch macht und anstatt der Punkte die Tangenten der Kurve betrachtet, so kann man in vollkommen dualistischer Weise die ganze obige Diskussion wiederholen. Anstatt der Doppelpunkte, der dreifachen Punkte u. s. w. ergeben sich dann die Doppeltangenten, die dreifachen Tangenten u. s. w. Man erhält aber keine andern wesentlich neuen Singularitäten. Allerdings findet man die Rückkehrtangenten und die Wendetangenten; aber die ersteren sind nichts weiter als die Tangenten in den Wendepunkten und die letzteren die Tangenten in den Rückkehrpunkten. Aus diesem Grunde entsprechen die Zahl ν der Spitzen und die Zahl μ der Wendepunkte einander dualistisch, in derselben Weise wie der Zahl ν' der Doppelpunkte die Zahl μ' der Doppeltangenten entspricht und der Ordnung n die Klasse m. Eine andere sehr wichtige Zahl, die sich selbst entspricht, ist das Geschlecht der Kurve und wird gewöhnlich mit p bezeichnet. Man beweist[1]), daß diese Zahl bei einer Kurve ohne vielfache Punkte gleich $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ sein würde. Es ist auch bekannt, daß unter denselben Bedingungen die Klasse m gleich $n(n-1)$ werden würde und die Zahl μ der Wendepunkte (§ 604) gleich $3n(n-2)$. Es läßt sich aber zeigen, daß infolge des Vorhandenseins von ν' Doppelpunkten und ν Spitzen die vorstehenden Zahlen sich bezüglich um $\nu + \nu'$, $3\nu + 2\nu'$, $8\nu + 6\nu'$ erniedrigen. Man findet also wegen der Dualität, wenn man von $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$, $m(m-1)$, $3m(m-2)$ bezüglich $\mu + \mu'$, $3\mu + 2\mu'$, $8\mu + 6\mu'$ subtrahiert, die Zahlen p, n, ν. Die Formeln, zu welchen man auf solche Weise gelangt, heißen die Plückerschen Formeln. Aus ihnen läßt sich leicht ableiten, daß für eine Kurve von der Ordnung n, der Klasse m, dem Geschlecht p die Zahlen der Singularitäten

---

1) Der Leser kann die Theorie der ebenen algebraischen Kurven in t. I des „Cours d'Analyse" von Jordan studieren.

$$\nu = 2(n+p-1) - m, \quad \nu' = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-6) + m - 3p,$$
$$\mu = 2(m+p-1) - n, \quad \mu' = \tfrac{1}{2}(m-1)(m-6) + n - 3p$$

sind, solange es nicht andre kompliziertere Singularitäten gibt. Besonders bemerkenswert sind die Kurven vom Geschlecht Null, die alle die (für sie charakteristische) Eigenschaft haben, unicursal zu sein, womit gemeint ist, daß die Koordinaten x, y ihrer Punkte rational als Funktionen einer dritten Veränderlichen ausdrückbar sind. Zu diesen Kurven gehören z. B. die Kegelschnitte und die ersten drei im vorigen Paragraphen betrachteten Kurven.

612. Andre Singularitäten können nur bei den transcendenten Kurven stattfinden.

a) Zunächst überzeugt man sich leicht, daß auf solchen Kurven unendlich viele singuläre Punkte vorhanden sein können. Das haben wir

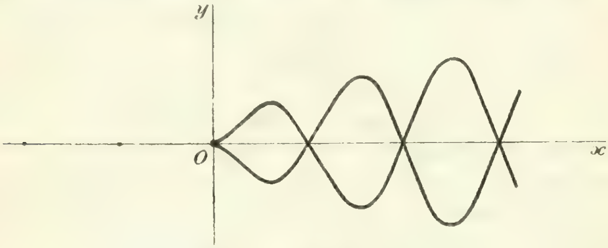

Fig. 68.

bereits konstatiert bei der Quadratrix (unendlich viele Wendepunkte), bei der Cykloide (unendlich viele Spitzen) u. s. w. Jetzt kann man hinzufügen, daß die Kurve $y^2 = x \sin^2 x$, die eine Spitze im Anfangspunkt und zwei Wendepunkte außerhalb der y-Achse hat, außerdem auf dieser Achse unendlich viele isolierte Punkte besitzt und unendlich viele Doppelpunkte, die zugleich Wendepunkte sind.

b) Unendlich viele Inflexionspunkte, und zwar in einem endlichen Intervall, bietet auch die Kurve $y = x \sin \frac{1}{x}$ dar, die eine zur x-Achse parallele Asymptote ($y = 1$) hat. Da hier $x^4 y'' = -y$ ist, so tritt die Inflexion immer auf der x-Achse ein. Außer den unendlich vielen Rückkehrtangenten (die in zwei Punkten der y-Achse zusammenlaufen) läßt die Kurve als singuläre Tangenten die Winkelhalbierenden der Achsen zu, von denen sie in der Tat in unendlich vielen Punkten berührt wird. Diese Kurve ist ferner wegen der folgenden Eigenschaft bemerkenswert: Von jedem Punkte der y-Achse, der dem Intervall $(-1, 1)$ angehört, lassen sich unendlich viele Tangenten an sie ziehen, deren Berührungspunkte auf einer durch den Anfangspunkt hindurchgehenden Geraden liegen. Analoge Eigenschaften findet man bei der Kurve $y = x \sin^2 \frac{1}{x}$, die zur x-Achse asymptotisch ist.

c) Endpunkte sind solche Punkte, in denen ein Kurvenzweig plötzlich aufhört. Das ist z. B. der Fall im Anfangspunkte für einen der Zweige der Kurve $y = e^{-\frac{1}{x}}$, die überdies für $x = 1/2$ einen Wendepunkt

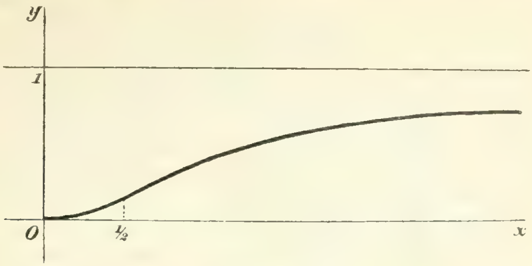

Fig. 69.

hat und zu der Geraden $y = 1$ asymptotisch ist. Die Kurve

$$y = \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) \Big/ \left(e^{\frac{1}{x}} + 1\right)$$

besteht ebenfalls aus zwei Zweigen, welche auf der y-Achse in den Punkten $y = \pm 1$ aufhören, auf der Geraden $y = 2x$ Inflexionen haben und beide zur x-Achse asymptotisch sind. Auch die Kurve $y = x \log x$ bietet ein sehr einfaches Beispiel eines Endpunktes, und zwar im Anfangspunkte, wo sie die y-Achse berührt. Andre Beispiele liefern uns die Kurven

$$y = \frac{x^2}{\log x}, \quad y = x^2 \log \frac{x}{y},$$

deren jede einen Zweig hat, der im Anfangspunkt aufhört. Dies kommt daher, daß es auf der ersten Kurve für $x < 0$ keine reellen Punkte gibt und auf der zweiten für $x < y$. Die erste scheint sich in Bezug auf die Tangente im Anfangspunkt zu verhalten wie in einem Wendepunkt, da (vgl. § 548)

$$\lim \frac{y}{x^2} = 0, \quad \text{für } n > 2 \text{ aber } \lim \frac{y}{x^n} = \infty$$

ist, und die zweite wie in einem Rückkehrpunkt, da

$$\lim \frac{y}{x^2} = \infty, \quad \text{für } n < 2 \text{ aber } \lim \frac{y}{x^n} = 0$$

ist. Beide Kurven besitzen einen andern Zweig, der wie der erste Zweig bei der ersten Kurve zu der Geraden $x = 1$ asymptotisch ist, bei der zweiten zu der Geraden $x - y = 1$. Diese Zweige erstrecken sich dann wieder ins Unendliche, indem sie ihre Konvexität immer der x-Achse zukehren, von der sie eine Minimaldistanz gleich $2e$ haben.

d) Wenn zwei Zweige einer Kurve sich in einem Punkte M treffen und dort aufhören, so ist M ein springender Punkt. In M berührt die Kurve zwei Geraden, wie in einem Doppelpunkt, aber jeder Zweig existiert wie bei einer Spitze nur auf einer Seite der zugehörigen Normale. Einen springenden Punkt haben wir bereits angetroffen (§ 599, e) bei der

Kurve $y = x/\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)$, und ein anderes sehr einfaches Beispiel haben wir (§ 282, b) für $x = 0$ bei der Kurve $y = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

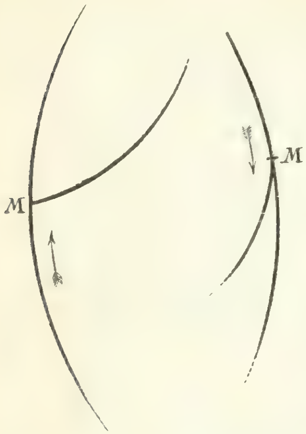

Fig. 70

e) Wenn ferner nur einer der beiden Zweige in dem gemeinsamen Punkte aufhört, so ist derselbe ein Vereinigungspunkt[1]) oder die Kurve bietet daselbst einem Punkte, der sie in bestimmtem Sinne durchläuft, sozusagen einen Scheideweg. Um Beispiele dafür zu haben, genügt es in der Gleichung einer Kurve mit Doppelpunkt, z. B. in $x^3 + y^3 = 3axy$, zu y entweder $e^{-\frac{1}{x}}$ oder $x \log x$ oder $[x]$ zu y hinzuzufügen. Es gelingt auf diese Weise einen der vier Zweige, die von dem Doppelpunkt ausgehen, zu unterdrücken oder anderswohin zu verlegen. Offenbar erlaubt dasselbe Verfahren zwei, drei oder vier Zweige zu unterdrücken und kann also dazu dienen, Kurven zu konstruieren, die mit springenden Punkten, Endpunkten oder isolierten Punkten behaftet sind.

Berührungen.

613. Ordnung der Berührung. Wir betrachten in der Umgebung eines gewöhnlichen Punktes M, der zwei Kurven gemeinsam ist, zwei Punkte P und Q, den einen auf der einen, den andern auf der andern Kurve. Wir wollen uns denken, daß P und Q gleichzeitig nach M hinrücken und, um einen bestimmten Fall vor uns zu haben, annehmen (obwohl das nicht nötig ist), daß die Gerade PQ einer Grenzlage zustrebt, in welcher ihre Winkel α und β mit den beiden Kurven, d. h. mit ihren Tangenten in M, von Null (und von π) verschieden sind. Es ist zunächst leicht zu erkennen, daß die Bogen MP und MQ infinitesimal von derselben Ordnung sind. In der Tat hat der Grenzwert ihres Verhältnisses den Wert

$$\lim \frac{MP}{MQ} = \lim \frac{\sin \widehat{MQP}}{\sin \widehat{MPQ}} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha},$$

der auf Grund unserer Annahmen endlich und von Null verschieden ist. Nimmt man nun MP oder MQ als Hauptinfinitesimale an und nennt ω den Winkel, den die beiden Kurven in M bilden, so hat man

1) Über diese Singularitäten, die vor 25 Jahren von dem belgischen Physiker Plateau angegeben worden sind, siehe einen Artikel von Mansion in der „Mathesis“ (1883, p. 193).

$$\lim \frac{PQ}{MQ} = \lim \frac{\sin \widehat{PMQ}}{\sin \widehat{MPQ}} = \frac{\sin \omega}{\sin \alpha}$$

und ersieht daraus, daß die Entfernung PQ infinitesimal von erster Ordnung oder von einer höheren Ordnung ist, je nachdem $\sin \omega$ von Null verschieden oder gleich Null ist, d. h. je nachdem sich die beiden Kurven in M schneiden oder berühren. Der Umstand also, daß PQ von einer höheren als der ersten Ordnung infinitesimal wird, ist charakteristisch für die Berührung der Kurven. Es ist also natürlich als Index der mehr oder weniger innigen Berührung, die zwischen den betrachteten Kurven stattfinden kann, die Ordnung der Infinitesimalen PQ anzunehmen. Demgemäß werden wir sagen, daß die Berührung von der Ordnung n ist, wenn PQ infinitesimal von der Ordnung $n+1$ ist. Bevor man diese Definition annimmt, muß gezeigt werden, daß die Zahl n für die unendlich vielen möglichen Arten, wie man das nach M hinstrebende Punktepaar P, Q wählen kann, immer dieselbe ist. Es werde angenommen, daß man den Punkt Q, während er nach M hinrückt, nicht mit P, sondern mit einem andern Punkte P' verbindet, der ebenfalls nach M hinrückt derart, daß $P'Q$ einer Grenzlage zustrebt, die von den Kurventangenten in M verschieden ist. Wenn P und P' längs einer der beiden Kurven nach M hinrücken, so hat bekanntlich (§ 348, c) PP' die Tendenz, mit der Tangente dieser Kurve in M zusammenzufallen. Es ist daher

$$\lim \frac{PQ}{P'Q} = \lim \frac{\sin \widehat{PP'Q}}{\sin \widehat{P'PQ}} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha}.$$

Also ist $P'Q$ infinitesimal von derselben Ordnung wie PQ.

614. Es ist leicht, die analytischen Bedingungen der n-fachen Berührung für zwei Kurven zu finden, die in cartesischen Koordinaten durch die Gleichungen $Y = \varphi(X)$, $Y = \psi(X)$ gegeben sind. Wir wollen annehmen, daß die Kurven in M eine gemeinsame Tangente haben, die nicht parallel zur y-Achse ist, und wollen die Kurven in der Umgebung von M durch eine Parallele zu der genannten Achse schneiden, welche dieselben in P und Q treffen möge. Man bemerke hier, daß es, wenn die Tangente parallel zur y-Achse wäre, genügen würde, die Achsen und infolgedessen die Koordinaten miteinander zu vertauschen, um bei der gemachten Annahme bleiben zu können. Wenn nun x die Abscisse von M und $x+h$ diejenige von P und Q ist, so ist klar, daß die Infinitesimale h von derselben Ordnung ist wie MP und MQ, d. h. von erster Ordnung, da das Verhältnis von h zu MP oder zu MQ nach dem Kosinus des Winkels konvergiert, den die Tangente in M mit der x-Achse bildet, und da nach der Voraussetzung dieser Kosinus nicht null ist. Nach der Voraussetzung strebt auch die Gerade PQ nicht dem Zusammenfallen mit der Tangente in M zu. Mithin sind die Bedingungen für die n-fache Berührung alle enthalten in dem Umstand, daß PQ infinitesimal von der Ordnung $n+1$ ist; und da man, wenn

$$\chi(x) = \varphi(x) - \psi(x)$$

gesetzt wird, hat

$$PQ = \chi(x+h) = \chi(x) + h\chi'(x) + \tfrac{1}{2}h^2\chi''(x) + \cdots,$$

so sieht man, daß für jenen Umstand folgende Bedingungen notwendig und hinreichend sind:

$$(22) \qquad \chi(x) = 0, \quad \chi'(x) = 0, \quad \ldots, \quad \chi^{(n)}(x) = 0, \quad \chi^{(n+1)}(x) \gtrless 0.$$

Damit also zwischen den beiden Kurven in M eine Berührung n-ter Ordnung stattfinde, ist notwendig und hinreichend, daß man hat

$$\varphi(x) = \psi(x), \quad \varphi'(x) = \psi'(x), \quad \ldots, \quad \varphi^{(n)}(x) = \psi^{(n)}(x),$$
$$\varphi^{(n+1)}(x) \gtrless \psi^{(n+1)}(x),$$

d. h. daß die n ersten Derivierten der Ordinate in Bezug auf die Abscisse bei den beiden Kurven einander gleich sind, während die $(n+1)$-ten Derivierten verschieden sind. Man bemerke, daß die erste dieser Bedingungen einfach ausdrückt, daß die Kurven sich in M treffen, und die zweite, daß sie sich berühren.

615. Wir wollen beachten, daß, wenn n ungerade ist, die gefundenen Bedingungen gerade die sind, welche zu behaupten gestatten (§ 313), daß die Funktion $\chi(X)$ für $X = x$ ein Minimum oder ein Maximum hat; und da die Funktion für diesen Wert von X null ist, so wird sie in der Umgebung von M ein bestimmtes Vorzeichen bewahren, und die beiden Kurven durchsetzen sich also in M nicht. Wenn dagegen n gerade ist, so wird die betrachtete Funktion für $X = x$ weder ein Minimum noch ein Maximum, und man hat daher $\varphi(X) > \psi(X)$ auf einer Seite von M und $\varphi(X) < \psi(X)$ auf der andern Seite, d. h. die beiden Kurven berühren sich in M, durchsetzen aber einander. Schon die bloße Tatsache also, daß zwei Kurven bei der Berührung einander durchsetzen, läßt auf eine höhere Berührung schließen, die jedenfalls von gerader Ordnung ist. Trotzdem ist dieser Schluß der in unsern obigen Betrachtungen stillschweigend enthaltenen Voraussetzung untergeordnet, daß nämlich die Funktionen φ und ψ successive Derivierte zulassen, die einzig sind. So haben wir z. B. in § 605 eine Kurve angetroffen, welche die Tangente im Anfangspunkt durchsetzt, obwohl die Berührung zwischen beiden eine einfache ist. Ein analoger

Fall bietet sich bei der Kurve $y = x^2/\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)$, welche die Parabel $y = \frac{1}{2}x^2$ im Anfangspunkte berührt und durchsetzt (§ 599, f), obwohl daselbst nur eine einfache Berührung zwischen den beiden Kurven besteht. Es ist ferner zu bemerken, daß die Berührung derselben Kurve mit ihrer eignen Tangente links vom Anfangspunkt einfach ist, während man auf der rechten Seite nicht zu sagen vermag, wie hoch ihre Ordnung ist.

616. Algebraisch betrachtet sagen die Bedingungen (22) noch aus, daß die Gleichung $\chi(X) = 0$ in $X = x$ eine $(n + 1)$-fache Wurzel hat; und da dies die Gleichung ist, welche die Abscissen der Schnittpunkte der beiden Kurven liefert, so kann man sagen, daß $n + 1$ beiden Kurven gemeinsame Punkte in M vereinigt sind. Diese Auffassung wird geometrisch gerechtfertigt durch folgende Betrachtung: Wenn man durch einen Punkt M einer Kurve $Y = f(X)$ eine variable Kurve $Y = \varphi(X)$ legt, deren Gleichung mehr als n willkürliche Parameter enthält, wenn man ferner über diese Parameter derart verfügt, daß die Kurve durch n andere Punkte M', M'', ... der ersten Kurve hindurchgeht, und dann endlich diese n Punkte gleichzeitig nach M hinrücken läßt derart, daß die variable Kurve einer Grenzlage zustrebt, so hat sie in dieser mit der gegebenen Kurve eine Berührung, die im allgemeinen von n-ter Ordnung ist. Nehmen wir in der Tat an, $n + 1$ Parameter der variablen Kurve seien derart bestimmt, daß die Bedingungen

$$\varphi(x) = f(x), \quad \varphi(x_1) = f(x_1), \quad \ldots, \quad \varphi(x_n) = f(x_n)$$

erfüllt sind, in welchen $x, x_1, x_2, \ldots$ die Abscissen von $M, M', M'', \ldots$ sind. Bekanntlich (§ 347) kann man schreiben

$$\begin{aligned}\varphi(X) = f(x) + (X - x) f(x, x_1) + (X - x)(X - x_1) f(x, x_1, x_2) + \cdots \\ + (X - x)(X - x_1) \ldots (X - x_{n-1}) f(x, x_1, \ldots, x_n) \\ + (X - x)(X - x_1) \ldots (X - x_n) \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},\end{aligned}$$

wobei ξ eine Zahl bedeutet, die zwischen der kleinsten und der größten der Abscissen $X, x, x_1, \ldots, x_n$ enthalten ist. Es ist uns auch bekannt, daß man, wenn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gleichzeitig nach x konvergieren,

$$\lim f(x, x_1, x_2, \ldots, x_\nu) = \frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!}$$

hat. Also ist, wenn man mit ξ eine zwischen X und x enthaltene Zahl bezeichnet,

$$\begin{aligned}\varphi(X) = f(x) + (X - x)\frac{f'(x)}{1} + (X - x)^2 \frac{f''(x)}{1 \cdot 2} + \cdots \\ + (X - x)^n \frac{f^{(n)}(x)}{n!} + (X - x)^{n+1} \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

Andrerseits ist, wenn ξ_0 eine andre zwischen X und x enthaltene Zahl bedeutet,

$$f(X) = f(x) + (X - x)\frac{f'(x)}{1} + (X - x)^2\frac{f''(x)}{1 \cdot 2} + \cdots$$
$$+ (X - x)^n \frac{f^{(n)}(x)}{n!} + (X - x)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(\xi_0)}{(n+1)!}.$$

Folglich ist

$$\lim_{X=x} \frac{f(X) - \varphi(X)}{(X - x)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(x) - \varphi^{(n+1)}(x)}{(n+1)!},$$

d. h. die Differenz $f(X) - \varphi(X)$ ist infinitesimal von einer höheren Ordnung als n, und die beiden Kurven haben daher in M eine Berührung, deren Ordnung nicht kleiner als n ist. Die Berührung kann von höherer als n-ter Ordnung werden, wenn andre Schnittpunkte der beiden Kurven außer den von uns betrachteten mit M zusammenrücken. Natürlich wird hier immer n als ganzzahlig vorausgesetzt, während bei der Definition der Ordnung der Berührung nicht ausgeschlossen wird, daß sie möglicher Weise gebrochen ist; dies ist z. B. der Fall bei der Berührung zwischen einer Kurve und einer Wendetangente, wo die Ordnung im allgemeinen (§ 608) gleich 1/2 ist.

617. Oskulation. Nehmen wir an, man wolle zu einer gegebenen Kurve $f(X, Y) = 0$ in einem Punkte (x, y) eine Kurve ziehen, die mit ihr eine n-fache Berührung hat und einer durch die Gleichung $\varphi(X, Y) = 0$, welche mehr als n Parameter enthält, definierten Kurvenfamilie angehört. Es wird dazu nötig sein, die beiden Gleichungen n-mal nacheinander zu derivieren, als wollte man die n ersten Derivierten von Y nach X berechnen, und dann auszudrücken, daß in den beiden so erhaltenen Reihen von Gleichungen die genannten Derivierten für $X = x$ und $Y = y$ dieselben Werte haben. Man bekommt auf diese Weise $n + 1$ Gleichungen, wobei wir diejenige mitrechnen, welche aus der Gleichung der unbekannten Kurve entsteht, wenn man darin $X = x$ und $Y = y$ setzt. Sie dienen dazu $n + 1$ Parameter zu bestimmen, und es wird sich im allgemeinen nur dann, wenn die Zahl der Parameter größer als n ist, eine n-fache Berührung erreichen lassen. Verfügt man über alle Parameter in der Weise, daß man die Maximalberührung, d. h. die von höchster Ordnung, erreicht, so sagt man, die beiden Kurven seien oskulatorisch. Es ist nicht ausgeschlossen, daß man wegen einer Besonderheit, die der ersten Kurve anhaftet, die zu erwartende Maximalordnung überschreiten kann. In diesem Falle sagt man, die Kurven seien superoskulatorisch. Um zu wissen, in welchen Punkten Superoskulation eintritt, braucht man nur einmal mehr zu derivieren und aus allen erhaltenen Gleichungen die Parameter zu eliminieren.

618. Beispiele. a) An eine Kurve soll in einem Punkte (x, y) eine berührende Gerade gezogen werden. Wenn man beachtet, daß die Gleichung der Geraden $Y = mX + h$ zwei willkürliche Parameter enthält, so ist vorauszusehen, daß man im allgemeinen nur eine einfache Berührung erhalten kann. Mit Hilfe des im vorigen Paragraphen angegebenen Verfahrens findet man die Bedingungen $y = mx + h$, $y' = m$, wobei man zu bedenken hat, daß x, y, y' sich auf die gegebene Kurve beziehen. Es ergeben sich daraus für die Parameter die Werte $m = y'$, $h = y - xy'$ und man findet (vgl. § 586), daß die Gleichung der berührenden Geraden $Y = Xy' + y - xy'$ oder $Y - y = y'(X - x)$ ist. Für eine höhere Berührung ist nötig $y'' = 0$, und es hängt von der gegebenen Kurve ab, ob eine solche Berührung eintritt. Man sieht, daß nur in den Wendepunkten eine Kurve mit ihrer Tangente eine Berührung von höherer als erster Ordnung hat. Dieselbe ist im allgemeinen von zweiter Ordnung und die Tangente durchsetzt die Kurve; damit dies aber stattfinde, ist außer $y'' = 0$ noch notwendig und auch hinreichend, daß die erste der successiven Derivierten y''', y^{IV}, ..., die nicht verschwindet, von ungerader Ordnung ist. In geometrischer Sprache kann man sagen, daß in einem Wendepunkt M wenigstens drei gemeinsame Punkte der Kurve und ihrer Tangente vereinigt sind, und daß in jedem Falle die Zahl der in M angehäuften Punkte ungerade oder gerade ist, je nachdem die Gerade von der Kurve durchsetzt wird oder nicht.

b) Ein Kreis mit dem Mittelpunkt (ξ, η) und vom Radius ϱ wird durch die Gleichung $(X - \xi)^2 + (Y - \eta)^2 = \varrho^2$ dargestellt. Deriviert man und setzt $X = x$, $Y = y$ u. s. w, so erhält man

$$(23) \qquad (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \varrho^2, \quad x - \xi + (y - \eta)y' = 0, \quad 1 + y'^2 + (y - \eta)y'' = 0,$$

woraus man successiv entnimmt,

$$y - \eta = -\frac{1 + y'^2}{y''}, \quad x - \xi = y'\frac{1 + y'^2}{y''}, \quad \varrho = \pm\frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Man findet auf diese Weise den Kreis wieder, den wir schon früher als den oskulierenden bezeichnet haben und sieht, daß seine Berührung mit der Kurve im allgemeinen von zweiter Ordnung ist, woraus folgt (vgl. § 592), daß der oskulierende Kreis die Kurve in dem Punkte, in welchem er sie berührt, durchsetzt. Man kann unter Bezugnahme auf das, was wir in § 616 gesehen haben, auch sagen, daß der oskulierende Kreis durch drei unendlich benachbarte Punkte der Kurve hindurchgeht, und es ist gut sich zu erinnern, daß sich uns der oskulierende Kreis gerade in dieser Weise zum ersten Male dargeboten hat (§ 348, e).

c) Wünscht man ferner, daß ein Kreis mit einer gegebenen Kurve eine Berührung von höherer als zweiter Ordnung hat, so muß auch noch die Gleichung erfüllt sein, die man durch Derivation der letzten der Gleichungen (23) erhält, d. h.

$$3y'y'' + (y - \eta)y''' = 0 \quad \text{oder} \quad 3y'y''^2 = (1 + y'^2)y'''.$$

Ob dies eintritt, hängt von der Natur der Kurve in dem besondern Punkte.

den man betrachtet, ab. Man bemerke, daß die Derivierte von ϱ nach x gerade

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}{y''^2}\left(3y'y''^2-(1+y'^2)y'''\right)$$

ist. Denkt man sich also (vgl. § 592) den Punkt M die Kurve durchlaufend, so erreicht der oskulierende Kreis, wenn er ein Minimum oder Maximum wird, eine Berührung von höherer als zweiter Ordnung mit der Kurve. Dadurch wird nicht ausgeschlossen, daß die Superoskulation auch stattfinden kann, wenn der Kreis kein Minimum oder Maximum wird.

Enveloppen.

619. Definition. Es sei eine Kurvenschar durch die Gleichung $f(x, y, a) = 0$ gegeben, wo jeder Wert des Parameters a eine Kurve charakterisiert. Wir wollen annehmen, daß f auch in Bezug auf a stetig ist und stetige erste Derivierte zuläßt. Es sei M ein Schnittpunkt der Kurven (a) und $(a+h)$, d. h. der den Werten a und $a+h$ des Parameters entsprechenden Kurven. Wenn man h unter Festhaltung von a nach Null konvergieren läßt, so geht die Kurve $(a+h)$ allmählich in (a) über, und es kann vorkommen, daß der Punkt M auf (a) sich bewegend eine Grenzlage A einzunehmen strebt. Wenn sich die Kurven nicht schneiden, so kann es trotzdem auf der Kurve (a) Punkte A geben von der Beschaffenheit, daß der Abschnitt, welchen die andere Kurve auf der Normale in M, von M aus gerechnet, bestimmt, in A von einer höheren Ordnung infinitesimal wird. Solche Punkte stärkster unendlicher Annäherung können ebenfalls als beiden Kurven angehörend betrachtet werden, wenn man von höheren Infinitesimalen absieht. Der Ort der Punkte A heißt die Enveloppe der Kurven $f(x, y, a) = 0$.

620. Gleichung der Enveloppe. Nimmt man an, daß A kein vielfacher Punkt der Kurve (a) ist, so wird dieselbe, wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der ersten Derivierten von f, auch in der Umgebung von A frei von vielfachen Punkten sein. Wenn man folglich auf derselben Kurve einen Punkt M wählt, der genügend nahe an A liegt, so hat man in M eine vollkommen bestimmte Normale, deren Richtungskosinus α und β unendlich wenig von den analogen Kosinus der Normale in A verschieden sind:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\Delta f}}\frac{\partial f}{\partial x} + \cdots, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{\Delta f}}\frac{\partial f}{\partial y} + \cdots.$$

Es seien ξ und η die Koordinaten von M, die für infinitesimales h nach den Koordinaten x und y von A konvergieren. Ferner sei l die Länge der Strecke MM', welche die Kurve $(a+h)$ auf der Normale in M abgrenzt. Diese Länge wird man als null voraussetzen müssen, wenn M ein Schnittpunkt der beiden Kurven ist. In allen Fällen sind $\xi + l\alpha$, $\eta + l\beta$ die Koordinaten von M'. Sie müssen der Gleichung der Kurve $(a + h)$ genügen:

$$f(\xi + l\alpha,\ \eta + l\beta,\ a + h) = 0.$$

Daraus folgt, wenn man sich erinnert, daß $f(\xi, \eta, a) = 0$ ist, und Infinitesimalen von höherer Ordnung vernachlässigt,

$$l\left(\alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y}\right) + h \frac{\partial f}{\partial a} = 0,$$

woraus sich ergibt

$$l = -\frac{h}{\sqrt{\Delta f}} \frac{\partial f}{\partial a}.$$

Damit l null sei oder nur infinitesimal von höherer Ordnung als h, ist notwendig und hinreichend, daß man hat $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$, da die vielfachen Punkte ausgeschlossen werden. Also **ergibt sich die Gleichung der Enveloppe durch Elimination von a aus den Gleichungen**

(24) $$f(x, y, a) = 0, \quad f_a'(x, y, a) = 0.$$

621. Charakteristische Eigenschaft. Man kann auch sagen, daß die Gleichung der Enveloppe die Gleichung der Kurvenschar selbst ist, d. h. die erste der Gleichungen (24), wenn man sich darin a als eine Funktion von x und von y denkt, die durch die zweite Gleichung (24) definiert ist. Unter diesen Bedingungen gibt die totale Differentiation der ersten Gleichung

(25) $$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial a} \frac{da}{dx} = 0,$$

und diese letztere reduziert sich auf Grund der zweiten im allgemeinen auf $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0$, d. h. auf genau dieselbe Gleichung, die den Wert von y' für die Kurve (a) liefert. Also **berührt die Enveloppe alle Kurven der Schar.** Dies ist eine charakteristische Eigenschaft der Enveloppe. Was nämlich auch die Kurve sein mag, die man als alle Kurven der Schar berührend voraussetzen will, so kann man sich immer denken, daß ihre Gleichung die erste der Gleichungen (24) ist, wo a eine unbekannte, passend zu bestimmende Funktion bedeutet. Diese Bestimmung muß in der Weise ausgeführt werden, daß (25) für y' denselben Wert liefert, den man für jede Kurve (a) hat, was auch a sein mag. Es ist also notwendig $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$, und die Gleichung der gesuchten Kurve ist demnach gerade die, welche sich durch Elimination von a aus den Gleichungen (24) ergibt.

622. Die Gleichung $f(x, y, a) = 0$ ordnet die Punkte der Ebene längs Kurven an, welche für gewöhnlich auf einer und derselben Seite der Enveloppe liegen, sodaß diese die Grenze der von den Kurven erfüllten Region bezeichnet. Wir wollen nunmehr zwei Gleichungen

$$f(x, y, a, b) = 0, \quad g(x, y, a, b) = 0 \tag{26}$$

betrachten. Diese beiden Gleichungen stellen im allgemeinen ein Entsprechen zwischen den Wertepaaren der unabhängigen Parameter a, b und den Punkten (x, y) der Ebene her. Fragt man nach der Begrenzung der von diesen Punkten eingenommenen Region, so wird man dazu geführt, die Enveloppe der Kurvenschar zu suchen, die z. B. durch die erste Gleichung (26) dargestellt wird, wenn man sich darin a als den einzigen willkürlichen Parameter denkt und b als Funktion von x, y und a, die durch die zweite Gleichung (26) definiert wird. Man hat also $\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b}\frac{db}{da} = 0$, wo $\frac{db}{da}$ durch

$$\frac{\partial g}{\partial a} + \frac{\partial g}{\partial b}\frac{db}{da} = 0$$

gegeben ist. Daraus folgt

$$\frac{\partial (f, g)}{\partial (a, b)} = 0. \tag{27}$$

Es genügt, a, b aus dieser und den Gleichungen (26) zu eliminieren, um die Gleichung der gesuchten Kurve zu erhalten. Eine der Gleichungen (26) brauchte auch x, y nicht zu enthalten, und dann kommt man wieder zu dem Falle eines einzigen Parameters, da man in der andern Gleichung den einen Parameter als Funktion des andern betrachten muß. Das Resultat (27) bleibt aber bestehen. Wenn allgemeiner m Gleichungen

$$f(x, y, a, b, c, \ldots) = 0, \quad g(x, y, a, b, c, \ldots) = 0, \quad \ldots$$

mit n Parametern gegeben sind, zwischen welchen $n - m$ Relationen

$$\varphi(a, b, c, \ldots) = 0, \quad \psi(a, b, c, \ldots) = 0, \quad \ldots$$

bestehen, so findet man durch totale Differentiation aller Gleichungen in Bezug auf die Parameter und durch Elimination von $da, db, dc, \ldots$, daß die Funktionaldeterminante von $f, g, \ldots, \varphi, \psi, \ldots$ in Bezug auf $a, b, c, \ldots$ null sein muß. Fügt man die so erhaltene Gleichung zu den n vorigen, so gelangt man durch Elimination von $a, b, c, \ldots$ zu der Gleichung der Enveloppe.

623. Evolute und Evolventen. Man nennt *Evolute* einer Kurve die Enveloppe ihrer Normalen. Jede Kurve heißt ferner eine *Evolvente* ihrer eignen Evolute. Nach dem, was wir in § 593 gesehen haben, kann man sofort behaupten, daß *die Evolute einer ebenen Kurve der Ort ihrer Krümmungszentra ist.* Jetzt kann man dieses Theorem auch beweisen, indem man auf die Gleichung der Normale $X - x + (Y - y)y' = 0$ das am Schluß von § 620 angedeutete Verfahren anwendet. Man erhält in der Tat

$$-(1 + y'^2) + (Y - y)y'' = 0,$$

und die Koordinaten des Berührungspunktes der Normale mit ihrer Enveloppe sind daher

$$X = x - y'\frac{1 + y'^2}{y''}, \quad Y = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

Andererseits haben wir in § 618 gesehen, daß man, wenn ξ und η die Koordinaten des Krümmungszentrums sind,

$$x - \xi = y'\frac{1 + y'^2}{y''}, \quad y - \eta = -\frac{1 + y'^2}{y''}$$

hat. Also ist $X = \xi$, $Y = \eta$.

624. Schreibt man die Koordinaten des Krümmungszentrums in der Form

$$\xi = x - \varrho \sin\varphi, \quad \eta = y + \varrho \cos\varphi,$$

so läßt sich daraus ableiten

$$d\xi = dx - \varrho \cos\varphi\, d\varphi - \sin\varphi \cdot d\varrho, \quad d\eta = dy - \varrho \sin\varphi\, d\varphi + \cos\varphi \cdot d\varrho.$$

Erinnert man sich also, daß $dx = \cos\varphi \cdot ds$, $dy = \sin\varphi \cdot ds$ ist, und setzt ds für $\varrho\, d\varphi$, so findet man $d\xi = -\sin\varphi \cdot d\varrho$, $d\eta = \cos\varphi \cdot d\varrho$. Diese Formeln zeigen, daß das Element CC' der Evolute sich ansehen läßt, als läge es auf der Normale der Evolvente und hätte die Länge $d\sigma = d\varrho$. Daraus folgt wiederum, daß die Tangenten der Evolute Normalen der Evolvente sind. Überdies zeigt die Gleichung $d(\sigma - \varrho) = 0$, daß $\sigma - \varrho$ konstant ist. Wenn man daher

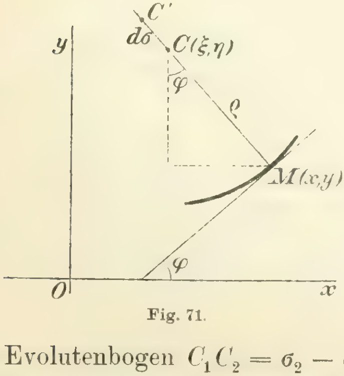

Fig. 71.

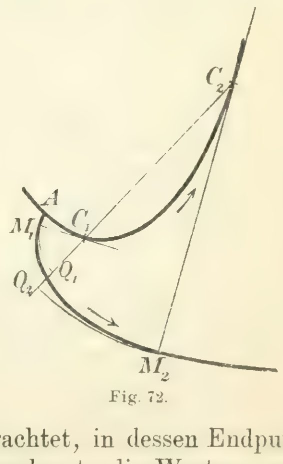

Fig. 72.

einen Evolutenbogen $C_1C_2 = \sigma_2 - \sigma_1$ betrachtet, in dessen Endpunkten die Krümmungsradien der betrachteten Evolvente die Werte ϱ_1 und ϱ_2 haben, so ist $\sigma_1 - \varrho_1 = \sigma_2 - \varrho_2$, d. h. $\sigma_2 - \sigma_1 = \varrho_2 - \varrho_1$. Mit andern Worten

$$(28) \qquad \text{Bogen } C_1C_2 = M_2C_2 - M_1C_1.$$

Wir wollen einige bemerkenswerte Konsequenzen dieser Eigenschaft hervorheben:

a) Wenn der Bogen M_1M_2 hinreichend klein ist, damit seine Krümmung von einem Endpunkt nach dem andern hin immer in demselben Sinne variiert, so können sich die oskulierenden Kreise in M_1 und M_2 nicht treffen, da sie (§ 592) gerade durch den Bogen M_1M_2 voneinander getrennt werden. Es ist übrigens leicht ihren Abstand zu berechnen, der gleich dem Abstand derjenigen Punkte Q_1, Q_2 dieser Kreise ist, die auf der Zentralen in der Nähe des Bogens M_1M_2 liegen. Man hat

$$Q_1Q_2 = Q_2C_2 - (Q_1C_1 + C_1C_2) = M_2C_2 - M_1C_1 - C_1C_2$$

oder $Q_1Q_2 =$ Bogen C_1C_2 — Sehne $C_1C_2 > 0$. Es ist also evident, daß zwei oskulierende Kreise, die genügend benachbart sind, einander nicht treffen. Wir können aber auch behaupten (§ 585), daß zwei oskulierende Kreise, die unendlich benachbart sind, keinen gemeinsamen Punkt haben; und ihr Abstand ist in Bezug auf den Abstand der Mittelpunkte infinitesimal von dritter Ordnung.

b) Es ergibt sich aus (28) noch folgendes: Wenn man sich einen Faden auf eine ebene Kurve aufgewickelt denkt, und wenn man diesen unter Festhaltung des einen Endes und fortwährender Spannung in der Ebene der Kurve abwickelt, so beschreibt jeder von seinen Punkten eine Evolvente der gegebenen Kurve. Eine Kurve hat also unendlich viele Evolventen, die ein System von parallelen und äquidistanten Kurven bilden. Man kann die Evolventen einer Kurve auch als Rollkurven betrachten, die von den Punkten einer Geraden erzeugt werden, welche auf jener Kurve rollt ohne zu gleiten.

625. Zur vollständigen Kenntnis der Evolute einer gegebenen Kurve bleibt uns noch übrig ihre Krümmung zu bestimmen. Zu dem Ende bemerke man, daß bei den beiden Kurven der Kontingenzwinkel denselben Wert hat. Daraus folgt sofort, daß der Krümmungsradius der Evolute gleich $\varrho\frac{d\varrho}{ds}$ ist. Im allgemeinen bietet daher in den Punkten kleinster oder größter Krümmung der Evolvente die Evolute ebensoviele Spitzen. Dagegen fallen die Spitzen der Evolvente (wenigstens die erster Art) auf die Evolute, da wegen des Verschwindens von ϱ der Punkt M der Evolvente und der Punkt C der Evolute in einen Punkt A zusammenfallen. Wenn überdies a der Krümmungsradius der Evolute in A ist, so folgert man aus der Gleichung $\lim \varrho\frac{d\varrho}{ds} = a$, indem man den Anfangspunkt der Evolventenbogen nach A verlegt und das Theorem von L'Hospital zu Hilfe nimmt,

$$\lim \frac{\varrho^2}{s} = 2a.$$

Also verhält sich die Evolvente in der Umgebung von A so, als lautete ihre natürliche Gleichung $\varrho^2 = 2as$, oder so (vgl. § 595, o), wie sich die Evolvente eines Kreises vom Radius a in der Umgebung ihrer Spitze verhält.

626. Übungen. a) Die Gleichung $y = (x - a)^3$ stellt eine Schar von kongruenten kubischen Parabeln dar, die von der x-Achse umhüllt werden. Diese Gerade berührt alle Parabeln in ihren Wendepunkten, und sie teilt daher nicht die Ebene in zwei Regionen, von denen nur die eine die eingehüllten Kurven enthält und die andere nicht, wie es gewöhnlich der Fall ist (vgl. § 622). Ebenso besteht die Enveloppe der Parabeln $y = a^2(x - a)^2$ aus der x-Achse und der Kurve $16y = x^4$; aber diese berührt jede Kurve in einem Punkte $(x = 2a)$ und durchsetzt sie in zwei andern $(x = -2a \pm 2a\sqrt{2})$, sodaß die von den Parabeln erfüllte Region nur durch die x-Achse begrenzt wird.

b) Man suche die Enveloppe einer Geraden, die derart in der Ebene beweglich ist, daß zwei von ihren Punkten auf den Schenkeln eines rechten Winkels bleiben. Wenn l der Abstand dieser beiden Punkte ist, so lautet die Gleichung der Geraden $\frac{x}{\cos\theta} + \frac{y}{\sin\theta} = l$, und θ kann man als den Parameter betrachten, der durch jeden seiner Werte eine Lage der Geraden charakterisiert. Deriviert man die vorstehende Gleichung nach ihm, so erhält man

$$\frac{x}{\cos^3\theta} = \frac{y}{\sin^3\theta} \quad \text{oder} \quad \frac{x\cos\theta}{\cos^2\theta} = \frac{y\sin\theta}{\sin^2\theta} = l$$

und infolgedessen $x = l\cos^3\theta$, $y = l\sin^3\theta$, mithin $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$. Also umhüllt (§ 595, g) die Gerade eine Astroide.

c) Die Astroide ist auch die Enveloppe der Ellipsen, die von allen andern Punkten der Geraden beschrieben werden. Teilt man in der Tat

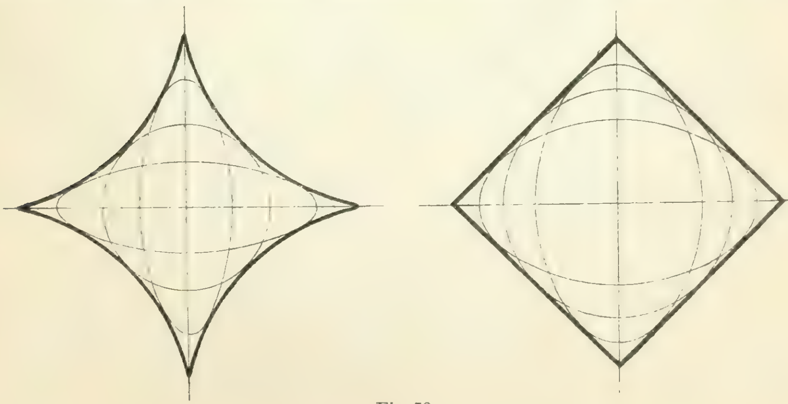

Fig. 73.

die Strecke l in $a+b$, so lautet die Gleichung der von dem Teilpunkte beschriebenen Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Differentiiert man sie nach den Parametern a und b und beachtet, daß $da+db=0$ ist, so findet man $x^2/a^3=y^2/b^3$ oder $\frac{x^2/a^2}{a}=\frac{y^2/b^2}{b}=\frac{1}{l}$, mithin successiv

$$x^2=a^3/l,\quad y^2=b^3/l,\quad x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=l^{\frac{2}{3}}.$$

Wenn hingegen die Längen der Achsen durch die Relation $a^2+b^2=l^2$ verbunden sind, so findet man in analoger Weise, daß die Enveloppe aus den vier Geraden $\pm x\pm y=l$ besteht, d. h. die unendlich vielen Ellipsen, welche die Achsen und den Mongeschen Kreis gemein haben, sind einem und demselben Quadrat einbeschrieben.

d) Unter den Evolventen der Kettenlinie ist besonders diejenige bemerkenswert, welche im Scheitel der Kurve ihren Anfang nimmt und *Traktrix* heißt. Die Eigenschaften der Kettenlinie (§ 595, 1) führen unmittelbar zur Aufdeckung folgender Eigenschaften der Traktrix: Der von der Asymptote auf den Tangenten bestimmte Abschnitt, von den bezüglichen Berührungspunkten aus gerechnet, ist konstant; und das Krümmungszentrum liegt auf der Senkrechten, die im Fußpunkt der Tangente auf der Asymptote errichtet ist.

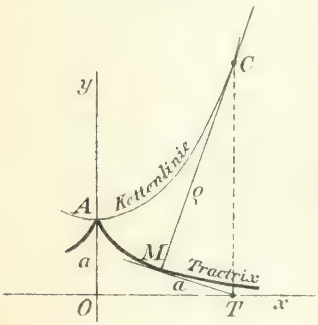

Fig. 74.

e) Es ist, auch auf geometrischem Wege, leicht zu konstatieren, daß die Cykloide mit ihrer Evolute kongruent, daß die Evolute der Kardioide eine dreimal so kleine Kardioide, daß die Evolute der Astroide eine zweimal so große Astroide ist, u. s. w. Allgemeiner läßt sich zeigen, daß, die Kreisevolvente ausgenommen, jede Epicykloide oder Hypocykloide ihrer Evolute ähnlich ist: das Ähnlichkeitsverhältnis ist $1+2m$ (wenn m das Verhältnis des beweglichen Kreises zu dem festen bedeutet) und hat folglich die Werte 1, 3, $\frac{1}{2}$ u. s. w. für die Cykloide $(m=0)$, für die Kardioide $(m=1)$, für die Astroide $(m=-\frac{1}{4})$ u. s. w.

f) Es sei die Enveloppe einer Schar von Kreisen zu bestimmen, wenn man den Ort der Mittelpunkte kennt und das Gesetz, nach welchem der Radius längs dieses Ortes variiert. Sind ξ, η, ϱ die Koordinaten des Mittelpunktes und der Radius eines Kreises, gegeben als Funktionen des Bogens σ der Mittelpunktskurve, so wird man dazu geführt die Gleichung $(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=\varrho^2$ nach σ zu derivieren, indem man x und y als Konstanten behandelt. Man erhält

$$(x-\xi)\frac{d\xi}{d\sigma}+(y-\eta)\frac{d\eta}{d\sigma}+\varrho\frac{d\varrho}{d\sigma}=0$$

und sieht, daß der Kreis seine Enveloppe auf der Geraden berührt, die parallel zur Normale in der Entfernung $-\varrho\frac{d\varrho}{d\sigma}$ gezogen ist. Damit die Enveloppe reell sei, ist es notwendig und hinreichend, daß der absolute

Betrag von $d\varrho$ den von $d\sigma$ nicht übertrifft. Mit andern Worten, die Enveloppe ist nur dann reell, wenn die Geschwindigkeit, mit der sich der Mittelpunkt verschiebt, nicht übertroffen wird von derjenigen, mit welcher der Kreis sich erweitert oder zusammenzieht. Für $|d\varrho| < |d\sigma|$ besteht die Enveloppe aus zwei Zweigen, die in einen zusammenfallen für $d\varrho = \pm\, d\sigma$. In diesem Falle ist die Tangente der Mittelpunktskurve Normale der Enveloppe, und die Kurve (ξ, η) ist daher nichts anderes als die Evolute der Kurve (x, y). Mit andern Worten, die Bedingung $d\varrho = \pm\, d\sigma$, die wir bereits als notwendig gefunden haben (§ 624), ist auch hinreichend dafür, daß eine Schar von Kreisen die der oskulierenden Kreise einer Kurve ist.

627. Fußpunktkurven und Gegenfußpunktkurven. Wir haben bereits gesagt (§ 590, c), daß man als Fußpunktkurve einer Kurve (M) in Bezug auf einen Pol Q den Ort der Projektionen von Q auf die Tangenten von (M) bezeichnet. Wenn (M_1) die Fußpunktkurve von (M) ist, so sagt man, (M) sei die Gegenfußpunktkurve von (M_1) in Bezug auf Q. Es liegt auf der Hand, daß man die Gegenfußpunktkurve einer Kurve in Bezug auf einen Punkt Q betrachten kann als die Enveloppe der Senkrechten, die auf den von Q ausgehenden Geraden in ihren Schnittpunkten mit der gegebenen Kurve errichtet sind. Diese Bemerkung zeigt den Weg an, den man einschlagen muß, um die Gleichung der Gegenfußpunktkurve einer Kurve zu finden. Es sei

$$x\cos\theta + y\sin\theta = r$$

die Gleichung von MM_1. Deriviert man sie nach θ, so erhält man die Gleichung

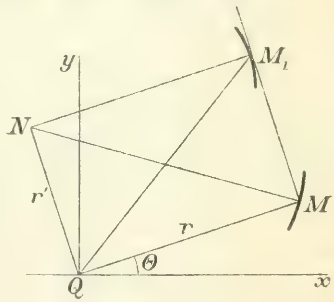

Fig. 75.

$$-x\sin\theta + y\cos\theta = r',$$

welche (§ 588) das vom Endpunkt N der Polarnormale aus auf MM_1 gefällte Lot darstellt. Also ist der Punkt M_1 der Gegenfußpunktkurve von (M) die Projektion von N auf MM_1. Aus den beiden Gleichungen leitet man ab

$$x = r\cos\theta - r'\sin\theta, \qquad y = r\sin\theta + r'\cos\theta.$$

Eliminiert man θ unter Berücksichtigung der Polargleichung von (M), so erhält man die cartesische Gleichung von (M_1). Ist umgekehrt die Kurve (M_1) gegeben, so kennt man wegen der Definition den Punkt M auf der Fußpunktkurve von (M_1), der dem Punkte M_1 entspricht, und die obigen Betrachtungen erlauben es, auf anderem Wege die Konstruktion der Tangente von (M) in M wiederzufinden: dieselbe ist in der Tat senkrecht zur Normale MN, die man konstruiert, indem man M mit dem Mittelpunkt von QM_1 verbindet. Will man ferner den Krümmungsradius von (M_1) im Punkte M_1 kennen, so beachte man, daß

$$\frac{dx}{d\theta} = -(r + r'')\sin\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = (r + r'')\cos\theta$$

ist. Da $d\theta$ für (M_1) der Kontingenzwinkel ist, so ist der Krümmungsradius $\varrho_1 = r + r''$, d. h. es genügt M_1N um $NC_1 = r''$ zu verlängern, um das Krümmungszentrum von (M_1) zu erhalten. Diesem Resultat pflegt man eine andere Form zu geben, indem man die Länge $r_1 = QM_1$ und den Krümmungsradius von (M) einführt. Dieser ist nach der zweiten Formel (8) gegeben durch

$$\varrho = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''} = \frac{r_1^{\,3}}{2r_1^{\,2} - r\varrho_1}.$$

Man hat also die Relation

(29) $$\frac{r\varrho_1}{r_1^{\,3}} = \frac{2}{r_1} - \frac{1}{\varrho},$$

welche es erlaubt (vgl. § 595, j) C_1 zu konstruieren, wenn die Lage von C bekannt ist.

628. Kausticae. Denken wir uns, daß von einem Punkte Q Lichtstrahlen ausgehen, die dann an einem Spiegel (M) reflektiert werden. Die successiven Schnittpunkte der unendlich benachbarten Strahlen bilden eine leuchtende Linie, welche die Physiker die Kaustica durch Reflexion nennen. Die Kaustica der Kurve (M) in Bezug auf den Pol Q ist also die Enveloppe der Strahlen, die von dem leuchtenden Punkte F ausgehend an der Kurve (M) reflektiert werden nach dem bekannten Gesetz von der Gleichheit des Einfalls- und des Ausfallswinkels. Der in M reflektierte Strahl geht durch den Punkt L_1 hindurch, der in Bezug auf die Tangente in M symmetrisch zu Q ist. Wenn man die Kurve (L) betrachtet, den Ort der zu Q in Bezug auf die Punkte M symmetrischen Punkte, so ist es gewissermaßen evident, daß die Kurve (L_1) die Fußpunktkurve von (L) in Bezug auf Q darstellt, und es geht also die Normale von (L_1) in L_1 durch den Mittelpunkt von QL, d. h. durch M, hindurch. Folglich sind die reflektierten Strahlen alle normal zu der Kurve (L_1), und ihre Enveloppe ist daher die Evolute von (L_1). Also ist die Kaustica einer Kurve die Evolute der Fußpunktkurve einer ähnlichen Kurve in Bezug auf den leuchtenden Punkt. Daraus

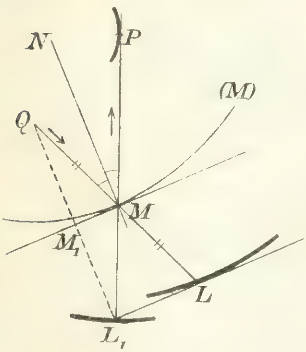

Fig 76

folgt, daß man die Punkte der Kaustica konstruiert (vgl. § 595, j) wie die Krümmungszentra der Fußpunktkurve von (L) in Bezug auf Q; und es ist leicht zu erkennen, daß man die Konstruktion ausführen kann, indem man (L) durch (M) selbst ersetzt. In dem Falle ferner, wo die Lichtstrahlen aus dem Unendlichen kommen, reduziert sich die Konstruktion auf eine äußerst einfache Form, da man findet, daß die Normalen der Kaustica, die durch ein Büschel paralleler Strahlen hervorgebracht wird, die Krümmungsradien des Spiegels in den bezüglichen Incidenzpunkten halbieren. Endlich sieht man in dem allgemeinen Falle eines im Endlichen gelegenen Punktes Q, wenn man das in § 624 bewiesene Theorem über die Länge der Evolute in Anspruch nimmt, sofort, daß jeder Bogen einer Kaustica, dessen eines Ende passend gewählt ist, ebenso lang wie der ganze Weg ist, der vom Lichte bis zur Erreichung des andern Endes durchlaufen wird. Daraus ergibt sich insbesondere folgendes: Wünscht man, daß die von Q ausgehenden Strahlen nach ihrer Rückkehr in einem Punkte P zusammenlaufen, so ist es notwendig sie an einer Ellipse zu reflektieren, die ihre Brennpunkte in P und Q hat.

629. Übungen. a) Wir wollen auf den vorletzten Paragraphen Bezug nehmen und bemerken, daß sich, wenn die Kurve (M) eine Schnecke ist, aus ihrer Gleichung $r = a\cos\theta + b$ ergibt $r + r'' = b$. Diese Gleichung genügt, um behaupten zu können, daß die Gegenfußpunktkurve ein Kreis vom Radius b ist. Ebenso hat man, wenn die Kurve (M) eine archimedische Spirale ist, $r' = a$, $r'' = 0$, und es bleibt daher der Punkt N, das Krümmungszentrum von (M_1) auf Grund der zweiten Gleichung, nach der ersten auf einem Kreise. Also ist die archimedische Spirale die Fußpunktkurve einer Kreisevolvente. Durch diese Eigenschaft, die sozusagen evident ist, wird man (vgl. § 595, j) zu einer leichten Konstruktion des Krümmungszentrums der archimedischen Spirale in einem gegebenen Punkte M geführt: Wenn die Projektion des Poles O auf die Normale sich in L auf die durch N zur Normale gezogene Parallele projiziert, so gehört das Krümmungszentrum OL an.

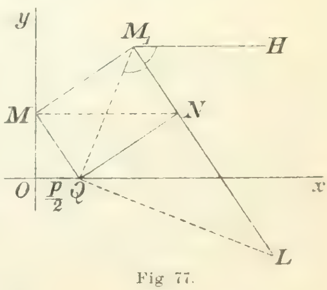

Fig 77.

b) Welches ist die Gegenfußpunktkurve einer Geraden in Bezug auf einen Punkt Q? Macht man die Gerade zur y-Achse und das von Q auf sie gefällte Lot zur x-Achse, so hat MM_1 die Gleichung $my = m^2x + \frac{1}{2}p$, wenn man mit m den (variablen) Neigungskoeffizienten bezeichnet und mit $\frac{1}{2}p$ die (konstante) Länge der Strecke OQ. Durch Derivation nach m erhält man $y = 2mx$. Durch Elimination von m findet man ferner $y^2 = 2px$. Also ist die Gegenfußpunktkurve einer Geraden in Bezug auf einen Punkt die Parabel, welche diesen Punkt zum Brennpunkt hat und von der Geraden im Scheitel berührt wird. Übrigens ergibt sich dies auch unmittelbar aus der in § 627 angegebenen Tangentenkonstruktion. Diese Konstruktion zeigt in der Tat, daß $\widehat{QM_1N} = \widehat{NM_1H}$ ist, daß also die Normale die Halbierende des Winkels QM_1H ist; und aus anderwärts (§ 590, d) Gesehenem geht hervor, daß diese Eigenschaft gerade die Parabel charakterisiert. Man bemerke noch, daß die Formel (29) im vorliegenden Falle $r\varrho_1 = 2r_1^2$ wird, und da man in dem rechtwinkligen Dreieck LQM_1 hat $r_1^2 = r \cdot LM_1$, so ist ersichtlich, daß L den Krümmungsradius halbiert. Man gelangt auf diese Weise zu einer bekannten Konstruktion (§ 595, k).

c) Wenn die von einem leuchtenden Punkte Q ausgehenden Strahlen an einem kreisförmigen Spiegel reflektiert werden, so ist die zugehörige Kurve (L) ein zweiter Kreis, mithin (§ 590, c) die Kurve (L_1) eine Schnecke. Gehört insbesondere der Punkt Q dem gegebenen Kreise an, so gehört er auch dem Kreise (L) an, und die Schnecke ist eine Kardioide, deren Evolute eine dreimal so kleine und umgekehrt liegende zweite Kardioide ist. Also ist die Kaustica eines kreisförmigen Spiegels für ein Strahlenbüschel, welches aus einem Punkte des Spiegels entspringt, eine Kardioide, die den Kreis in dem leuchtenden Punkte Q berührt, während die Spitze den von Q ausgehenden Durchmesser im Verhältnis 2 : 1 teilt. Kommen dagegen die Strahlen aus dem Unendlichen, so haben wir gesehen, daß die Normale der Kaustica in einem Punkte P, der einem gegebenen Incidenzpunkte entspricht, durch den Mittelpunkt N des Radius OM hindurchgeht. Sind daher der durch N hindurchgehende Kreis mit dem Mittelpunkt O und der Kreis vom Durchmesser MN konstruiert, so sieht man, daß die Kurve (P) sich betrachten läßt als erzeugt von dem Punkte P des zweiten Kreises bei reinem Rollen dieses Kreises auf dem ersten. Also ist die Kaustica eines kreisförmigen Spiegels für ein Büschel paralleler Strahlen eine Epicykloide mit zwei Spitzen.

Anwendungen auf die gewundenen Kurven.

Fundamentalformeln.

630. Tangente und Normalebene. Die Tangente einer beliebigen, ebenen oder gewundenen, Kurve in einem Punkte M ist immer die Gerade, welcher die Sekante MM' zustrebt, wenn man unter Festhaltung von M den Punkt M' längs der Kurve nach M hinrücken läßt. Wir wollen uns hier darauf beschränken, die Kurven zu studieren, bei welchen man, wie bei den im vorigen Kapitel betrachteten ebenen Kurven,

$$\lim \frac{\text{Bogen } MM'}{\text{Sehne } MM'} = 1$$

hat. Da nun die Richtungskosinus der Sekante MM' gleich den

Excessen δx, δy, δz der Koordinaten von M' über diejenigen von M sind, dividiert durch die Länge der Strecke MM', so findet man durch Grenzübergang, nachdem man den Bogen δs an Stelle der Sehne MM' gesetzt hat, daß die Richtungskosinus der Tangente der Kurve im Punkte (x, y, z)

$$(1) \qquad a = \frac{dx}{ds}, \quad b = \frac{dy}{ds}, \quad c = \frac{dz}{ds}$$

sind. Quadriert und addiert man diese Formeln, so gelangt man zu der folgenden

$$(2) \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Sind also die Koordinaten x, y, z als Funktionen eines beliebigen Parameters t gegeben, so berechnet man zunächst ds mit Hilfe von (2), und dann lehren die Formeln (1) die Richtungskosinus der Tangente kennen. Die Gleichungen der Tangente sind also

$$\frac{X-x}{dx} = \frac{Y-y}{dy} = \frac{Z-z}{dz},$$

und man kann sie unmittelbar hinschreiben, indem man sie als die Gleichungen der Verbindungsgeraden des Punktes (x, y, z) und des Punktes $(x + dx, y + dy, z + dz)$ betrachtet. Es ist gut noch eine andere Form dieser Gleichungen zu kennen, die in dem Falle nützlich ist, wo die Kurve durch das Gleichungspaar

$$\varphi(x, y, z) = 0, \qquad \psi(x, y, z) = 0$$

dargestellt wird. Da $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ zu den Differentialen dx, dy, dz proportional sein müssen, die durch die Relationen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = 0$$

verbunden sind, so muß man haben

$$(X-x)\frac{\partial \varphi}{\partial x} + (Y-y)\frac{\partial \varphi}{\partial y} + (Z-z)\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

$$(X-x)\frac{\partial \psi}{\partial x} + (Y-y)\frac{\partial \psi}{\partial y} + (Z-z)\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0.$$

Dies sind also die Gleichungen der Tangente. Man nennt ferner Normalebene den Ort der Normalen der Kurve in M, d. h. der in M auf der Tangente errichteten Senkrechten. Die Gleichung einer solchen Ebene ist

$$(X-x)\,dx + (Y-y)\,dy + (Z-z)\,dz = 0$$

oder, wenn die Kurve mittels der Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$ gegeben ist,

$$\begin{vmatrix} X - x & \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ Y - y & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ Z - z & \frac{\partial \varphi}{\partial z} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

631. Binormale und oskulierende Ebene; Hauptnormale und rektifizierende Ebene. Wenn M' längs der Kurve nach M hinrückt, so kann die durch die Tangente in M parallel zur Tangente in M' gelegte Ebene einer Grenzlage zustreben und erhält in dieser den Namen oskulierende Ebene. Eine der unendlich vielen Normalen liegt in der oskulierenden Ebene, eine andere ist senkrecht zu dieser Ebene: die erste heißt die Hauptnormale, die andere nennt man Binormale, da sie senkrecht zu zwei unendlich benachbarten Tangenten ist, d. h. als Grenzlage der durch M senkrecht zu den Tangenten in M und in M' gezogenen Geraden betrachtet werden

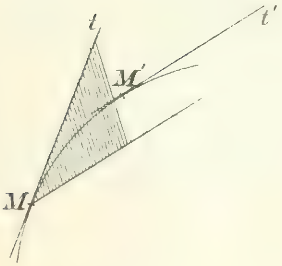

Fig. 78.

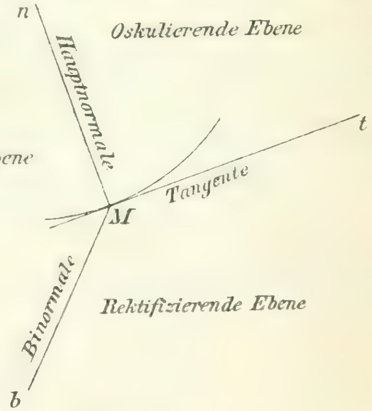

Fig. 79.

kann. Die durch die Tangente und die Binormale bestimmte Ebene heißt die rektifizierende Ebene. Die drei Geraden (Tangente, Binormale, Hauptnormale) und die drei Ebenen (Normal-, oskulierende, rektifizierende Ebene), welche wir eben definiert haben, sind die Kanten und Flächen eines Trieders mit drei rechten Winkeln, welches man das Fundamentaltrieder nennt. Im folgenden werden wir sehen, daß, um die relative Lage der Fundamentaltrieder in M und in M' zu kennen, die Kenntnis zweier Infinitesimalen ε und η genügt, die durch die doppelte Eigenschaft charakterisiert sind, Differentiale zu sein und, abgesehen von höheren Infinitesimalen, den Winkel der Tangenten in M und M' und den Winkel der Binormalen in diesen Punkten darzustellen. Der erste heißt Kontingenzwinkel, der zweite Torsionswinkel.

632. Es ist hier eine kurze Digression nötig. Für eine Gerade, deren Richtungskosinus A, B, C stetige Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen t sind, kann man immer ein Differential finden, durch welches der Winkel zwischen den Richtungen (A, B, C) und $(A + \delta A, B + \delta B, C + \delta C)$, d. h. zwischen den Richtungen der Geraden, die den Werten t und $t + dt$ der unabhängigen Veränderlichen entsprechen, ersetzbar (§ 556) ist. Ziehen wir in der Tat bei der Kugel vom Radius 1, die ihr Zentrum im Anfangspunkt hat, die Radien OP und OP' in den angegebenen Richtungen. Beim Variieren von t beschreibt der Punkt P auf der Kugel eine Kurve, und es ist klar, daß man den Winkel der beiden Richtungen, der durch den Bogen PP' eines größten Kreises gemessen wird, zunächst durch die Sehne PP' ersetzen kann, dann durch den Bogen PP' der vom Punkte P beschriebenen Kurve und endlich durch das Differential des Bogens σ dieser Kurve, gerechnet von einem beliebigen Anfangspunkt. Daraus folgt auf Grund von (2), wenn man bemerkt, daß die Koordinaten von P gerade A, B, C sind,

$$d\sigma^2 = dA^2 + dB^2 + dC^2. \tag{3}$$

Zu einer andern bemerkenswerten Form von $d\sigma$ gelangt man durch die Bemerkung, daß wegen $\Sigma A^2 = 1$ und $\Sigma A\,dA = 0$

$$\left\| \begin{matrix} A & B & C \\ dA & dB & dC \end{matrix} \right\|^2 = \begin{vmatrix} \Sigma A^2 & \Sigma A\,dA \\ \Sigma A\,dA & \Sigma dA^2 \end{vmatrix} = d\sigma^2$$

ist, mithin

$$d\sigma^2 = (B\,dC - C\,dB)^2 + (C\,dA - A\,dC)^2 + (A\,dB - B\,dA)^2. \tag{4}$$

633. Um nun die Richtung der Hauptnormale kennen zu lernen, bemerken wir folgendes: Ist die Richtung (A, B, C) die der Tangente der Kurve (M) im Punkte M, so ist die Ebene OPP' parallel zu den Tangenten in M und M' und hat daher die Tendenz, zur oskulierenden Ebene parallel zu werden, wenn M' nach M hinrückt (und infolgedessen P' nach P, falls a, b, c stetige Funktionen von t sind). Die Gerade PP', welche die Kurve (P) in P zu berühren strebt, wird dabei senkrecht zu OP und hat daher die Tendenz, sowohl zur oskulierenden Ebene als auch zur Normalebene, mithin zur Hauptnormale parallel zu werden. Also sind auf Grund von (1) die **Richtungskosinus der Hauptnormale**

$$\lambda = \frac{da}{\varepsilon}, \quad \mu = \frac{db}{\varepsilon}, \quad \nu = \frac{dc}{\varepsilon}. \tag{5}$$

634. Dies vorausgeschickt ist die Richtung (α, β, γ) der Binormale, abgesehen vom Sinn, durch die Orthogonalitätsbedingungen $\Sigma \alpha a = 0$, $\Sigma \alpha \lambda = 0$ bestimmt; und diese zeigen zusammen mit der andern $\Sigma a \lambda = 0$, daß die Determinante der neun fundamentalen Kosinus

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = 1$$

orthogonal ist, woraus folgt (§ 69), daß ihr Wert 1 oder -1 ist. Man kann aber den positiven Sinn der Richtung der Binormale immer derart fixieren, daß die Gleichung (6) richtig ist. Geometrisch kommt dies auf folgende Voraussetzung hinaus: Wenn man das Fundamentaltrieder zum Zusammenfallen mit dem Achsentrieder bringt derart, daß die positiven Richtungen der Tangente und der Hauptnormale mit denen der Achsen x und z zusammenfallen, so muß die positive Richtung der Binormale mit der der y-Achse zusammenfallen. Es ist auch bekannt (§ 70), daß unter diesen Bedingungen jedes Element der Determinante (6) gleich dem zugehörigen algebraischen Komplement ist. Daraus folgt unter Beachtung von (5), daß die Richtungskosinus der Binormale durch die Formeln

$$(7)\qquad \frac{\alpha}{bdc - cdb} = \frac{\beta}{cda - adc} = \frac{\gamma}{adb - bda} = -\frac{1}{\varepsilon}$$

gegeben sind. Nunmehr sind wir imstande auch die Gleichung der oskulierenden Ebene aufzuschreiben: $\Sigma(bdc - cdb)(X - x) = 0$. Wir können ihr auf Grund von (1) die Form geben

$$\begin{vmatrix} X - x & dx & d^2x \\ Y - y & dy & d^2y \\ Z - z & dz & d^2z \end{vmatrix} = 0$$

und sehen auf diese Weise, daß die oskulierende Ebene im Punkte (x, y, z) sich betrachten läßt als bestimmt durch die Tangente und durch den Punkt

$$(x + dx + \tfrac{1}{2}d^2x,\quad y + dy + \tfrac{1}{2}d^2y,\quad z + dz + \tfrac{1}{2}d^2z).$$

635. Die Formeln (7) und (5) erlauben es, die Richtungen der Binormale und der Hauptnormale zu bestimmen, wenn die Kosinus a, b, c bekannt sind, da sich der Kontingenzwinkel nach (3) und (4) mit Hilfe der einen oder der andern der folgenden Formeln berechnen läßt:

$$\varepsilon^2 = da^2 + db^2 + dc^2,\quad \varepsilon^2 = (bdc - cdb)^2 + (cda - adc)^2 + (adb - bda)^2.$$

Das Zeichen, mit welchem ε genommen wird, bleibt willkürlich, da die Umkehrung dieses Zeichens in den Formeln (7) und (5) die gleichzeitige Umkehrung der Zeichen von α, β, γ und λ, μ, ν bewirken würde, sodaß die Formel (6) ungeändert bleibt. Wenn statt a, b, c die Kosinus α, β, γ bekannt wären, so könnte man den Torsionswinkel vermittelst einer der Formeln

$\eta^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2$, $\eta^2 = (\beta d\gamma - \gamma d\beta)^2 + (\gamma d\alpha - \alpha d\gamma)^2 + (\alpha d\beta - \beta d\alpha)^2$ berechnen; darauf würde es mit Hilfe von Formeln, die zu (7) und (5) analog sind, gelingen, die Richtungen der beiden andern Kanten des Fundamentaltrieders zu bestimmen. In der Tat liefert die Differentiation der Gleichungen $\Sigma a\alpha = 0$, $\Sigma\alpha^2 = 1$, wenn man sich an (5) erinnert,

$$\Sigma a d\alpha = -\Sigma\alpha da = -\varepsilon\Sigma\alpha\lambda = 0, \quad \Sigma\alpha d\alpha = 0;$$

mithin ist $d\alpha/\lambda = d\beta/\mu = d\gamma/\nu = \pm\eta$ oder, wenn man η mit einem passenden Zeichen nimmt,

$$\lambda = \frac{d\alpha}{\eta}, \quad \mu = \frac{d\beta}{\eta}, \quad \nu = \frac{d\gamma}{\eta}, \tag{8}$$

ferner $\beta d\gamma - \gamma d\beta = (\beta\nu - \gamma\mu)\eta = a\eta$ u. s. w., d. h.

$$\frac{a}{\beta d\gamma - \gamma d\beta} = \frac{b}{\gamma d\alpha - \alpha d\gamma} = \frac{c}{\alpha d\beta - \beta d\alpha} = \frac{1}{\eta}. \tag{9}$$

Auch hier bemerke man, daß die Umkehrung des Zeichens von η oder von α, β, γ in den Formeln (8) und (9) die Bedingung (6) ungeändert lassen würde.

636. Formeln von Frenet. Aus den Relationen $\Sigma a\lambda = 0$, $\Sigma\alpha\lambda = 0$, $\Sigma\lambda^2 = 1$ leitet man durch Differentiation und unter Beachtung von (5) und (8) ab

$$\Sigma a d\lambda = -\Sigma\lambda da = -\varepsilon\Sigma\lambda^2 = -\varepsilon,$$
$$\Sigma\alpha d\lambda = -\Sigma\lambda d\alpha = -\eta\Sigma\lambda^2 = -\eta$$

und $\Sigma\lambda d\lambda = 0$. Also genügen $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ dem Gleichungssystem

$$\left\{\begin{array}{l} a d\lambda + b d\mu + c d\nu = -\varepsilon \\ \alpha d\lambda + \beta d\mu + \gamma d\nu = -\eta \\ \lambda d\lambda + \mu d\mu + \nu d\nu = 0, \end{array}\right.$$

welches die Determinante (6), d. h. eine Determinante gleich der Einheit hat, wo jedes Element gleich seinem algebraischen Komplement ist. Daraus folgt sofort

$$d\lambda = -a\varepsilon - \alpha\eta, \quad d\mu = -b\varepsilon - \beta\eta, \quad d\nu = -c\varepsilon - \gamma\eta. \tag{10}$$

Dies sind die Formeln von Frenet. Sie sagen uns zusammen mit den Formeln (5) und (8), daß die Differentiale der neun fundamentalen Kosinus linear ausdrückbar durch dieselben Kosinus sind; die Koeffizienten dieser Ausdrücke hängen einzig und allein von ε und von η ab. Nennt man ferner ω das Differential, durch welches der Winkel zwischen zwei unendlich benachbarten Hauptnormalen ersetzbar ist, so liefern die Formeln (10), wenn man sie quadriert und summiert, $\omega^2 = \varepsilon^2 + \eta^2$. Dieses letzte Ergebnis, welches sich durch einfache geometrische Betrachtungen beweisen läßt, ist bekannt unter dem Namen „Theorem von Lancret".

637. Es ist nützlich zu bemerken, daß für jedes orthogonale Tripel von Richtungen analoge Formeln wie die obigen bestehen. Wir wollen zunächst zwei beliebige veränderliche Richtungen betrachten und übereinkommen, als Drehung einer Richtung gegen die andre das Differential ω zu bezeichnen, durch welches die infinitesimale Richtungsänderung der Projektion der ersten auf eine zu beiden parallele Ebene ersetzbar ist. Wir stellen uns die Aufgabe, ω zu berechnen, indem wir die Kosinus A, B, C und A', B', C', welche die beiden Richtungen definieren, als bekannt voraussetzen. Durch den Anfangspunkt ziehen wir in positivem Sinne Parallelen zu den Richtungen (A, B, C), (A', B', C'), $(A + \delta A, B + \delta B, C + \delta C)$ und zu der Projektion dieser letzteren auf die durch die beiden ersten Geraden bestimmte Ebene. P, P', P'' seien die Punkte, in welchen die erste, die dritte und die vierte Gerade die Kugel vom Radius 1 mit dem Zentrum im Anfangspunkt treffen. Da A, B, C die Koordinaten von P und $A + \delta A$, $B + \delta B$, $C + \delta C$ diejenigen von P' sind, so messen offenbar die Differenzen $\delta A, \delta B, \delta C$ die Projektionen von PP' auf die Achsen. Andererseits kann man das Element PP'', welches sich von ω um eine höhere Infinitesimale unterscheidet, betrachten als die Projektion von PP' auf die Richtung (l, m, n) jenes Elements, welche offenbar senkrecht zu (A, B, C) ist. Also ist, wenn man nur die differentiellen Infinitesimalen beibehält,

$$\omega = l dA + m dB + n dC;$$

und da, wenn man φ den Winkel der beiden Richtungen nennt, offenbar

$$A' = A \cos\varphi + l \sin\varphi, \quad B' = B \cos\varphi + m \sin\varphi, \quad C' = C \cos\varphi + n \sin\varphi$$

ist, so sieht man sofort, indem man mit dA, dB, dC multipliziert und summiert, daß

$$\omega \sin\varphi = A' dA + B' dB + C' dC$$

ist. Es ist dies eine Formel, die sich bei den geometrischen und mechanischen Anwendungen oft als nützlich erweist. Wenn nunmehr die Richtungen (A', B', C') und (A'', B'', C'') mit (A, B, C) ein orthogonales Tripel bilden und (A, B, C) sich um ω' gegen die erste und um ω'' gegen die zweite dreht, so hat man

$$\Sigma A dA = 0, \quad \Sigma A' dA = \omega', \quad \Sigma A'' dA = \omega''$$

und entnimmt daraus

$$dA = A'\omega' + A''\omega'', \quad dB = B'\omega' + B''\omega'', \quad dC = C'\omega' + C''\omega''.$$

Wenn ferner ω das Differential bedeutet, durch welches die absolute Richtungsänderung von (A, B, C) im Raume ersetzbar ist, so sieht man, daß man nach (3) hat $\omega^2 = \omega'^2 + \omega''^2$. Insbesondere sagen uns die Formeln (5) und (8), daß die Richtungsänderungen der Tangente und der Binormale aus den Drehungen ε und η gegen die Hauptnormale bestehen, und die Formeln (10) drücken dagegen aus, daß die Richtungsänderung ω der Hauptnormale aus den beiden Drehungen $-\varepsilon$, $-\eta$ hervorgeht, welche dieselbe gegen die beiden ersten Geraden ausführt.

Krümmungen.

638. Wie bei den ebenen Kurven, so dient auch bei den gewundenen Kurven das Verhältnis ε/ds zur Messung einer ersten Krümmung oder der *Flexion* der betrachteten Kurve; und analog benutzt man η/ds zur Messung einer zweiten Krümmung oder der *Torsion*, welche sich uns bei den ebenen Kurven nicht dargeboten hat, da sie bei ihnen beständig null ist. Während ferner das Verhältnis $\varrho = ds/\varepsilon$ auch hier den Namen Krümmungsradius (oder Flexionsradius) behält, kommt man überein als Torsionsradius die Länge $\tau = ds/\eta$ zu bezeichnen. Die Einführung der bestimmten Längen ϱ und τ anstatt der Infinitesimalen ε und η in allen früheren Formeln dient dazu, diese auf eine präzise Form zu bringen. So werden die Formeln (5), (8) und (10)

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{da}{ds} &= \frac{\lambda}{\varrho}, & \frac{d\alpha}{ds} &= \frac{\lambda}{\tau}, & \frac{d\lambda}{ds} &= -\frac{a}{\varrho} - \frac{\alpha}{\tau}, \\ \frac{db}{ds} &= \frac{\mu}{\varrho}, & \frac{d\beta}{ds} &= \frac{\mu}{\tau}, & \frac{d\mu}{ds} &= -\frac{b}{\varrho} - \frac{\beta}{\tau}, \\ \frac{dc}{ds} &= \frac{\nu}{\varrho}, & \frac{d\gamma}{ds} &= \frac{\nu}{\tau}, & \frac{d\nu}{ds} &= -\frac{c}{\varrho} - \frac{\gamma}{\tau}. \end{aligned}\right.$$

Dem linksstehenden Tripel kann man unter Erinnerung an (1) die Form geben

$$(12)\qquad \lambda = \varrho \frac{d}{ds}\frac{dx}{ds}, \quad \mu = \varrho \frac{d}{ds}\frac{dy}{ds}, \quad \nu = \varrho \frac{d}{ds}\frac{dz}{ds}$$

oder, wenn man will,

$$(13)\quad \lambda = \varrho\left(\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds}\frac{d^2s}{ds^2}\right), \quad \mu = \varrho\left(\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2s}{ds^2}\right), \quad \nu = \varrho\left(\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\frac{d^2s}{ds^2}\right).$$

Ebenso können auf Grund von (1) die Formeln (7) in folgender Weise geschrieben werden:

$$(14)\qquad \alpha = \varrho\left(\frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right), \quad \beta = \varrho\left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\right),$$
$$\gamma = \varrho\left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right).$$

639. Berechnung der Flexion. Die Formeln (1), (12), (14) liefern die Werte der neun fundamentalen Kosinus als Funktionen der ersten und zweiten Derivierten der Koordinaten, vorausgesetzt, daß man zuvor den Wert von ϱ kennt. Dieser Wert ergibt sich aber aus denselben Formeln, da aus (12) durch Quadrieren und Summieren folgt

$$\frac{1}{\varrho^2} = \left(\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d}{ds}\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d}{ds}\frac{dz}{ds}\right)^2 \tag{15}$$

oder, wenn man will, aus (13)

$$\frac{1}{\varrho^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2s}{ds^2}\right)^2.$$

Es ist also bei den gewundenen Kurven, wie bei den ebenen Kurven (§ 558, e), das Quadrat der Krümmung gleich der Summe der Quadrate der zweiten Derivierten der Koordinaten nach dem Bogen. Erhebt man ferner die Formeln (14) zum Quadrat und summiert sie, so erhält man eine andere Formel:

$$\varrho = \frac{\pm (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}}. \tag{16}$$

Sie schließt (für konstantes z) diejenige ein, welche man bei den ebenen Kurven am meisten benutzt (§ 588, d). Aus der Formel (15) leitet man sofort ab, daß die einzigen Kurven mit der Flexion Null die Geraden sind. Man kann in der Tat nicht beständig $1/\varrho = 0$ haben, ohne daß die zweiten Derivierten der Koordinaten alle auf einmal null sind, mithin die ersten Derivierten gleich Konstanten a, b, c, woraus, wenn man x_0, y_0, z_0 die Koordinaten des zum Anfangspunkt der Bogen gewählten Punktes nennt, folgt $x = as + x_0$, $y = bs + y_0$, $z = cs + z_0$ und endlich durch Elimination von s

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Das sind die Gleichungen der durch den Punkt (x_0, y_0, z_0) in der Richtung (a, b, c) gezogenen Geraden.

640. Berechnung der Torsion. Aus dem zweiten Tripel (11) gewinnt man durch Multiplikation mit λ, μ, ν und Summation

$$\frac{1}{\tau} = \lambda\frac{d\alpha}{ds} + \mu\frac{d\beta}{ds} + \nu\frac{d\gamma}{ds}.$$

Andererseits führt die Derivation der Formeln (14) zu den Formeln

$$\frac{d\alpha}{ds} = \varrho\left(\frac{dz}{ds}\frac{d^3y}{ds^3} - \frac{dy}{ds}\frac{d^3z}{ds^3}\right) + \frac{\alpha}{\varrho}\frac{d\varrho}{ds} \quad \text{u. s. w.}$$

Daraus folgt, wenn man auch die Formeln (13) berücksichtigt,

$$\frac{1}{\tau} = \varrho^2 \sum \frac{d^2x}{ds^2}\left(\frac{dz}{ds}\frac{d^3y}{ds^3} - \frac{dy}{ds}\frac{d^3z}{ds^3}\right)$$

oder

$$\frac{1}{\tau\varrho^2} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^3x}{ds^3} \\ \frac{dy}{ds} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^3y}{ds^3} \\ \frac{dz}{ds} & \frac{d^2z}{ds^2} & \frac{d^3z}{ds^3} \end{vmatrix}. \tag{17}$$

Diese wichtige Formel lehrt die Torsion kennen, wenn die Flexion bekannt ist. Ersetzt man übrigens ϱ durch seinen Ausdruck (16), so kann man auch schreiben

$$\frac{1}{\tau} = \frac{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)\,d^3x + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)\,d^3y + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)\,d^3z}{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}.$$

Dies ist die Torsion. In eleganterer Form:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix}}{\begin{Vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{Vmatrix}^2}.$$

Offenbar ist bei den ebenen Kurven die Torsion null, vorausgesetzt, daß man die Gerade ausschließt, deren Torsion überall unbestimmt ist, da man ja in jedem Punkte jede durch die Gerade hindurchgehende Ebene als oskulierend betrachten kann. Es ist nützlich zu bemerken, daß die einzigen Kurven mit der Torsion Null die ebenen Kurven sind. In der Tat, wenn die Torsion beständig null ist, so ist es auch die rechte Seite von (17), woraus folgt (§ 375), daß man hat $\Sigma \alpha dx = 0$ für drei passende Werte der Konstanten α, β, γ; mithin ist $\Sigma \alpha x = \mathrm{Const.}$ Zu demselben Schlusse, wie zu dem andern am Ende des vorigen Paragraphen, gelangt man auch durch direkte Betrachtung der beiden ersten Tripel (11).

641. Die Berechnung der Torsion läßt sich in ähnlicher Weise ausführen, wie wir zu der Formel (15) gelangt sind. In der Tat leitet man aus (12) durch Derivation ab

$$\lambda \frac{d}{ds}\frac{1}{\varrho} - \left(\frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\alpha}{\tau}\right)\frac{1}{\varrho} = \frac{d}{ds}\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds} \text{ u. s. w.},$$

ferner durch Quadrieren und Summieren

$$\left(\frac{d}{ds}\frac{1}{\varrho}\right)^2 + \left(\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{\tau^2}\right)\frac{1}{\varrho^2} = \left(\frac{d}{ds}\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d}{ds}\frac{d}{ds}\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d}{ds}\frac{d}{ds}\frac{dz}{ds}\right)^2.$$

Zu dieser Formel, welche τ zu berechnen gestattet, wenn ϱ bekannt ist, gelangt man auch, wenn man die Formel (17) ins Quadrat erhebt, nachdem man die rechte Seite auf die allgemeinere Form

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{d}{ds}\frac{dx}{ds} & \frac{d}{ds}\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{ds} & \frac{d}{ds}\frac{dy}{ds} & \frac{d}{ds}\frac{d}{ds}\frac{dy}{ds} \\ \frac{dz}{ds} & \frac{d}{ds}\frac{dz}{ds} & \frac{d}{ds}\frac{d}{ds}\frac{dz}{ds} \end{vmatrix}$$

gebracht hat, was man immer kann (§ 558, c).

Diskussion der gewundenen Kurven.

642. Wenn die Krümmungen bekannt sind, so ist das Fundamentaltrieder in M' in Bezug auf das Trieder, welches seinen Anfangspunkt in M hat, bestimmt. Man berechne in der Tat den Abstand $\Sigma A\delta x$ des Punktes M' von der durch M senkrecht zur Richtung (A, B, C) gelegten Ebene. Für die Entwickelung von δx nach der Formel von Taylor (§ 564) kann man immer s als unabhängige Veränderliche annehmen, unter welcher Voraussetzung man aus (11) erhält

$$\frac{dx}{ds} = a, \quad \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{\lambda}{\varrho}, \quad \frac{d^3x}{ds^3} = \lambda\frac{d}{ds}\frac{1}{\varrho} - \left(\frac{a}{\varrho} + \frac{\alpha}{\tau}\right)\frac{1}{\varrho}, \quad \ldots,$$

mithin

$$\delta x = a\,ds + \frac{\lambda}{\varrho}\frac{ds^2}{2} + \left(\lambda\frac{d}{ds}\frac{1}{\varrho} - \left(\frac{a}{\varrho} + \frac{\alpha}{\tau}\right)\frac{1}{\varrho}\right)\frac{ds^3}{6} + \cdots$$

und endlich

$$(18)\quad \Sigma A\delta x = \mathfrak{A}\,ds + \frac{\mathfrak{C}}{\varrho}\frac{ds^2}{2} + \left(\mathfrak{C}\frac{d}{ds}\frac{1}{\varrho} - \left(\frac{\mathfrak{A}}{\varrho} + \frac{\mathfrak{B}}{\tau}\right)\frac{1}{\varrho}\right)\frac{ds^3}{6} + \cdots,$$

wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die Kosinus sind, welche die Richtung (A, B, C) in Bezug auf das Fundamentaltrieder definieren, d. h.

$$\mathfrak{A} = \Sigma Aa, \quad \mathfrak{B} = \Sigma A\alpha, \quad \mathfrak{C} = \Sigma A\lambda.$$

Nur für $\mathfrak{A} = 0$ ist die rechte Seite von (18) infinitesimal von zweiter Ordnung und sie wird es von einer höheren Ordnung als der zweiten, wenn überdies $\mathfrak{C} = 0$ ist. Also ist der Abstand des Punktes M' von den Ebenen, die durch die Tangente in M hindurchgehen, im allgemeinen infinitesimal von zweiter Ordnung in Bezug auf den Bogen MM'; aber unter diesen Ebenen hat nur eine von M' einen Abstand, der mindestens von dritter Ordnung infinitesimal ist, nämlich die oskulierende Ebene. Mit gutem Recht ist also diese Ebene als die oskulierende bezeichnet worden, da sie unter allen Ebenen des Raumes diejenige ist, welche sich der Kurve in der Umgebung von M am meisten anschmiegt.

643. Die Formel (18) liefert uns sofort die Koordinaten u, v, w von M' in Bezug auf das Fundamentaltrieder. Man braucht nur (A, B, C) successiv mit den Richtungen der Tangente ($\mathfrak{A} = 1$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{C} = 0$), der Binormale ($\mathfrak{B} = 1$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{C} = 0$), der Hauptnormale ($\mathfrak{C} = 1$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = 0$) zusammenfallen zu lassen, um zu erhalten

$$(19)\qquad u = ds - \frac{ds^3}{6\varrho^2}, \quad v = -\frac{ds^3}{6\varrho\tau}, \quad w = \frac{ds^2}{2\varrho} - \frac{ds^2\,d\varrho}{6\varrho^2},$$

abgesehen von Infinitesimalen von höherer als dritter Ordnung. Diese Formeln erlauben es, den Verlauf der Kurve in der Umgebung eines jeden ihrer Punkte zu diskutieren. Offenbar wird nämlich, wenn die Krümmungen in M nicht null sind, ein Beobachter, der auf der Kurve wandert, indem er den Kopf auf dem positiven Teil der Hauptnormale hält und im positiven Sinne der Tangente fortschreitet, in M die Kurve ansteigen oder sich senken sehen, je nachdem ϱ positiv oder negativ ist, und er wird sie nach links oder nach rechts sich wenden sehen, je nachdem τ das Zeichen von ϱ oder das entgegengesetzte Zeichen hat. Da ferner die Umwandlung von ds in $-ds$ das Zeichen von v ändert, aber nicht das von w, so sieht man folgendes: Nimmt man in der Umgebung von M einen Bogen von passender Kleinheit, so läßt jede Ebene, die durch die Tangente hindurchgeht, den ganzen Bogen auf einer Seite, mit Ausnahme der oskulierenden Ebene, welche die Kurve durch-

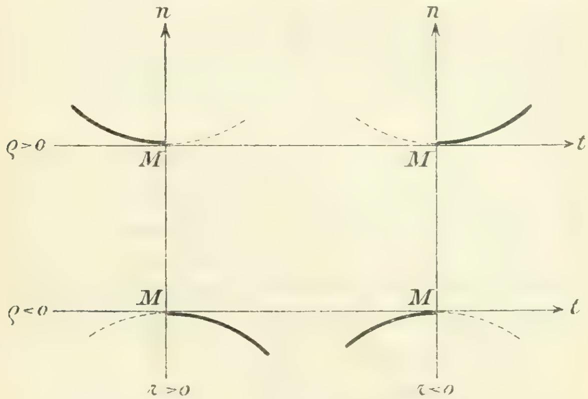

Fig. 80.

setzt. Die vier Arten, wie sich die Kurve in der Umgebung eines gewöhnlichen Punktes M verhalten kann, lassen sich nun so, wie man es in der Figur sieht, darstellen, wobei die links von unserem Beobachter liegenden Bogen punktiert gezeichnet sind. Es gelingt auf diese Weise zu konstatieren, daß im Falle $\tau < 0$ der Beobachter die Kurve (beim Berühren der oskulierenden Ebene) von der linken zur rechten Seite aufsteigend wird übergehen sehen oder aber von der rechten zur linken absteigend, sodaß in beiden Fällen der Gang der Kurve rechtsgewunden ist. Dies bedeutet, daß ein Punkt, der die Kurve durchläuft, indem er nach der positiven Seite der Tangente zu sich entfernt, für die Augen des Beobachters im Sinne eines Uhrzeigers sich zu bewegen scheinen wird. Für $\tau > 0$ hat man dagegen den linksgewundenen Gang. Also ist eine Kurve linksgewunden oder rechtsgewunden in der Umgebung eines gewöhnlichen Punktes, je nachdem die Torsion in diesem Punkte positiv oder negativ ist. Es ist ferner leicht sich zu überzeugen, daß dieser

Charakter der Kurve ungeändert bleibt, wenn man die Lage des Beobachters im Raume sich ändern läßt. Beispiele[1]) von Kurven mit positiver oder mit negativer Torsion bieten uns in der Natur die Ranken des Hopfens und des Weines, die bezüglich linksgewunden und rechtsgewunden sind.

644. Eine genauere Diskussion der Kurve in der Umgebung von M läßt sich mit Hilfe derselben Formeln (19) ausführen, wenn man bemerkt, daß abgesehen von Infinitesimalen von höherer als dritter Ordnung der infinitesimale Bogen MM', falls man M als Anfangspunkt der Bogen und der Koordinaten annimmt, sich so ansehen läßt, als gehörte er der durch die Gleichungen

$$x = s - \frac{s^3}{6\varrho^2}, \quad y = -\frac{s^3}{6\varrho\tau}, \quad z = \frac{s^2}{2\varrho} - \frac{s^3}{6\varrho^2}\frac{d\varrho}{ds}$$

dargestellten Kurve an. Dabei sind ϱ, τ und $d\varrho/ds$ in M, d. h. für $s = 0$, berechnet zu denken. Eliminiert man s auf alle möglichen Arten zwischen den letzten Gleichungen, so findet man

$$y^2 = \frac{2\varrho}{9\tau^2}z^3, \quad z = \frac{x^2}{2\varrho} - \frac{x^3}{6\varrho^2}\frac{d\varrho}{ds}, \quad y = -\frac{x^3}{6\varrho\tau}.$$

Daraus folgt, daß, wenn man die Kurve auf die Normalebene, auf die oskulierende Ebene und auf die rektifizierende Ebene in M projiziert, dieser Punkt bei den drei Projektionen bezüglich eine Spitze, ein gewöhnlicher Punkt oder ein Wendepunkt ist. Da die Tangente in M' Richtungskosinus hat, die gleich den Derivierten von x, y, z nach s und folglich proportional zu $x - \frac{2}{3}s$, y, $z - \frac{s^2}{6\varrho}$ sind, so findet man, daß die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Tangente folgende sind:

$$kx + \frac{2}{3}(1-k)s, \; ky, \; kz + (1-k)\frac{s^2}{6\varrho}\cdot$$

Die Tangente in M' trifft somit die oskulierende Ebene (in M) im Punkte $\left(\frac{2}{3}s, \frac{s^2}{6\varrho}\right)$, der in Bezug auf die rektifizierende Ebene auf derselben Seite wie M' liegt. Sie trifft ferner die letztgenannte Ebene in der Entfernung $-\frac{1}{2}y$ von der oskulierenden Ebene. Daraus folgt, daß die Tangenten einer gewundenen Kurve in zwei unendlich benachbarten Punkten sich nicht treffen: ihr Abstand ist $ds^3/12\varrho\tau$. Dieses Theorem verdankt man Bonnet.

645. Aus denselben Formeln leitet man ab $\varrho z - \tau y\frac{d\varrho}{ds} = \frac{1}{2}s^2$. Ersetzt man die Länge s des Bogens MM' durch die der Sehne, so

1) Maxwell: „Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus", deutsch von Weinstein, Bd. I, S. 25.

sieht man, daß dieser Bogen sich so ansehen läßt, als gehörte er der durch die Gleichung

$$x^2 + \left(y + \tau \frac{d\varrho}{ds}\right)^2 + (z - \varrho)^2 = \mathfrak{R}^2$$

dargestellten Kugel an, wo $\mathfrak{R}^2 = \varrho^2 + \left(\tau \frac{d\varrho}{ds}\right)^2$ ist. Die Kugel vom Radius $\mathfrak{R}$, welche ihren Mittelpunkt in der Normalebene, und zwar in den Abständen $-\tau \frac{d\varrho}{ds}$ und ϱ von der oskulierenden Ebene und von der rektifizierenden Ebene, hat, heißt die oskulierende Kugel der Kurve in M. Sie ist nämlich unter allen Kugeln des Raumes diejenige, welche sich der Kurve in der Umgebung von M am meisten anschmiegt. Vernachlässigt man ferner die Infinitesimalen von dritter Ordnung, so läßt sich der Bogen MM' als in der oskulierenden Ebene liegend betrachten; und wenn man auch diejenigen von zweiter Ordnung vernachlässigt, so kann man MM' direkt als eine geradlinige Strecke ansehen, die auf der Tangente liegt. Folglich ist es bei Untersuchungen, wo man von den höheren Infinitesimalen absehen darf, auch erlaubt, die Kurve mit einer polygonalen Linie $MM'M''M'''\ldots$ mit unendlich kleinen Seiten zu vergleichen und die Tangente als die Gerade zu betrachten, auf der ein Element MM' liegt, die oskulierende Ebene als die durch zwei konsekutive Elemente MM' und $M'M''$ oder durch die Punkte M, M', M'' bestimmte Ebene, die oskulierende Kugel als bestimmt durch die Punkte M, M', M'', M'''. Diese Betrachtungs- und Ausdrucksweise ist, obgleich inkorrekt, doch oft von Nutzen, um sich von gewissen Resultaten der Differentialrechnung geometrisch Rechenschaft zu geben. Es ist jetzt leicht zu konstatieren, daß man von einer Lage des Fundamentaltrieders (Anfangspunkt M) zu der nächstfolgenden (Anfangspunkt M') übergeht, indem man den Scheitel um ds auf der Tangente fortrücken und dann die Kanten um den Scheitel rotieren läßt derart, daß sie in Bezug auf ihre ursprünglichen Lagen t, b, n die folgenden Richtungskosinus annehmen:

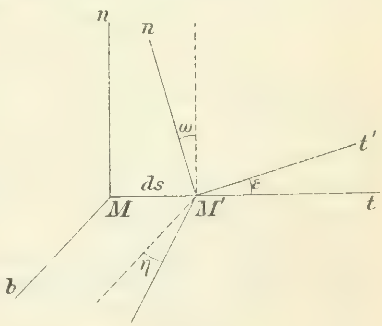

Fig. 81.

$$\begin{array}{llll} t': & 1 & 0 & \varepsilon \\ b': & 0 & 1 & \eta \\ n': & -\varepsilon & \eta & 1 \end{array}$$

Dies leitet man aus den Formeln (5), (8) und (10) ab unter den

Voraussetzungen $a = \beta = \nu = 1$, $b = c = \gamma = \alpha = \lambda = \mu = 0$; und es wird noch klarer und präziser durch die Betrachtungen des § 637.

646. Singularitäten. Das in dem vorigen Paragraphen Gesagte trifft nur im allgemeinen zu; denn es hört auf zu gelten in den Punkten, die der Bedingung

$$\begin{vmatrix} dx & d^2x & d^3x \\ dy & d^2y & d^3y \\ dz & d^2z & d^3z \end{vmatrix} = 0 \tag{20}$$

genügen (vgl. § 604). Diese Punkte sind im Raume das Analogon der Wendepunkte der ebenen Kurven. In solchen Punkten ist auf Grund von (17) wenigstens eine der beiden Krümmungen null, und es wird daher v von höherer als dritter Ordnung infinitesimal. Um diesen Abstand zu berechnen, muß man die in § 642 begonnene Rechnung fortsetzen und vor allem bemerken, daß

$$\frac{d^4x}{ds^4} = -3\frac{a}{\varrho}\frac{d}{ds}\frac{1}{\varrho} - a\varrho\frac{d}{ds}\frac{1}{\tau\varrho^2} + \lambda\left[\frac{d^2}{ds^2}\frac{1}{\varrho} - \left(\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{\tau^2}\right)\frac{1}{\varrho}\right] \tag{21}$$

ist, um daraus abzuleiten

$$v = \frac{1}{24}\Sigma\alpha d^4x = -\frac{\varrho\, ds^3}{24}d\frac{1}{\tau\varrho^2},$$

abgesehen von Infinitesimalen von höherer als vierter Ordnung. Mithin ist, je nachdem man

$$\frac{1}{\varrho} = 0 \ \left(\text{aber } d\frac{1}{\varrho} \gtrless 0\right) \text{ oder } \frac{1}{\tau} = 0 \ \left(\text{aber } d\frac{1}{\tau} \gtrless 0\right) \text{ hat,}$$

$$v = -\frac{ds^3}{12\tau}d\frac{1}{\varrho} \quad \text{oder} \quad v = -\frac{ds^3}{24\varrho}d\frac{1}{\tau}\,.$$

Daraus folgt im allgemeinen, daß in den durch (20) definierten singulären Punkten M, je nachdem eine der Krümmungen verschwindet um das Zeichen der andern anzunehmen oder zu verlassen, ein in der Umgebung von M gewählter Bogen von passender Kleinheit ganz auf der linken Seite oder (bezüglich) ganz auf der rechten Seite der oskulierenden Ebene liegt. Wenn dagegen die beiden Krümmungen gleichzeitig verschwinden, so ist im allgemeinen v infinitesimal von fünfter Ordnung. Deriviert man nämlich (21), so findet man unter den gemachten Voraussetzungen leicht

$$v = \frac{1}{120}\Sigma\alpha d^5x = -\frac{ds^3}{40}d\frac{1}{\varrho}d\frac{1}{\tau},$$

sodaß die oskulierende Ebene die Kurve durchsetzt, wie in den gewöhnlichen Punkten. Der betrachtete Punkt ist in diesem Falle auch für die Projektion der Kurve auf die Normalebene ein Wendepunkt. Bemerkenswert sind ferner unter den durch (20) definierten Punkten diejenigen Punkte M, in welchen nur die Flexion verschwindet, da in ihnen gerade das Gegenteil von dem passiert, was in den gewöhnlichen Punkten eintritt. Die Kurve durchsetzt nämlich alle Ebenen, die durch M hindurchgehen, nur nicht die oskulierende Ebene. Das liegt daran, daß, während v, wie wir gesehen haben, infinitesimal von vierter Ordnung wird, w von dritter Ordnung wird und daher wie u sein Zeichen mit ds wechselt. Daraus folgt, daß man eine Inflexion hat bei der Projektion der Kurve, nicht auf die rektifizierende Ebene, sondern auf die oskulierende, und es sind daher diese Punkte das wahre Analogon der Wendepunkte der ebenen Kurven. Ferner bietet die Projektion der Kurve auf die Normalebene in M, auch dann, wenn nur die Torsion null ist, eine Spitze in M; aber diese ist im ersten Falle von erster Art (§ 608) und im zweiten Falle von zweiter Art. Schwieriger ist die Untersuchung der Singularitäten, die von dem Verschwinden von ϱ und von τ herrühren; denn in solchen Punkten gelten nicht mehr die obigen Entwickelungen von u, v, w, weil die zu ihrer Gewinnung benutzten Formeln wesentlich voraussetzen, daß die Krümmungen endlich sind.

Berührungen.

647. Wir wollen mit einigen Andeutungen über die Berührung zwischen einer Kurve und einer Fläche schließen, indem wir den Leser inbetreff eines genaueren Studiums der Berührung einer Kurve mit einer Fläche oder mit andern Kurven auf andere Werke verweisen[1]). Wir werden uns hier, um die Theorie der Berührungen in rascherer und anschaulicherer Weise entwickeln zu können, an gewisse Resultate anlehnen, die wir früher (§ 616) beim Studium der Berührung zwischen ebenen Kurven erhalten haben. Wir werden demgemäß sagen, eine Fläche habe mit einer gegebenen Kurve in einem Punkte M eine Berührung n-ter Ordnung, wenn sie die Grenzlage einer durch M und durch n andere Punkte der Kurve hindurchgehenden Fläche einnimmt, für den Fall, daß diese letzteren nach M hinrücken, ohne daß dies andere Schnittpunkte tun. Gehört die betrachtete Fläche zu denen, die im dreidimensionalen Raume durch $n+1$ Punkte bestimmt sind (oder gehört sie, was auf dasselbe hinauskommt, einer Flächenschar an, die durch eine Gleichung mit $n+1$ willkürlichen Parametern dargestellt wird), so ist die Ordnung der Berührung im allgemeinen nicht größer als n, und wenn ein solcher Wert erreicht wird, so heißt die Fläche in dem betrachteten Punkte zu der Kurve oskulierend. Um auszudrücken, daß eine Fläche zu einer gegebenen Kurve in einem gegebenen Punkte oskulierend ist,

1) Siehe z. B. den „Cours d'Analyse" von Hermite (p. 116).

genügt es offenbar, die Gleichung so oft zu differentiieren, als es zur Bestimmung der Werte der Parameter nötig ist, und hinzuschreiben, daß alle so erhaltenen Gleichungen durch die Koordinaten x, y, z des Punktes M und durch die successiven Differentiale dieser Koordinaten befriedigt werden. Auf solche Weise wird in der Tat, wenn man die gewöhnliche konventionelle Ausdrucksweise benutzt (§ 645), ausgedrückt, daß die Fläche außer dem Punkte M die n Punkte M', M'', ... enthält, die zu M unendlich benachbart sind.

648. Oskulierende Ebene. Die Gleichung der Ebene

$$AX + BY + CZ + D = 0$$

enthält drei tatsächlich willkürliche Parameter, nämlich die Verhältnisse von drei Koeffizienten zu einem vierten nicht verschwindenden. Drücken wir aus, daß diese Gleichung und die beiden ersten, die sich aus ihr durch Differentiation oder durch Derivation nach dem Bogen s einer Kurve ergeben, von den Koordinaten x, y, z eines Punktes M dieser Kurve befriedigt werden:

$$(22)\quad Ax + By + Cz + D = 0,\; Aa + Bb + Cc = 0,\; A\lambda + B\mu + C\nu = 0.$$

Durch die erste Bedingung wird die Ebene nur gezwungen durch M hindurchzugehen; wenn man aber die zweite hinzufügt, so wird die Ebene die Tangente in M enthalten müssen. Man kann also jede Ebene, die durch die Tangente hindurchgeht, sehr wohl als Tangentialebene bezeichnen, insofern sie mit der Kurve im allgemeinen eine Berührung erster Ordnung hat, d. h. ihre Entfernung von einem Punkte M', der zu M unendlich benachbart ist, in Bezug auf MM' infinitesimal von zweiter Ordnung ist. Fügt man ferner die dritte Bedingung hinzu, so wird dadurch die Ebene verpflichtet auch die Hauptnormale zu enthalten, d. h. mit derjenigen zusammenzufallen, die wir bereits als oskulierende Ebene bezeichnet haben. Ihre Berührung mit der Kurve ist von zweiter Ordnung, kann aber unter Umständen von höherer Ordnung werden. Alsdann ist die Ebene superoskulierend oder, wie man zu sagen pflegt, eine stationäre oskulierende Ebene.

649. Die Superoskulation tritt natürlich in singulären Punkten ein, die durch die Bedingung charakterisiert sind, zu welcher man durch nochmalige Derivation der letzten der Gleichungen (22) und durch Elimination von A, B, C gelangt. Um aber sicher zu sein, daß man alle möglichen Fälle betrachtet, muß man bemerken, daß in Wirklichkeit die durch Derivation der zweiten Gleichung (22) erhaltene Bedingung folgende ist:

$$(23)\qquad (A\lambda + B\mu + C\nu)\frac{1}{\varrho} = 0$$

Man erhält also durch weiteres Derivieren

$$(24) \qquad (A\lambda + B\mu + C\nu)\frac{d}{ds}\frac{1}{\varrho} = (A\alpha + B\beta + C\gamma)\frac{1}{\varrho\tau}.$$

Wenn nun nicht $1/\varrho = 0$ ist, so muß $\Sigma A\lambda = 0$ sein, und man kann infolgedessen setzen $A = \alpha$, $B = \beta$, $C = \gamma$; mithin wird die Bedingung (24) $1/\tau = 0$. Im entgegengesetzten Falle ist die Gleichung (23) richtig, was auch A, B, C sein mögen, und es haben mithin alle Tangentialebenen eine Berührung zweiter Ordnung mit der Kurve. Aber der Name oskulierende Ebene kommt derjenigen Tangentialebene zu, für welche die Bedingung (24) erfüllt ist. Da diese Bedingung im allgemeinen wieder die Form $\Sigma A\lambda = 0$ annimmt, so findet man die oskulierende Ebene wieder, mit einer Berührung von wenigstens dritter Ordnung. Hätte man ferner auch $d\frac{1}{\varrho} = 0$, so würde es genügen, die Bedingung (24) einmal oder mehrmals zu derivieren, um sich zu überzeugen, daß man immer dieselbe Ebene wiederfindet. Wohlbemerkt müssen, wenn die angewandten Formeln ihre Gültigkeit haben sollen, die Krümmungen als endlich vorausgesetzt werden. Die stationäre oskulierende Ebene tritt also in den Punkten der Kurve auf, wo wenigstens eine der Krümmungen null ist, d. h. wo die Bedingung (20) erfüllt ist. Wenn man übrigens nicht das verschiedenartige Verhalten der Kurve in Bezug auf die sie superoskulierende Ebene studieren will, so erhält man (20) rascher durch Differentiation, indem man nämlich $\Sigma A\,dx = 0$ an Stelle der zweiten Gleichung (22) schreibt und A, B, C zwischen dieser und den beiden durch Differentiation aus ihr entstehenden, $\Sigma A d^2x = 0$, $\Sigma A d^3x = 0$, eliminiert.

650. Oskulierende Kugel. Ausgehend von der allgemeinen Gleichung einer Kugel

$$(X-\xi)^2 + (Y-\eta)^2 + (Z-\zeta)^2 = \mathfrak{R}^2$$

(wo ξ, η, ζ, $\mathfrak{R}$ vier passend zu bestimmende Konstanten sind) finden wir durch successive Derivationen nach dem Bogen einer beliebigen Kurve, wenn wir an Stelle der laufenden Koordinaten die Koordinaten x, y, z eines Punktes M dieser Kurve setzen:

$$(25) \qquad \begin{cases} (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 = \mathfrak{R}^2, \\ a(x-\xi) + b(y-\eta) + c(z-\zeta) = 0, \\ \lambda(x-\xi) + \mu(y-\eta) + \nu(z-\zeta) = -\varrho, \\ \alpha(x-\xi) + \beta(y-\eta) + \gamma(z-\zeta) = \tau\dfrac{d\varrho}{ds}. \end{cases}$$

Aus den drei letzten Gleichungen entnimmt man, wenn man an die hinsichtlich der Determinante (6) gemachten Bemerkungen denkt, sofort

$$(26)\qquad \begin{cases} x - \xi = -\lambda\varrho + \alpha\tau\dfrac{d\varrho}{ds}, \\ y - \eta = -\mu\varrho + \beta\tau\dfrac{d\varrho}{ds}, \\ z - \zeta = -\nu\varrho + \gamma\tau\dfrac{d\varrho}{ds} \end{cases}$$

und lernt so die Werte ξ, η, ζ der Koordinaten des Mittelpunktes kennen. Setzt man sie in die erste Gleichung ein, so erhält man, um den Radius auszudrücken, die Formel

$$(27)\qquad \mathfrak{R}^2 = \varrho^2 + \left(\tau\frac{d\varrho}{ds}\right)^2.$$

Die auf diese Weise bestimmte Kugel ist gerade die, welche wir am Anfang des § 645 angetroffen haben, da die drei letzten Bedingungen (25) uns sagen, daß ihr Mittelpunkt in der Normalebene liegt und von der Binormale und der Hauptnormale die Abstände ϱ und $-\tau\frac{d\varrho}{ds}$ hat. In diese Kugel geht die Kugel $MM'M''M'''$ über, wenn M', M'', M''' dem Punkt M zustreben. Offenbar strebt der Kreis $MM'M''$ ebenfalls der Lage auf der genannten Grenzkugel zu; und da andererseits seine Ebene die Kurve in M zu oskulieren strebt, so ist klar, daß der oskulierende Kreis der Schnitt der oskulierenden Kugel mit der oskulierenden Ebene ist. Also ist ϱ der Radius des oskulierenden Kreises, sodaß bei den gewundenen Kurven, wie bei den ebenen, die Flexion einer beliebigen Kurve die Krümmung ihres oskulierenden Kreises ist. Zu den Bedingungen (25) zurückkehrend wollen wir bemerken, daß die erste die Kugel verpflichtet, durch M hindurchzugehen; die zweite, in M die Kurve zu berühren: die dritte, durch den oskulierenden Kreis hindurchzugehen. Die vierte zeichnet unter diesen unendlich vielen Kugeln, die in M von der Kurve berührt und durchsetzt werden, eine aus, die die Kurve nicht durchsetzt, da ihre Berührung im allgemeinen von dritter Ordnung ist: das ist die oskulierende Kugel.

651. Um zu entscheiden, ob die Kurve in der Umgebung von M innerhalb oder außerhalb der oskulierenden Kugel liegt, berechne man den Abstand h des Punktes M' von dieser Kugel. Wird der Radius $\mathfrak{R}$ als endlich vorausgesetzt, so leitet man aus

$$(\mathfrak{R} + h)^2 = (x - \xi + \delta x)^2 + (y - \eta + \delta y)^2 + (z - \zeta + \delta z)^2$$

unter Vernachlässigung der Infinitesimalen von höherer als vierter Ordnung ab

$$\mathfrak{R}h = \Sigma(x - \xi)\,\delta x + \tfrac{1}{2}\,\Sigma\,\delta x^2.$$

Nennt man wie in § 643 u, v, w die Koordinaten von M' in Bezug auf das Fundamentaltrieder in M, so ist

$$\delta x = au + \alpha v + \lambda w,\quad \delta y = bu + \beta v + \mu w,\quad \delta z = cu + \gamma v + \nu w,$$

und man hat daher unter Erinnerung an (26)

$$\mathfrak{R}h = -w\varrho + v\tau\frac{d\varrho}{ds} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2).$$

In dieser Formel kann man auf Grund von (19) v^2 vernachlässigen, w^2 auf sein erstes Glied beschränken und u bis zum Gliede dritter Ordnung berechnen; aber v und w müssen bis zu den Gliedern vierter Ordnung berechnet werden, und dies läßt sich leicht bewerkstelligen, wenn man auch noch die Formel (21) benutzt:

$$v = \left(-1 + \frac{d\varrho}{2\varrho} + \frac{d\tau}{4\tau}\right)\frac{ds^3}{6\varrho\tau},$$

$$w = \frac{ds^2}{2\varrho} - \frac{ds^2 d\varrho}{6\varrho^2} - \left(\varrho\frac{d^2\varrho}{ds^2} - 2\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2 + 1 + \frac{\varrho^2}{\tau^2}\right)\frac{ds^4}{24\varrho^3}.$$

Setzt man nun zur Abkürzung $\varkappa = \frac{\varrho}{\tau} + \frac{d}{ds}\left(\tau\frac{d\varrho}{ds}\right)$, so ist leicht zu finden

$$\mathfrak{R}h = \frac{\varkappa\, ds^4}{24\varrho\tau}, \tag{28}$$

und da andererseits die Formel (27) durch Differentiation

$$\mathfrak{R}d\mathfrak{R} = \varkappa\tau\, d\varrho \tag{29}$$

gibt, so erhält man endlich

$$h = \frac{ds^4\, d\mathfrak{R}}{24\varrho\tau^2 d\varrho}.$$

Also liegt, wenn man die Punkte, in denen $d\varrho = 0$ ist, ausschließt, ein in der Umgebung von M gewählter Bogen von passender Kleinheit ganz außerhalb oder ganz innerhalb der oskulierenden Kugel in M, je nachdem das Volumen dieser Kugel und der Inhalt des oskulierenden Kreises in demselben Sinne variieren oder nicht.

652. Um die Bedingung zu finden, die erfüllt sein muß, damit die Kugel die Kurve superoskuliert; oder um zu wissen, in welchen Punkten der Kurve die Berührung zwischen ihr und der oskulierenden Kugel über die dritte Ordnung hinaus steigt, braucht man nur die letzte der Formeln (25) zu derivieren, indem man die vorhergehenden berücksichtigt. Um aber keinen Fall auszulassen, muß man alle Derivationen aufs Neue ausführen, ohne die Form der successiven Resultate zu ändern. Tut man dies, so bieten sich uns die beiden letzten Bedingungen unter der Form dar

$$\frac{1}{\varrho}\Sigma\lambda(x-\xi) = -1, \quad \frac{1}{\varrho\tau}\Sigma\alpha(x-\xi) = \frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{ds}. \tag{30}$$

Deriviert man dann noch diese letzte, so findet man $\varkappa\varrho\tau = 0$. Zu demselben Resultat gelangt man sofort, wenn man bemerkt, daß die gefundene Bedingung alles enthält, was auf Grund von (28) notwendig und hinreichend ist, damit h von höherer als vierter Ordnung infinitesimal wird. Da nun die Annahme $1/\varrho = 0$ ausgeschlossen ist (weil man $\mathfrak{R}$ als endlich voraussetzt) und da auch (aus demselben Grunde) die Annahme $1/\tau = 0$ mit $d\varrho \gtrless 0$ ausgeschlossen ist, so sieht man, daß die superoskulierende Kugel außer in den der Bedingung $\varkappa = 0$ genügenden Punkten auch in andern Punkten auftritt, die durch den Umstand charakterisiert sind, daß die Torsion daselbst verschwindet, obwohl die Kugel endlich bleibt. In diesen letzteren Punkten ist die zweite Bedingung (30) identisch erfüllt, und es hat folglich die Kurve mit allen Kugeln, die durch den oskulierenden Kreis hindurchgehen, eine Berührung dritter Ordnung. Aber nur einer einzigen von ihnen kommt der Name oskulierende Kugel zu, und zwar ist es immer die zu Anfang bestimmte. Also ist die Bedingung $\varkappa = 0$ für die Superoskulation zwar hinreichend, aber nicht notwendig; dagegen sagt uns in allen Fällen die Formel (29), daß man, wenn nicht $d\varrho = 0$ ist, $d\mathfrak{R} = 0$ hat. Daraus folgt insbesondere, daß eine Kurve ihre oskulierende Kugel durchsetzt, so oft diese ein Minimum oder ein Maximum wird oder aber aus einer stationären oskulierenden Ebene einen Kreis ausschneidet, der ein Minimum oder ein Maximum ist. In diesem letzteren Falle findet das Gegenteil von dem statt, was gewöhnlich eintritt. Die Kurve durchsetzt nämlich keine der andern Kugeln, die den oskulierenden Kreis enthalten.

653. Es werde nunmehr eine sphärische Kurve betrachtet, d. h. eine auf einer gegebenen Kugel vom Radius R gezogene Linie. In jedem ihrer Punkte kann es offenbar keine andere oskulierende und sogar superoskulierende Kugel geben außer eben jener Kugel, die die Kurve enthält. Man muß also beständig haben $\varkappa = 0$ oder aber $d\varrho = 0$ und $1/\tau = 0$. Im zweiten Falle findet man aufs Neue $\varkappa = 0$. Dies ist also eine Bedingung, die längs jeder sphärischen Kurve notwendig erfüllt ist. Um zu beweisen, daß die Bedingung auch hinreichend ist, damit die Kurve einer Kugel angehört, wollen wir die Gleichungen (26) derivieren. Aus der ersten leitet man ab

$$\alpha - \frac{d\xi}{ds} = -\lambda\frac{d\varrho}{ds} + \alpha\frac{d}{ds}\left(\tau\frac{d\varrho}{ds}\right) + \left(\frac{a}{\varrho} + \frac{\alpha}{\tau}\right)\varrho + \lambda\frac{d\varrho}{ds}\cdot$$

Also ist

$$(31)\qquad \frac{d\xi}{ds} = -\varkappa\alpha,\quad \frac{d\eta}{ds} = -\varkappa\beta,\quad \frac{d\zeta}{ds} = -\varkappa\gamma.$$

Wenn man längs der ganzen Kurve $\varkappa = 0$ hat, so zeigt die Formel (29), daß $\mathfrak{R}$ einen konstanten Wert R hat, und die Formeln (31) sagen uns, daß auch ξ, η, ζ konstant sind, woraus folgt, daß die Punkte der Kurve sich alle in konstanter Entfernung R von dem festen Punkte (ξ, η, ζ) befinden. Demnach lautet die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Kurve sphärisch ist,

$$\frac{\varrho}{\tau} + \frac{d}{ds}\left(\tau \frac{d\varrho}{ds}\right) = 0.$$

654. In dem allgemeinen Falle zeigen die Formeln (31), daß die Tangenten des Ortes der Mittelpunkte der oskulierenden Kugeln einer Kurve parallel sind zu den Binormalen in den entsprechenden Punkten der Kurve. Ferner findet man durch Quadrieren und Addieren das Bogenelement des Ortes

$$d\sigma = -\varkappa\, ds \tag{32}$$

und sieht, daß, wenn ein Punkt M eine Kurve durchläuft, der Mittelpunkt der oskulierenden Kugel die Tendenz hat, sich der oskulierenden Ebene in M zu nähern oder sich von ihr zu entfernen, je nachdem $\varkappa$ positiv oder negativ ist. Da (§§ 633, 635) die Richtungskosinus der Hauptnormalen in zwei entsprechenden Punkten der beiden Kurven proportional zu $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ sind, so sieht man, daß die genannten Normalen parallel sind und daher auch die Tangenten der ersten Kurve parallel zu den entsprechenden Binormalen der zweiten Kurve, sodaß diese immer von den Normalebenen der andern oskuliert wird. Bezeichnet man mit ϱ_1 und τ_1 ihre Krümmungsradien und richtet ihre Hauptnormalen in entgegengesetztem Sinne wie die Hauptnormalen der ersten Kurve, so hat man unter Erinnerung an (11)

$$\frac{\lambda}{\varrho} = \frac{da}{ds} = -\varkappa \frac{da}{d\sigma} = \varkappa \frac{\lambda}{\tau_1},$$

$$\frac{\lambda}{\tau} = \frac{d\alpha}{ds} = -\varkappa \frac{d\alpha}{d\sigma} = \varkappa \frac{\lambda}{\varrho_1}.$$

Also ist $\varrho_1 = \varkappa\tau$, $\tau_1 = \varkappa\varrho$, d. h.

$$\varrho_1 = \varrho + \tau \frac{d}{ds}\left(\tau \frac{d\varrho}{ds}\right), \quad \tau\tau_1 = \varrho\varrho_1.$$

Besonders bemerkenswert sind die gewundenen Kreise, d. h. die Kurven konstanter Flexion ($\varrho = R$) und nicht verschwindender Torsion. Die oskulierenden Kugeln eines gewundenen Kreises sind alle einander gleich ($\mathfrak{R} = \varrho$), und ihre Mittelpunkte liegen auf einem zweiten gewundenen Kreise ($\varrho_1 = \varrho$). Die einzigen Kurven, welche von unendlich vielen gleichen Kugeln oskuliert werden, sind die gewundenen Kreise; denn auf Grund von (29) kann, wenn ϱ nicht konstant ist, $\mathfrak{R}$ nicht konstant sein ohne daß $\varkappa = 0$ ist, in welchem Falle die oskulierenden Kugeln, wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben, in eine zusammenfallen, die die ganze Kurve enthält. Zu dem allgemeinen Falle zurückkehrend wollen wir zum Schluß noch bemerken, daß dank den Formeln (29) und (32) die Berechnung des Winkels $d\vartheta$ zwischen zwei unendlich benach barten oskulierenden Kugeln leicht ist. In der Tat folgt aus der evidenten Formel $d\sigma^2 = d\mathfrak{R}^2 + \mathfrak{R}^2 d\vartheta^2$ unmittelbar

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{\varkappa\varrho}{\mathfrak{R}^2} = \frac{1}{\tau}\,\frac{d\log\mathfrak{R}}{d\log\varrho}.$$

Dieses Verhältnis, von Demartres die sphärische Torsion genannt, ist ein weiteres nützliches Element für die Diskussion der gewundenen Kurven.

Übungen.

655. Schraubenlinien. a) Wir wollen eine zirkulare Schraubenlinie (Helix) betrachten, d. h. eine Kurve, die die Erzeugenden eines Kreiszylinders vom Radius r unter einem konstanten Winkel φ trifft. Wir wählen als z-Achse die Achse des Zylinders und legen senkrecht zu ihr durch einen Punkt A der Kurve die Achse der x. Es sei θ für einen beliebigen Punkt M der Schraubenlinie der Winkel, den die Projektion von OM auf die xy-Ebene mit der x-Achse bildet. Da nach der Definition c konstant und gleich $\cos\varphi$ sein muß, so ist notwendig $z = s\cos\varphi$, wenn man in A den Anfangspunkt der Bogen fixiert. Die Koordinaten von M sind also $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = s\cos\varphi$. Daraus folgt durch Differentiation

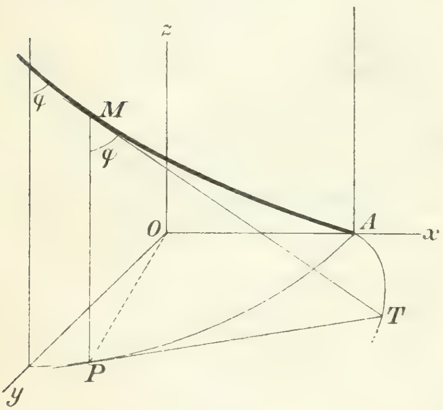

Fig. 82.

$$dx = -r\sin\theta\,d\theta,\quad dy = r\cos\theta\,d\theta,\quad dz = \cos\varphi\,ds$$

und hieraus durch Quadrieren und Addieren $ds^2 = r^2 d\theta^2 + \cos^2\varphi\,ds^2$. Weiter ergibt sich successiv

$$ds = \frac{r\,d\theta}{\sin\varphi},\quad s = \frac{r\theta}{\sin\varphi}\cdot$$

Schon die Relation $z = s\cos\varphi$ beweist, daß, wenn T der Fußpunkt der Tangente in der xy-Ebene ist, die Strecke MT gerade gleich s ist; und jetzt sehen wir, daß man, wenn P die Projektion von M auf die genannte Ebene ist, $PT = s\sin\varphi = r\theta =$ Bogen AP hat. Wenn daher M längs der Schraubenlinie fortrückt, so beschreibt T eine Kreisevolvente. Inzwischen sind die Richtungskosinus der Tangente der Schraubenlinie

$$a = -\sin\varphi\sin\theta,\quad b = \sin\varphi\cos\theta,\quad c = \cos\varphi,$$

woraus man durch Derivation und unter Erinnerung an das erste Tripel (11) entnimmt

$$\frac{\lambda}{\varrho} = -\frac{\sin^2\varphi\cos\theta}{r}, \quad \frac{\mu}{\varrho} = -\frac{\sin^2\varphi\sin\theta}{r}, \quad \nu = 0,$$

ferner

$$\varrho = \frac{r}{\sin^2\varphi}, \quad \lambda = -\cos\theta, \quad \mu = -\sin\theta, \quad \nu = 0.$$

Also treffen die Hauptnormalen der Schraubenlinie unter rechtem Winkel die Achse des Zylinders. Außerdem bemerke man, daß der Flexionsradius konstant ist. Die Richtungskosinus der Binormale sind

$$\alpha = c\mu = -\cos\varphi\sin\theta, \quad \beta = -c\lambda = \cos\varphi\cos\theta, \quad \gamma = b\lambda - a\mu = -\sin\varphi,$$

und es genügt α oder β zu derivieren oder auch einen der Richtungskosinus der Hauptnormale, um unter Erinnerung an die andern Formeln (11) den Wert des Torsionsradius zu erhalten: $\tau = r/\sin\varphi\cos\varphi$. Wie man sieht, ist also auch der Torsionsradius konstant. Sein Wert ist im vorliegenden Falle positiv, da (§ 643) die von uns betrachtete Schraubenlinie linksgewunden ist. Übrigens sind die vorstehenden Resultate auch auf eine rechtsgewundene Schraubenlinie anwendbar, vorausgesetzt, daß man $\sin 2\varphi < 0$ annimmt.

b) Wir wollen zwei wichtige Flächen angeben, zu denen man beim Studium der zirkularen Schraubenlinie geführt wird. Die eine ist der Ort der Tangenten und wird als abwickelbares Helikoid bezeichnet. Wir haben bereits gesehen, daß die ebenen, senkrecht zur Zylinderachse geführten Schnitte alle gleich der Evolvente des Kreises vom Radius r sind. Um sich von der Gestalt der Fläche Rechenschaft zu geben, ist es nützlich, auch das Profil zu kennen, d. h. ihren Schnitt mit einer die Achse enthaltenden Ebene. Da die Gleichungen der Tangente, wenn man R die Konstante $r\cot\varphi$ nennt,

$$\frac{x - r\cos\theta}{-\sin\theta} = \frac{y - r\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{z - R\theta}{\cot\varphi}$$

sind, so erhält man für $y = 0$

$$x = \frac{r}{\cos\theta}, \quad z = R(\theta - \operatorname{tg}\theta).$$

Es sind dies, in der xz-Ebene, die Gleichungen einer uns bereits bekannten Kurve (§ 599, c). Die Hauptnormalen der Schraubenlinie bilden ein anderes Helikoid, und zwar ein Helikoid mit Leitebene, so genannt, weil seine Erzeugenden alle parallel zu einer Ebene sind. Die Gleichungen einer Hauptnormale sind $y = x\operatorname{tg}\theta$, $z = R\theta$. Daraus ergibt sich durch Elimination von θ als Gleichung des Helikoids $y = x\operatorname{tg}\frac{z}{R}$.

c) Die Rechnungen der ersten Übung lassen sich allgemeiner (mit r als Funktion von θ) ausführen bei jeder *zylindrischen* Schraubenlinie, d. h. bei denjenigen Kurven, die auf einem beliebigen Zylinder gezogen sind und die Erzeugenden desselben unter einem konstanten Winkel φ treffen. Statt die Rechnungen zu wiederholen, wollen wir auf kürzerem Wege vorgehend zeigen, wie man zur Aufdeckung einer wichtigen, für diese Kurven charakteristischen Eigenschaft gelangt. Wir erinnern an die Formeln

$$\frac{dc}{ds} = \frac{\nu}{\varrho}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\nu}{\tau}, \quad \frac{d\nu}{ds} = -\frac{c}{\varrho} - \frac{\gamma}{\tau}$$

und bemerken, daß unter Voraussetzung eines konstanten c die erste Formel $\nu = 0$ liefert, worauf die zweite zeigt, daß γ konstant ist. Da man nun immer hat $c^2 + \gamma^2 + \nu^2 = 1$, so kann man setzen

$$\gamma = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\varphi,$$

wenn $c = \cos\varphi$ ist. Wir rechnen φ in der rektifizierenden Ebene von der Tangente aus in einem Sinne, der für einen auf der positiven Hälfte der Hauptnormale befindlichen Beobachter dem Bewegungssinne eines Uhrzeigers entgegengesetzt ist. Dies vorausgeschickt liefert die dritte Formel $\operatorname{tg}\varphi = \tau/\varrho$, und es ist daher das Verhältnis der Krümmungen konstant. Wenn umgekehrt dies der Fall ist, so ziehe man durch jeden Punkt M in der rektifizierenden Ebene die durch die Kosinus

$$l = a\cos\varphi - \alpha\sin\varphi, \quad m = b\cos\varphi - \beta\sin\varphi, \quad n = c\cos\varphi - \gamma\sin\varphi$$

definierte Gerade, wo der konstante Winkel φ durch die oben angegebene Gleichung definiert ist. Man hat auf Grund von (11)

$$\frac{dl}{ds}\Big/\lambda = \frac{dm}{ds}\Big/\mu = \frac{dn}{ds}\Big/\nu = \frac{\cos\varphi}{\varrho} - \frac{\sin\varphi}{\tau} = 0,$$

d. h. l, m, n sind konstant, und die Kurve ist daher eine zylindrische Schraubenlinie, da sie auf einem Zylinder gezeichnet ist und dessen Erzeugende unter dem konstanten Winkel φ trifft. Damit also eine Kurve eine zylindrische Schraubenlinie sei, ist notwendig und hinreichend, daß ihre Krümmungen ein konstantes Verhältnis bewahren. Wenn ferner die Krümmungen beide konstant bleiben, so ist die Schraubenlinie notwendig zirkular: sie ist auf einem Zylinder gezogen, dessen Radius $\varrho\tau^2/(\varrho^2 + \tau^2)$ ist. Wir überlassen dem Leser die Mühe, dieses von Puiseux herrührende Theorem zu beweisen.

d) Eine *konische* Schraubenlinie nennt man jede Kurve, die unter konstantem Winkel ψ (nicht senkrecht) die Erzeugenden eines Kegels trifft. Wenn der Kegel zirkular ist, so trifft die Schraubenlinie offenbar unter konstantem Winkel φ auch die Erzeugenden des Zylinders, der sie parallel zur Achse projiziert (und zwar ist, wenn man χ die Neigung der Erzeugenden gegen die Achse nennt, $\cos\varphi = \cos\chi\cos\psi$). Sie ist also zugleich eine zylindrische Schraubenlinie und heißt aus diesem Grunde eine zylindro-konische Schraubenlinie. Sie ist so zu sagen die logarithmische Spirale des Raumes. Man wähle die Achse und den Scheitel des Kegels als z-Achse bezw. als Koordinatenanfangspunkt und nenne R die Entfernung zwischen M und dem Anfangspunkt. Dann muß sein

$$\cos\psi = \frac{x}{R}\frac{dx}{ds} + \frac{y}{R}\frac{dy}{ds} + \frac{z}{R}\frac{dz}{ds}$$

oder $\cos\psi = dR/ds$. Da nun nach der Voraussetzung nicht $\cos\psi = 0$ ist (in welchem Falle man $R = \text{Const.}$ hätte und die Kurve einer Kugel angehören würde), so hat man $R = s\cos\psi$, falls man den Anfangspunkt der Bogen in den Scheitel des Kegels verlegt. Andererseits ist $r = R\sin\chi$, also $r = ms\sin\psi$, wo zur Abkürzung $m = \sin\chi\cot\psi$ gesetzt ist. Inzwischen sind die Koordinaten irgend eines Punktes der Kurve $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = r\cot\chi$, und man hat

$$dr^2 = m^2\sin^2\psi\,(dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2) = \cos^2\psi\,dr^2 + m^2 r^2 \sin^2\psi\,d\theta^2,$$

woraus man entnimmt $dr = mr\,d\theta$, mithin $\log r = m\theta + \text{Const.}$ Also ist der gerade Schnitt des Zylinders, auf welchem die betrachtete Kurve eine Schraubenlinie ist, eine logarithmische Spirale. Wenn man nun beachtet, daß

$$\frac{dr}{ds} = m\sin\psi, \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{mr}\frac{dr}{ds} = \frac{\sin\psi}{r} = \frac{1}{ms}$$

ist, so findet man leicht die Richtungskosinus der Tangente

$$a = (m\cos\theta - \sin\theta)\sin\psi, \quad b = (m\sin\theta + \cos\theta)\sin\psi, \quad c = \cos\varphi,$$

ferner durch nochmalige Derivation diejenigen der Hauptnormale

$$\lambda = -(\cos\theta + m\sin\theta)\frac{\varrho\sin\psi}{ms}, \quad \mu = -(\sin\theta - m\cos\theta)\frac{\varrho\sin\psi}{ms}, \quad \nu = 0.$$

Hiernach sind die Hauptnormalen senkrecht zur Achse des Kegels, treffen dieselbe jedoch nicht: sie sind normal zu dem Zylinder, nicht zum Kegel. Quadriert und summiert man die letzten Formeln und bemerkt, daß $1 + m^2 = \frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\psi}$ ist, so erhält man den Wert von ϱ und leitet daraus sofort denjenigen von $\tau = \varrho\,\mathrm{tg}\,\varphi$ ab:

$$\varrho = \frac{ms}{\sin\varphi}, \quad \tau = \frac{ms}{\cos\varphi}.$$

Also sind bei unserer zylindro-konischen Schraubenlinie die Krümmungsradien proportional zu dem vom Scheitel des Kegels aus gerechneten Bogen. Man kann beweisen, daß umgekehrt folgendes gilt: Wenn man bei einer Kurve hat $\varrho = ks$, $\tau = k's$, so ist sie notwendig eine zylindro-konische Schraubenlinie, die auf einem Kreiskegel liegt, bei welchem die Neigung χ der Erzeugenden gegen die Achse durch

$$\mathrm{tg}\,\chi = k'^2 / \sqrt{k^2 + k'^2 + k^2 k'^2}$$

definiert ist.

656. Wenn man einer Ebene, die aus einem biegsamen, aber unausdehnbaren Stoff bestehend gedacht wird, irgend eine zylindrische Form gibt, so werden alle Geraden, die in der Ebene eine bestimmte Richtung haben, die Erzeugenden des Zylinders, und jede andere Gerade verwandelt sich in eine Schraubenlinie. Sie wird immer noch auf der Fläche den kürzesten Weg zwischen irgend zweien ihrer Punkte, die genügend nahe benachbart sind, angeben. Dies drückt man aus, indem man sagt, die zylindrischen Schraubenlinien seien die geodätischen Linien der zugehörigen Zylinder. Der Begriff der geodätischen Linie wird sich uns später unter einem andern Gesichtspunkt und ausgedehnt auf eine beliebige Fläche darbieten. Wir können aber schon jetzt untersuchen, welches die geodätischen Linien der Kegelflächen sind, d. h. in welche Kurven sich die Geraden einer unausdehnbaren Ebene verwandeln, wenn man dieser durch bloße Biegung die Gestalt eines Kegels gibt. Man bemerke, daß diese Kurven keineswegs die konischen Schraubenlinien sind, die vielmehr aus den logarithmischen Spiralen, deren Pol im Scheitel des Kegels liegt, hervorgehen. Wenn wir uns hier auf den Fall eines Kreiskegels beschränken und A die Projektion des Scheitels O auf die Gerade ist, die man betrachten will, ferner l die Länge der Strecke OA und R der Abstand zwischen O und einem beliebigen Punkte M der Geraden, so hat man $R^2 = s^2 + l^2$, falls man A zum Anfangspunkt der Bogen macht. Wir wollen weiter mit φ den Winkel OMA oder im Raume die Neigung der Tangente gegen die Erzeugende bezeichnen. Offenbar ist

$$\frac{dR}{ds} = \cos\varphi = \frac{s}{R}, \quad \sin\varphi = \frac{l}{R}, \quad \frac{d\varphi}{ds} = -\frac{\sin\varphi}{R},$$

und da $ds^2 = dR^2 + r^2 d\theta^2$, so hat man $\frac{d\theta}{ds} = \frac{\sin\varphi}{r}$. Dabei ist, wenn χ die Neigung der Erzeugenden gegen die z-Achse (die Achse des Kegels) bedeutet, $r = R\sin\chi$. Nunmehr liefert die Derivation von $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = r\cot\chi$ nach s die Richtungskosinus der Tangente:

$$a = -\sin\varphi\sin\theta + \cos\varphi\cos\theta\sin\chi, \qquad b = \sin\varphi\cos\theta + \cos\varphi\sin\theta\sin\chi,$$

$$c = \cos\varphi\cos\chi.$$

Durch nochmalige Derivation ergeben sich die Richtungskosinus der Hauptnormale

$$\lambda = -\frac{\varrho}{R}\sin^2\varphi\cot\chi\cos\chi\cos\theta, \quad \mu = -\frac{\varrho}{R}\sin^2\varphi\cot\chi\cos\chi\sin\theta,$$

$$\nu = \frac{\varrho}{R}\sin^2\varphi\cos\chi$$

oder

$$\lambda = -\cos\chi\cos\theta, \quad \mu = -\cos\chi\sin\theta, \quad \nu = \sin\chi,$$

wenn man bemerkt (indem man jene Formeln quadriert und addiert), daß

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\sin^2\varphi}{R}\cot\chi = \frac{l^2}{R^3}\cot\chi$$

ist. Die Hauptnormalen sind also senkrecht zu den Erzeugenden und treffen die Achse: sie sind senkrecht zur Kegelfläche. Überdies variiert die Flexion im umgekehrten Verhältnis der dritten Potenz des Abschnitts, welcher von der Kurve auf der Erzeugenden, vom Scheitel aus gerechnet, bestimmt wird. Die Richtungskosinus der Binormale sind

$$\alpha = -\cos\varphi\sin\theta - \sin\varphi\cos\theta\sin\chi, \qquad \beta = \cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta\sin\chi,$$

$$\gamma = -\sin\varphi\cos\chi.$$

Es genügt, die letzte Gleichung zu derivieren, um den Wert der Torsion zu erhalten:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{R}\cot\chi = \frac{ls}{R^3}\cot\chi.$$

Man beachte die Relation $s\tau = l\varrho$. Man kann beweisen, daß dieselbe für die geodätischen Linien jeder beliebigen Kegelfläche gilt, aber nicht für andere Kurven. Es ist also charakteristisch für die geodätischen Linien der Kegel, daß der Quotient der Krümmungen im umgekehrten Verhältnis des Bogens variiert.

657. Es sei zu untersuchen die durch die Gleichungen

$$x = \frac{R}{2}(e^\theta + e^{-\theta})\cos\theta, \quad y = \frac{R}{2}(e^\theta + e^{-\theta})\sin\theta, \quad z = R\theta$$

dargestellte Kurve. Man bemerke zunächst, daß wegen $y = x \operatorname{tg}\theta$, $z = R\theta$ die Kurve auf einem Helikoid mit Leitebene (§ 655, b) liegt. Andererseits ist ihre Projektion auf die xy-Ebene die Spirale, welche in Polarkoordinaten durch die Gleichung $r = \frac{R}{2}(e^\theta + e^{-\theta})$ dargestellt wird; und man hat $z = R\theta$. Also gehört die Kurve auch der Rotationsfläche $r = \frac{R}{2}\left(e^{\frac{z}{R}} + e^{-\frac{z}{R}}\right)$ an. Diese ist das Katenoid, eine wichtige Fläche, die durch Rotation der Kettenlinie $x = \frac{R}{2}\left(e^{\frac{z}{R}} + e^{-\frac{z}{R}}\right)$ um die z-Achse, ihre Direktrix, erzeugt wird. Die vorgelegte Kurve befindet sich also in dem Schnitt eines Katenoids und eines Helikoids mit Leitebene. Inzwischen erhält man durch Differentiation der Koordinaten

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{R}{2}\left[(e^\theta - e^{-\theta})\cos\theta - (e^\theta + e^{-\theta})\sin\theta\right],$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{R}{2}\left[(e^\theta - e^{-\theta})\sin\theta + (e^\theta + e^{-\theta})\cos\theta\right], \quad \frac{dz}{d\theta} = R,$$

mithin

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{R}{\sqrt{2}}(e^\theta + e^{-\theta}), \quad s = \frac{R}{\sqrt{2}}(e^\theta - e^{-\theta}),$$

wenn man haben will, daß für $\theta = 0$ auch $s = 0$ ist. Die Richtungskosinus der Tangente sind also

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(k\cos\theta - \sin\theta), \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}}(k\sin\theta + \cos\theta), \quad c = \frac{\sqrt{2}}{e^\theta + e^{-\theta}},$$

wo zur Abkürzung $k = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{e^\theta + e^{-\theta}}$ gesetzt ist. Da $-a\sin\theta + b\cos\theta = 1/\sqrt{2}$ ist, so sieht man, daß die Kurve die Parallelkreise des Katenoids unter 45^0 schneidet. Beachtet man ferner, daß $\frac{dk}{d\theta} = 1 - k^2$ ist, so findet man durch nochmalige Differentiation

$$\frac{da}{d\theta} = -\frac{k}{\sqrt{2}}(\sin\theta + k\cos\theta), \quad \frac{db}{d\theta} = \frac{k}{\sqrt{2}}(\cos\theta - k\sin\theta),$$

$$\frac{dc}{d\theta} = -\frac{k\sqrt{2}}{e^\theta + e^{-\theta}}.$$

Daraus folgt, wenn man quadriert und addiert, $\varepsilon = k\,d\theta$, mithin

$$\varrho = \frac{1}{k}\frac{ds}{d\theta} = \frac{R}{\sqrt{2}}\frac{(e^\theta + e^{-\theta})^2}{e^\theta - e^{-\theta}} = s + \frac{2R^2}{s}$$

und

$$\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta + k\cos\theta), \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta - k\sin\theta), \quad \nu = -\frac{\sqrt{2}}{e^\theta + e^{-\theta}}.$$

Endlich ergibt sich

$$\alpha = \frac{2\cos\theta}{e^\theta + e^{-\theta}}, \quad \beta = \frac{2\sin\theta}{e^\theta + e^{-\theta}}, \quad \gamma = -\frac{e^\theta - e^{-\theta}}{e^\theta + e^{-\theta}}.$$

Da $\beta/\alpha = \operatorname{tg}\theta$ ist, so trifft offenbar die Binormale die z-Achse: sie ist also normal zu dem Katenoid. Um die Torsion zu berechnen, braucht man nur eine der Gleichungen (11), z. B. $d\gamma/ds = \nu/\tau$, zu nehmen. Aus ihr leitet man ab

$$\tau = \frac{R}{4}(e^\theta + e^{-\theta})^2 = R + \frac{s^2}{2R}.$$

Es ist ferner leicht zu beweisen, daß τ gleich dem Abschnitt der Binormale ist, der zwischen der Kurve und der z-Achse liegt. In der Tat ist nach bekannten Eigenschaften der Kettenlinie (§ 589, c) der genannte Abschnitt gerade gleich τ^2/R. Man bemerke endlich (vgl. § 656), daß das Verhältnis der Krümmungen proportional zu dem Bogen variiert.

658. Bertrandsche Kurven. a) Wir wollen untersuchen, ob es passieren kann, daß die Hauptnormalen einer Kurve (M) Hauptnormalen einer zweiten Kurve (M_1) sind. Jedem Punkte (x, y, z) auf der ersten Kurve entspricht auf der zweiten ein Punkt M_1, dessen Koordinaten $x_1 = x + \lambda p$, $y_1 = y + \mu p$, $z_1 = z + \nu p$ sind, wenn p die Entfernung MM_1 bedeutet. Den Richtungskosinus der Tangente von (M_1) in M_1 muß man die Form geben können

$$a_1 = a\cos\psi - \alpha\sin\psi, \qquad b_1 = b\cos\psi - \beta\sin\psi, \qquad c_1 = c\cos\psi - \gamma\sin\psi,$$

wenn mit ψ der Winkel bezeichnet wird, um welchen diese Tangente für einen in M befindlichen Beobachter (im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers) sich drehen muß, bis sie parallel zur Tangente von (M) in M wird. Inzwischen hat man

$$\frac{dx_1}{ds} = a - \left(\frac{a}{\varrho} + \frac{\alpha}{\tau}\right)p + \lambda\frac{dp}{ds} \quad \text{u. s. w.},$$

mithin

$$\frac{dp}{ds} = 0, \quad 1 - \frac{p}{\varrho} = \frac{ds_1}{ds}\cos\psi, \quad \frac{p}{\tau} = \frac{ds_1}{ds}\sin\psi, \tag{33}$$

sodaß

$$p = \text{Const.}, \qquad \frac{1}{\varrho} + \frac{\cot\psi}{\tau} = \frac{1}{p} \tag{34}$$

sein muß. Bis jetzt haben wir nur ausgedrückt, daß die Hauptnormalen von (M) normal zu (M_1) sind. Sollen sie aber die Hauptnormalen werden, so muß man außerdem haben

$$\frac{da_1}{ds_1} = \frac{\lambda}{\varrho_1}, \quad \frac{db_1}{ds_1} = \frac{\mu}{\varrho_1}, \quad \frac{dc_1}{ds_1} = \frac{\nu}{\varrho_1},$$

es muß also, wenn man beachtet, daß

$$\frac{d\alpha_1}{ds} = \left(\frac{\cos\psi}{\varrho} - \frac{\sin\psi}{\tau}\right)\lambda - (\alpha\sin\psi + \alpha\cos\psi)\frac{d\psi}{ds} \quad \text{u. s. w.}$$

ist,

$$\frac{d\psi}{ds} = 0, \quad \frac{1}{\varrho_1}\frac{ds_1}{ds} = \frac{\cos\psi}{\varrho} - \frac{\sin\psi}{\tau}, \tag{35}$$

mithin $\psi =$ Const. sein, und wir sehen auf diese Weise, daß die Fundamentaltrieder der beiden Kurven starr miteinander verbunden sind. Überdies besteht auf Grund von (34) zwischen den Krümmungen von (M) eine lineare Relation mit konstanten Koeffizienten. Somit ist (M) keine beliebige Kurve: sie ist eine Bertrandsche Kurve. Man belegt mit diesem Namen jede Kurve, deren Krümmungen durch eine Relation

$$\frac{p}{\varrho} + \frac{q}{\tau} = 1 \tag{36}$$

mit konstanten p, q verbunden sind.

b) Man beachte, daß umgekehrt, wenn eine solche Kurve gegeben ist, alle oben gefundenen Bedingungen erfüllt sind, und daß es daher eine zweite Kurve gibt, welche dieselben Hauptnormalen hat: die beiden Kurven bestimmen auf den gemeinsamen Hauptnormalen Abschnitte von der Länge p, und die Tangenten in den Endpunkten jedes Abschnitts bilden miteinander einen konstanten Winkel $\psi = \operatorname{arctg}(p/q)$. Offenbar ist die zweite Kurve, ebenso wie die erste, eine Bertrandsche Kurve, die derselben Gleichung (36) genügt, abgesehen von der Verwandlung von p in $-p$. Dieser Umstand erlaubt es, die Krümmungen von (M_1) in einfacher Weise zu berechnen, da man aus der dritten Formel (33) erhält $ds_1/ds = \sqrt{p^2+q^2}/\tau$, sodaß also auch $ds/ds_1 = \sqrt{p^2+q^2}/\tau_1$ sein muß. Daraus folgt $\tau\tau_1 = p^2+q^2$, d. h. die Torsionen in zwei Punkten, die sich auf den beiden Kurven entsprechen, bilden ein konstantes Produkt. Wendet man ferner (36) auf die Kurve (M_1) an, so findet man

$$\frac{p}{\varrho_1} = \frac{q}{\tau_1} - 1 = \frac{q\tau}{p^2+q^2} - 1 = \frac{(p\tau + q\varrho)q}{(p^2+q^2)\varrho} - 1 = \frac{(q\tau - p\varrho)p}{(p^2+q^2)\varrho},$$

d. h.

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{q\tau - p\varrho}{(p^2+q^2)\varrho}, \tag{37}$$

wie man auch aus der zweiten Formel (35) ableiten kann. Endlich wollen wir bemerken, daß die Antwort, welche wir auf die vorgelegte Antwort gegeben haben, illusorisch sind, wenn $p = 0$ ist, d. h. bei den Kurven konstanter (nicht verschwindender) Torsion und variabler Flexion. In diesem Falle fällt nämlich (M_1) mit (M) zusammen. Dieser Schluß gilt nicht bei den Kurven von der Torsion Null (den ebenen Kurven), bei welchen man in der Tat $\psi = 0$ hat, sodaß die Formeln (33) und (35) nur die bekannten Resultate

$$p = \text{Const.}, \quad \frac{ds_1}{ds} = 1 - \frac{p}{\varrho}, \quad \varrho_1 = \varrho - p$$

liefern, die sich auf die Scharen paralleler Kurven beziehen (§ 624, b).

Und ebensowenig gilt er, wenn auch die Flexion konstant ist, weil alsdann die Bedingung (36) für unendlich viele Paare von Werten p, q erfüllt ist, sodaß also eine zirkulare Schraubenlinie sich in unendlich vielen Weisen als Bertrandsche Kurve ansehen läßt. Die zirkularen Schraubenlinien sind, wie sich hier zeigt, unter den gewundenen Kurven durch die Eigenschaft charakterisiert, daß sie, wie die ebenen Kurven, ihre Hauptnormalen mit unendlich vielen andern Kurven gemein haben. Diese Kurven sind natürlich zirkulare Schraubenlinien, und eine von ihnen muß sich insbesondere auf eine Gerade reduzieren: sie entspricht den Werten von p und q, die der Gleichung (36) und der Gleichung (37) für $\varrho_1 = \infty$ genügen, d. h.

$$p = \frac{\varrho \tau^2}{\varrho^2 + \tau^2}, \quad q = \frac{\tau \varrho^2}{\varrho^2 + \tau^2},$$

und ist die gemeinsame Achse der Zylinder, auf denen die Schraubenlinien liegen.

Anwendungen auf die Flächen.

Erste Begriffe.

659. Tangentialebene. An die unendlich vielen Kurven, die sich durch einen Punkt M auf einer Fläche ziehen lassen, lege man in M die Tangenten: diese heißen auch Tangenten der Fläche. Jede von ihnen ist ihrer Richtung nach durch Kosinus definiert, die proportional sind zu den Differentialen (§ 630) der Koordinaten x, y, z des Punktes M, wenn man sich denselben längs einer Kurve der Fläche beweglich denkt. Ist nun die Fläche dargestellt durch die Gleichung $f(X, Y, Z) = 0$, so sind die genannten Differentiale durch die Relation verbunden

$$(1) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0.$$

Diese drückt aus, daß die betrachtete Tangente, welche es auch sein mag, senkrecht ist zu der Geraden, die ihrer Richtung nach durch die Kosinus

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{\sqrt{\varDelta f}} \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \mathfrak{M} = \frac{1}{\sqrt{\varDelta f}} \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \mathfrak{N} = \frac{1}{\sqrt{\varDelta f}} \frac{\partial f}{\partial z}$$

definiert wird. Also liegen alle Tangenten in M in einer Ebene. Es ist dies die Tangentialebene der Fläche im Punkte M, und die in M auf ihr errichtete Senkrechte ist die Normale der Fläche. Die Tangentialebene wird also dargestellt durch die Gleichung

$$(2) \qquad (X - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial f}{\partial y} + (Z - z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Will man ferner die partiellen Derivierten p, q von z nach x und y benutzen, so sind die Richtungskosinus der Normale

$$\mathfrak{L} = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \mathfrak{M} = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \mathfrak{N} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

und die Gleichung der Tangentialebene nimmt die einfachere Form an

$$(3) \qquad Z - z = p(X - x) + q(Y - y).$$

Wenn wir uns auf früher (§ 568) Gesagtes beziehen, so sehen wir, daß die Normale der Fläche $f = 0$ im Punkte M genau die Gerade ist, längs welcher die Funktion f am raschesten zu variieren strebt, während längs der Tangenten die Funktion die Tendenz hat, den Wert 0 zu bewahren: sie hat in der Tat in den Punkten M' der Tangentialebene, welche unendlich nahe an M liegen, Werte, die in Bezug auf MM' infinitesimal von zweiter Ordnung sind.

660. Es ist auch nützlich, wenn man $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ in dem Falle zu berechnen weiß, wo die Fläche durch die Gleichungen

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v)$$

gegeben ist. Dabei sollen u und v unabhängig voneinander variieren. Damit diese drei Gleichungen eine Fläche darstellen, ist notwendig und hinreichend, daß zwei von den drei Funktionen x, y, z unabhängig sind, daß folglich (§ 578) in der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{matrix} \right\|$$

die Minoren zweiter Ordnung nicht alle null sind. Wenn nunmehr v konstant bleibt, so definieren die obigen Gleichungen eine Kurve der Fläche. $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$ sind proportional zu den Richtungskosinus der Tangente dieser Kurve in dem betrachteten Punkte, während $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$ wiederum proportional zu den Richtungskosinus der Tangente derjenigen Kurve sind, die man erhält, wenn man u konstant hält und v allein variieren läßt. Aus den Orthogonalitätsbedingungen

$$\sum \mathfrak{L} \frac{\partial x}{\partial u} = 0, \quad \sum \mathfrak{L} \frac{\partial x}{\partial v} = 0$$

leitet man ab, daß $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ proportional zu den obengenannten Minoren sind, und da die Summe der Quadrate dieser Minoren gleich dem Quadrat der Matrix ist und daher den Wert $ab - c^2$ hat, wobei

$$a = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \quad b = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2, \quad c = \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}$$

ist, so hat man offenbar

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{\sqrt{ab-c^2}} \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \quad \mathfrak{M} = \frac{1}{\sqrt{ab-c^2}} \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \quad \mathfrak{N} = \frac{1}{\sqrt{ab-c^2}} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$$

661. Übungen. Wir wollen die Gleichung desjenigen der Fläche $f(X, Y, Z) = 0$ umbeschriebenen Kegels suchen, der seinen Scheitel in einem Punkte Q mit den Koordinaten ξ, η, ζ hat, d. h. also des Kegels, der von den sämtlichen durch Q an die Fläche gelegten Tangenten gebildet wird. Man drückt aus, daß der Punkt M mit den Koordinaten x, y, z der Fläche angehört und daß die Tangentialebene in M durch Q hindurchgeht, indem man schreibt

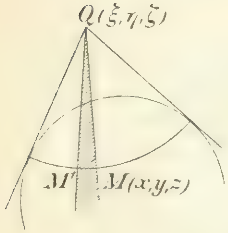

Fig. 83.

$$(4) \qquad f(x, y, z) = 0,$$

$$(\xi - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial f}{\partial y} + (\zeta - z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Wenn man x, y, z als die laufenden Koordinaten betrachtet, so sind dies die Gleichungen der Berührungskurve des Kegels und der Fläche. Man kann auf diese Weise in den Anwendungen den scheinbaren Umriß einer Fläche für einen Beobachter, der sie von Q aus betrachtet, bestimmen, d. h. die Kurve, welche den von Q aus sichtbaren Teil von dem nicht sichtbaren trennt; oder auch die Trennungslinie zwischen Schatten und Licht, wenn die Fläche in ein Strahlenbündel getaucht ist, das von dem einen leuchtenden Punkte Q ausgeht. Wünscht man ferner den Schatten zu kennen, der auf eine andere Fläche geworfen wird, so muß man zu ihrer Gleichung die Gleichung jenes umbeschriebenen Kegels hinzunehmen, um den Umriss des Schattens zu finden; und um die Gleichung des Kegels zu erhalten, braucht man nur x, y, z zwischen den Gleichungen (4) und denen der Erzeugenden QM

$$\frac{X-\xi}{x-\xi} = \frac{Y-\eta}{y-\eta} = \frac{Z-\zeta}{z-\zeta}$$

zu eliminieren. Denkt man sich insbesondere Q unendlich fern, so liefert die Elimination von x, y, z zwischen den Gleichungen

$$f(x, y, z) = 0, \quad A\frac{\partial f}{\partial x} + B\frac{\partial f}{\partial y} + C\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad \frac{X-x}{A} = \frac{Y-y}{B} = \frac{Z-z}{C}$$

die Gleichung des der Fläche parallel zu einer gegebenen Richtung (A, B, C) umbeschriebenen Zylinders. Zu dem allgemeinen Falle zurückkehrend bemerken wir, daß die Elimination sich in sehr einfacher Form ausführen läßt, wenn man die Funktion

$$F(t) = f(\xi + t(X-\xi), \; \eta + t(Y-\eta), \; \zeta + t(Z-\zeta))$$

betrachtet und bemerkt, daß die zweite Gleichung (4) $F'(t) = 0$ wird. Man ersieht daraus, daß die Gleichung des umbeschriebenen Kegels durch Elimination von t aus $F(t) = 0$, $F'(t) = 0$ hervorgeht.

662. Singularitäten. Im obigen ist die stillschweigende Voraussetzung gemacht, daß die ersten Derivierten von f im Punkte M nicht sämtlich null sind. Sonst würde nämlich die Relation (1) illusorisch werden. Hat man aber

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \tag{5}$$

so ist der Punkt M ein singulärer Punkt, insofern als die Tangenten der Fläche in M, statt in einer Ebene zu liegen, einen Kegel bilden. Das kann man sofort erkennen, wenn man die Gleichung der Fläche für die zu M unendlich benachbarten Punkte (X, Y, Z) in der Form schreibt (§ 376)

$$(X-x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y-y)\frac{\partial f}{\partial y} + (Z-z)\frac{\partial f}{\partial z}$$
$$+ \frac{1}{2}\left[(X-x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \cdots + 2(X-x)(Y-y)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \cdots\right] + \cdots = 0.$$

Sind die Werte von $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$, in M berechnet, nicht alle null, so sieht man bei Vernachlässigung der höheren Infinitesimalen, daß die Fläche sich in der Umgebung von M wie die Ebene (2) verhält, und man findet auf diese Weise rascher die Gleichung der Tangentialebene. Wenn dagegen die Koordinaten von M den Gleichungen (5) genügen, so kann man die zu M unendlich benachbarten Punkte der Fläche, abgesehen von Infinitesimalen von höherer als zweiter Ordnung, so ansehen, als lägen sie auf dem quadratischen Kegel

$$(X-x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (Y-y)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \cdots + 2(X-x)(Y-y)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \cdots = 0;$$

u. s. f. Die Aufsuchung dieser singulären Punkte einer Fläche (die auch konische Punkte heißen oder Doppelpunkte, dreifache Punkte u. s. w.) geschieht also nach einem durchaus ähnlichen Verfahren, wie wir es bei den ebenen Kurven (§ 607) befolgt haben, und die Natur der Singularität erkennt man mit Hilfe ebener Schnitte der Fläche, die in unendlicher Nähe des betrachteten Punktes ausgeführt werden. Man bemerke, daß auf den Flächen die singulären Punkte, indem sie sich in stetiger Weise aneinanderschließen, singuläre Linien bilden können. Projiziert man z. B. eine ebene Kurve von einem außerhalb ihrer Ebene gewählten Punkte, so erhält man einen Kegel, der als vielfache Linien alle diejenigen Erzeugenden zuläßt, die durch die vielfachen Punkte der betrachteten Kurve hindurchgehen; ebenso sind vielfache Linien einer Rotationsfläche alle von den vielfachen Punkten des Meridians erzeugten Parallelkreise; u. s. w. Andere Singularitäten, die den Wendepunkten der ebenen Kurven analog sind, werden sich uns in kurzem darbieten.

663. Oskulierende Geraden. Wir kehren jetzt zu den gewöhnlichen Punkten zurück und wollen uns die Aufgabe stellen, das Verhalten der Fläche in der Umgebung eines solchen Punktes M zu studieren. Man nehme die Gleichung der Tangentialebene in der Form (3) und berechne den Abstand h dieser Ebene von irgend einem Punkte M', der auf der Fläche zu M unendlich benachbart ist. Der Abstand ist

$$h = \frac{\delta z - p\,\delta x - q\,\delta y}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Nun hat man

$$\delta z = p\,\delta x + q\,\delta y + \tfrac{1}{2}(r\,\delta x^2 + 2s\,\delta x\,\delta y + t\,\delta y^2) + \cdots,$$

wo p, q, r, s, t die bekannte Bedeutung (§ 563) haben und für den Punkt M berechnet zu denken sind. Vernachlässigt man also die Infinitesimalen von höherer als zweiter Ordnung, so wird

$$h = \frac{r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2}{2\sqrt{1 + p^2 + q^2}}. \tag{6}$$

Jedes Paar von Werten von dx und dy definiert zusammen mit dem zugehörigen $dz = p\,dx + q\,dy$ die Richtung einer Geraden, die eine Tangente von unendlich vielen durch M hindurchgehenden Kurven der Fläche ist, und man kann sich immer denken, daß M' einer von diesen Kurven angehört. Man braucht nur die Tangente in der Tangentialebene um M sich drehen zu lassen, damit M' innerhalb eines Stückes ϱ der Fläche, welches von passender Kleinheit ist und eine Umgebung von M bildet, jede Lage annehmen kann. Wenn die Tangente eine ganze Umdrehung vollendet, so tritt zweimal der Fall ein, daß h infinitesimal von höherer als zweiter Ordnung wird, nämlich in den beiden Lagen, wo der Zähler des Ausdrucks (6) verschwindet. Man wird also dazu geführt, unter den unendlich vielen Tangenten zwei auszuzeichnen, die man die *oskulierenden Geraden* nennt, weil sie unter allen durch M hindurchgehenden Geraden diejenigen sind, welche sich der Fläche in der Umgebung von M am meisten anschmiegen. Diese Geraden können imaginär oder reell und verschieden sein, je nachdem $rt - s^2$ positiv oder negativ ist. Im ersten Falle nennt man den Punkt M einen *elliptischen* Punkt, im zweiten einen *hyperbolischen*. Für $rt - s^2 = 0$ bietet sich eine Besonderheit: die beiden oskulierenden Geraden fallen in eine zusammen, und der Punkt heißt *parabolisch*. Wenn M ein elliptischer Punkt ist, so bewahrt h ein unverändertes Vorzeichen, und ϱ *liegt daher ganz auf einer Seite der Tangentialebene*. Man kann also sagen, daß für die Schnittlinie der Fläche mit ihrer Tangentialebene M ein isolierter Punkt ist. Wenn dagegen M ein hyperbolischer Punkt ist, so bestimmen die (reellen) oskulierenden Geraden in der Tangentialebene zwei Regionen derart, daß in der einen h positiv und in der andern h negativ ist, mithin ϱ *von der Tangentialebene durch-*

setzt wird. Ferner wird, wenn M' in dieser Ebene liegt, oder allgemeiner, wenn es einer Kurve angehört, die in M von der Ebene oskuliert wird, der Abstand h null oder infinitesimal von mindestens dritter Ordnung, und es muß daher der Zähler des Ausdrucks (6) verschwinden. Also sind die oskulierenden Geraden Tangenten aller Kurven der Fläche, die im Punkte M als oskulierende Ebene die Tangentialebene zulassen. Insbesondere hat der Schnitt der Fläche mit der Tangentialebene zwei durch M hindurchgehende Zweige, die in M die oskulierenden Geraden berühren. M ist also in dieser Schnittkurve ein Doppelpunkt. Umgekehrt wird, so oft eine Kurve der Fläche eine oskulierende Gerade berührt, h von einer höheren Ordnung als der zweiten, und die Kurve wird daher von der Tangentialebene oskuliert oder (§ 646) ihre Flexion ist in dem betrachteten Punkte null. Endlich wollen wir bemerken, daß, falls die Funktion $rt - s^2$ stetig ist, die elliptischen Punkte und die hyperbolischen Punkte Regionen der Fläche erfüllen, die in Linien aneinandergrenzen, welche von den parabolischen Punkten gebildet werden. Die letzteren Punkte bilden (vgl. § 604) den Schnitt der gegebenen Fläche mit der Fläche $rt - s^2 = 0$.

664. Dupinsche Indikatrix. Um mehr aus der Nähe zu sehen, was in der Umgebung der beiden Arten von Punkten stattfindet, wollen wir den Anfangspunkt nach M verlegen und die z-Achse normal zur Fläche richten. Dadurch wird das Vorzeichen von $rt - s^2$ nicht geändert, da wir gesehen haben, daß dieses Zeichen geometrische Verhältnisse charakterisiert, die von der Wahl der Achsen unabhängig sind. In unserm Falle ist jetzt $p = 0$, $q = 0$, und die Fläche verhält sich in der Umgebung von M wie das Paraboloid $z = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2)$, welches elliptisch oder hyperbolisch ist, je nachdem man hat $rt - s^2 > 0$ oder $rt - s^2 < 0$. Die oskulierenden Geraden sind gerade diejenigen beiden imaginären oder reellen geradlinigen Erzeugenden des Paraboloids, welche in der Ebene $z = 0$ liegen. Wenn ferner $rt - s^2 = 0$ ist, so ist M ein parabolischer Punkt, und die Fläche verhält sich in seiner Umgebung wie ein parabolischer Zylinder. Wir wollen jetzt die Fläche mit zwei Ebenen $z = \pm l$ schneiden, die parallel und unendlich benachbart zur Tangentialebene sind. Die Gleichung des Schnittes ist

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = \pm 2l$$

und stellt ein Paar von Ellipsen dar (eine reelle und eine imaginäre) oder ein Paar komplementärer Hyperbeln, je nachdem der Punkt M elliptisch oder hyperbolisch ist. Wir wollen den Schnitt auf die Tangentialebene projizieren und ihn uns vom Mittelpunkt aus dilatiert denken, bis seine Gleichung $rx^2 + 2sxy + ty^2 = \pm 1$ wird. Der reelle Teil dieses Paares von Kegelschnitten heißt die Dupinsche

Indikatrix: sie wird von jedem Durchmesser in zwei reellen Punkten getroffen und läßt als imaginäre oder reelle Asymptoten die oskulierenden Geraden zu.

665. Bemerkenswerte Kurven. Unter allen Linien, die sich auf einer Fläche zeichnen lassen, sind besonders bemerkenswert die *Asymptotenlinien.* Es sind das solche Kurven, die in jedem ihrer Punkte eine oskulierende Gerade berühren. Eine Asymptotenlinie kann man sich von einem Punkte M erzeugt denken, der längs einer solchen Geraden bis M' fortrückt, um sich weiter längs der analogen Geraden, die durch M' hindurchgeht, bis M'' zu bewegen, u. s. w. Wenn sich unser Punkt, anstatt successiv längs der oskulierenden Geraden, d. h. tangential zu den Asymptoten der Dupinschen Indikatrix, fortzurücken, immer tangential zu den Achsen der Indikatrix bewegt, so heißt die von ihm erzeugte Kurve eine *Krümmungslinie.* Jede Fläche ist also bedeckt von einer zweifachen Schar von Krümmungslinien, die immer reell sind. Durch jeden Punkt der Fläche gehen, unter rechtem Winkel sich schneidend, eine Linie der einen und eine der andern Schar hindurch. Es gehen auch, durch jeden hyperbolischen Punkt, zwei Asymptotenlinien hindurch, die gegen jede der beiden Krümmungslinien gleiche Neigung haben und miteinander im allgemeinen einen schiefen Winkel bilden. Nach einer in § 663 gemachten Bemerkung sind die oskulierenden Ebenen einer Asymptotenlinie die Ebenen, welche die Fläche in den Punkten dieser Linie berühren, wenn nicht beständig $1/\varrho = 0$ ist, in welchem Falle die Linie eine Gerade ist (§ 639) und sich immer als oskuliert von den Tangentialebenen betrachten läßt (§ 640). Bei den Asymptotenlinien liegt also in jedem ihrer Punkte die Hauptnormale in der Tangentialebene der Fläche. Dagegen gehen durch jeden Punkt einer Fläche unendlich viele Kurven, die sogenannten *geodätischen Linien*, welche als Hauptnormale die Normale der Fläche haben. Im folgenden werden wir sehen, daß der kürzeste Weg zwischen zwei (nicht zu weit entfernten) Punkten einer Fläche gerade durch den sie verbindenden Bogen einer geodätischen Linie bezeichnet wird. Offenbar ist eine Gerade geodätische Linie und Asymptotenlinie auf jeder Fläche, da jede ihrer Normalen als Hauptnormale betrachtet werden kann.

Regelflächen.

666. Wenn eine Gerade sich im Raume bewegt, indem sie successiv eine einfache Unendlichkeit von Lagen annimmt, so erzeugt sie eine Regelfläche. Wir fixieren die Gerade in der Lage g und betrachten eine zweite g', welche wir dann in g übergehen lassen werden. Das gemeinsame Lot von g und g' trifft g in einem Punkte, der gleichzeitig mit g' beweglich ist und einer Grenzlage Q zustreben kann, falls g' in g übergeht. Der Punkt Q heißt der Zentralpunkt der Erzeugenden. Wenn in Bezug auf den infinitesimalen Bogen QQ' des Ortes der Zentralpunkte der Abstand h der zugehörigen Erzeugenden von erster Ordnung ist, wie es im allgemeinen zutrifft, so heißt die Fläche windschief, und die Kurve (Q) ist ihre Striktionslinie. Im entgegengesetzten Falle nennt man die Fläche abwickelbar (developpabel), und (Q) ist ihre Rückkehrkante.

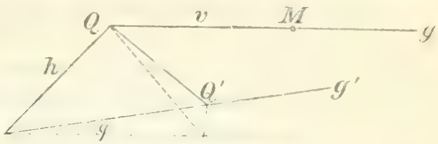

Fig. 84.

667. Es seien a, b, c die Richtungskosinus von g und x, y, z die Koordinaten eines beliebigen Punktes dieser Geraden. Aus der analytischen Geometrie ist uns bekannt, daß der Winkel φ zwischen g und g' durch die Formel $\sin^2\varphi = \Sigma(b\delta c - c\delta b)^2$ ausgedrückt wird, wobei das Zeichen δ die Variationen anzeigt, welche die verschiedenen Größen beim Übergange von g zu g' erfahren. Nun ist h die Projektion der vom Punkte (x, y, z) nach dem Punkte $(x + \delta x,\ y + \delta y,\ z + \delta z)$ hinführenden geradlinigen Strecke auf das gemeinsame Lot von g und g'; ferner sind die Richtungskosinus des gemeinsamen Lotes proportional zu $b\delta c - c\delta b,\ c\delta a - a\delta c,\ a\delta b - b\delta a$. Offenbar hat man also

$$h = \sum \frac{b\delta c - c\delta b}{\sin\varphi}\,\delta x = \frac{1}{\sin\varphi}\begin{vmatrix} a & \delta a & \delta x \\ b & \delta b & \delta y \\ c & \delta c & \delta z \end{vmatrix}$$

oder in kürzerer Form $h\sin\varphi = |a, \delta a, \delta x|$. Daraus folgt, wenn man auf beiden Seiten die Infinitesimalen von höherer als dritter Ordnung fortläßt,

$$h\varphi = |a, da, dx| + \tfrac{1}{2}|a, da, d^2x| + \tfrac{1}{2}|a, d^2a, dx| + \cdots.$$

Soll h von höherer als erster Ordnung sein, so ist notwendig und hinreichend: $|a, da, dx| = 0$. Dies ist also die *notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die betrachtete Fläche abwickelbar ist;* und es ist von Wichtigkeit, zu bemerken, daß diese Bedingung ungeändert bleibt, wenn a, b, c nicht die Richtungskosinus selbst, sondern zu diesen Kosinus proportionale Größen sind. Man beachte, daß, falls die genannte Bedingung erfüllt ist, in dem Ausdruck von $h\varphi$ auch die Glieder dritter Ordnung verschwinden, da

$$|a, da, d^2x| + |a, d^2a, dx| = d|a, da, dx|$$

ist. Bei einer abwickelbaren Fläche ist also der Abstand zwischen zwei unendlich benachbarten Erzeugenden infinitesimal von wenigstens dritter Ordnung in Bezug auf den entsprechenden Bogen der Rückkehrkante.

668. Dies vorausgeschickt liefert uns die Theorie der gewundenen Kurven sofort ein Beispiel abwickelbarer Flächen. Es ist in der Tat evident, daß der Ort der Tangenten einer gewundenen Kurve eine abwickelbare Fläche ist, die als Rückkehrkante die betrachtete Kurve zuläßt. Wenn nämlich (x, y, z) ein Punkt der Kurve ist, so sind die Elemente der dritten Vertikalreihe in der Determinante $[a, da, dx]$ proportional zu denen der ersten (§ 630). Umgekehrt kann man, wenn $[a, da, dx] = 0$ ist, die Punkte (x, y, z), falls es nötig ist, durch andere $(x + at,\ y + bt,\ z + ct)$ ersetzen derart, daß die Tangenten des Ortes dieser Punkte die Erzeugenden der Fläche sind. Hierzu ist es ausreichend, daß die Differentiale der Koordinaten proportional zu a, b, c werden, daß folglich t sich in der Weise bestimmen läßt, daß man hat

$$\frac{dx + t\,da}{a} = \frac{dy + t\,db}{b} = \frac{dz + t\,dc}{c}.$$

Nun ist aber die Bedingung für die Verträglichkeit dieser Gleichungen gerade $[a, da, dx] = 0$. Jede abwickelbare Fläche läßt sich also betrachten als der Ort der Tangenten einer gewundenen Kurve. Von dieser Eigenschaft können wir uns auch Rechenschaft geben, indem wir folgendes bemerken. Legt man durch $\mathfrak{g}$ die Parallelebene zu $\mathfrak{g}'$, so hat Q' von der genannten Ebene den Abstand h; und weil dieser Abstand infinitesimal von dritter Ordnung ist, so wird im allgemeinen die so konstruierte Ebene (§ 642) mit derjenigen zusammenfallen, welche die Rückkehrkante im Punkte Q oskuliert. Um ferner zu beweisen, daß $\mathfrak{g}$ die Tangente dieser Rückkehrkante ist, braucht man nur zu zeigen, daß der Abstand zwischen $\mathfrak{g}$ und der Projektion von Q' auf die oskulierende Ebene von höherer als erster Ordnung ist. Da nun dieser Abstand gleich dem Produkt aus QQ' und einem infinitesimalen Winkel ist, so ist das Theorem bewiesen.

669. Wir wollen jetzt annehmen, x, y, z seien die Koordinaten des Zentralpunktes Q, und uns die Aufgabe stellen, die Tangentialebene in einem beliebigen Punkte M einer Regelfläche zu bestimmen. Die Erzeugende $\mathfrak{g}$ wird bestimmt sein durch die Koordinaten x, y, z und durch ihre eigenen Richtungskosinus. Diese hängen von einer einzigen Veränderlichen u ab, die der Bogen der Rückkehrkante oder der Striktionslinie, von einem beliebig auf der Kurve fixierten Anfangspunkte A gerechnet, sein kann. Ein Punkt M wird dann auf der zugehörigen Erzeugenden bestimmt sein durch seine Entfernung v von dem Zentralpunkt. Es hängen also die Koordinaten von M von den beiden Parametern u und v in folgender Weise ab:

$$X = x + av, \quad Y = y + bv, \quad Z = z + cv.$$

Außerdem ist

$$(7) \qquad \frac{\partial X}{\partial u} = \frac{dx}{du} + v\frac{da}{du} \text{ u. s. w.}; \quad \frac{\partial X}{\partial v} = a, \quad \frac{\partial Y}{\partial v} = b, \quad \frac{\partial Z}{\partial v} = c.$$

Wenn die Fläche abwickelbar ist, so hat man $\frac{dx}{du} = a$, $\frac{da}{du} = \frac{\lambda}{\varrho}$ u. s. w., und die letzten Formeln werden

$$\frac{\partial X}{\partial u} = a + \frac{\lambda v}{\varrho}, \quad \frac{\partial Y}{\partial u} = b + \frac{\mu v}{\varrho}, \quad \frac{\partial Z}{\partial u} = c + \frac{\nu v}{\varrho};$$

mithin (§ 660) sind die Richtungskosinus $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ der Flächennormale im Punkte M proportional zu den Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix},$$

d. h. zu den Kosinus α, β, γ der Binormale. Wie man sieht, sind $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ unabhängig von v. Also berührt die Tangentialebene in einem Punkte einer abwickelbaren Fläche die Fläche längs der ganzen Erzeugenden.

670. Im Falle einer windschiefen Regelfläche sind $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ proportional zu den Größen

$$b(dz + v\,dc) - c(dy + v\,db) = (b\,dz - c\,dy) + v(b\,dc - c\,db) \text{ u. s. w.}$$

Inzwischen hat man, wenn α, β, γ immer noch die Richtungskosinus des gemeinsamen Lotes von g und g′ bedeuten,

$$\frac{\alpha}{b\,dc - c\,db} = \frac{\beta}{c\,da - a\,dc} = \frac{\gamma}{a\,db - b\,da} = \frac{1}{\varphi}$$

und analog, wenn λ, μ, ν die Richtungskosinus des gemeinsamen Lotes von g und QQ' sind,

$$\frac{\lambda}{b\,dz - c\,dy} = \frac{\mu}{c\,dx - a\,dz} = \frac{\nu}{a\,dy - b\,dx} = \frac{1}{h}.$$

Setzt man also $h = R\varphi$, so sind die Kosinus $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ proportional zu den Größen $\lambda + \frac{v}{R}\alpha$, $\mu + \frac{v}{R}\beta$, $\nu + \frac{v}{R}\gamma$ und fallen für $v = 0$ mit λ, μ, ν zusammen. Die den Werten 0 und v des Parameters v entsprechenden Normalen bilden demnach miteinander einen Winkel ψ, der durch jede der Gleichungen

$$\cos\psi = \mathfrak{L}\lambda + \mathfrak{M}\mu + \mathfrak{N}\nu, \quad \sin\psi = \mathfrak{L}\alpha + \mathfrak{M}\beta + \mathfrak{N}\gamma$$

definiert ist. Auf Grund der ersten hat man

$$\mathfrak{L} = \left(\lambda + \frac{v}{R}\alpha\right)\cos\psi, \quad \mathfrak{M} = \left(\mu + \frac{v}{R}\beta\right)\cos\psi, \quad \mathfrak{N} = \left(\nu + \frac{v}{R}\gamma\right)\cos\psi;$$

ferner erhält man durch Multiplikation mit α, β, γ und Addition $\sin\psi = \frac{v}{R}\cos\psi$, d. h.

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{v}{R}.$$

Diese von Chasles herrührende Formel läßt folgendes erkennen: Wenn der Berührungspunkt, von der Striktionslinie ausgehend, eine Erzeugende durchläuft, so dreht sich die Tangentialebene der Fläche um einen Winkel, dessen trigonometrische Tangente proportional zu dem vom Punkte durchlaufenen Wege ist. Man bemerke, daß es zur Kenntnis der unendlich vielen Tangentialebenen einer Regelfläche längs einer gegebenen Erzeugenden genügt, den Wert von R zu haben, der aus diesem Grunde der Verteilungsparameter der Tangentialebenen heißt. Um das Theorem von Chasles geometrisch zu interpretieren, wollen wir als Achsen der x und der y die Erzeugende $\mathfrak{g}$ und das gemeinsame Lot von $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}'$ wählen. Die Gleichungen der Normale der Fläche im Punkte M sind $x = v$, $y = z\operatorname{tg}\psi$, und die Formel von Chasles wird daher $xz = Ry$. Also bilden die Normalen einer windschiefen Regelfläche längs einer Erzeugenden ein hyperbolisches Paraboloid.

671. Wir wollen zu den abwickelbaren Flächen zurückkehren, um folgende Bemerkung zu machen. Wenn die Kurve (M) die Erzeugenden unter rechtem Winkel trifft oder, wie man zu sagen pflegt, eine orthogonale Trajektorie der Erzeugenden ist, so ist die Orthogonalitätsbedingung $\Sigma\alpha dX = 0$ erfüllt. Nun hat man aber auf Grund von (7)

$$dX = \left(\alpha + \frac{\lambda v}{\varrho}\right)du + \alpha dv \quad \text{u. s. w.},$$

sodaß $\Sigma\alpha dX = d(u+v)$ ist und die genannte Bedingung sich auf $u + v = \text{Const.}$, d. h. Bogen $AQ + QM = \text{Const.}$, reduziert. Daraus folgt, daß zwei beliebige orthogonale Trajektorien auf den unendlich vielen Erzeugenden Abschnitte ausschneiden, die gleich dem Bogen sind, den sie auf der Rückkehrkante bestimmen. Hat man also einen unausdehnbaren Faden, der in einem Punkte A der Rückkehrkante befestigt und längs derselben gespannt ist, so wird, wenn man ihn allmählich abwickelt und ihn dabei immer im Raume gespannt hält, jeder seiner Punkte eine orthogonale Trajektorie (M) beschreiben. Aus diesem Grunde bezeichnet man auch die Kurven (M) als Evolventen der Rückkehrkante, die übrigens eine beliebige Kurve sein kann.

672. Umgekehrt heißt die Rückkehrkante eine Evolute jeder Kurve (M), da (wie bei den ebenen Kurven) ihre Tangenten Normalen jeder Kurve (M) sind. Wir wollen alles auf das Fundamentaltrieder einer dieser Kurven beziehen und untersuchen, was für einer Bedingung eine Normale genügen muß, um eine abwickelbare Fläche erzeugen zu können. Bildet die Normale, welche man betrachten will, mit der Hauptnormale den Winkel φ, so ist ihre Richtung definiert durch die Kosinus

$$l = \alpha \sin\varphi + \lambda \cos\varphi, \quad m = \beta \sin\varphi + \mu \cos\varphi, \quad n = \gamma \sin\varphi + \nu \cos\varphi .$$

Dagegen sind

$$l' = \alpha \cos\varphi - \lambda \sin\varphi, \quad m' = \beta \cos\varphi - \mu \sin\varphi, \quad n' = \gamma \cos\varphi - \nu \sin\varphi$$

die Richtungskosinus einer zweiten Normale, die zusammen mit der ersten und der Tangente ein orthogonales Tripel bildet, sodaß

$$\begin{vmatrix} a & l' & l \\ b & m' & m \\ c & n' & n \end{vmatrix} = 1$$

ist. Nun haben wir gesehen (§ 667), daß die Bedingung $[l, dl, a] = 0$ notwendig und hinreichend ist, damit die erste Normale eine abwickelbare Fläche erzeuge. Da man aber nach den Frenetschen Formeln (§ 636) hat

$$dl = l'(d\varphi - \eta) - a\,\varepsilon \cos\varphi \quad \text{u. s. w.},$$

so wird die vorstehende Determinante $[l, l', a](d\varphi - \eta) = \eta - d\varphi$, und die gesuchte Bedingung ist daher

$$(8) \qquad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\tau} .$$

Die geometrische Bedeutung dieser Bedingung enthüllt sich, wenn man die Drehung ω der betrachteten Normale gegen die Hauptnormale berechnet. Bekanntlich ist (§ 637)

$$\omega \sin\varphi = \Sigma \lambda\, dl = (d\varphi - \eta)\, \Sigma \lambda l' = (\eta - d\varphi) \sin\varphi ,$$

mithin $\omega = \eta - d\varphi$, ein evidentes Resultat. Die Bedingung $\omega = 0$ bedeutet also folgendes: Wenn sich ein Punkt längs einer Kurve bewegt, so erzeugt jede Normale, die sich in der Normalebene (in welcher man sich die Hauptnormale fixiert denkt) derart bewegt, daß sie im Raume senkrecht zu dieser Ebene fortrückt, eine abwickelbare Fläche.

673. Wir wollen zum Schluß noch zwei Sätze beweisen, die sich unmittelbar aus den vorstehenden ableiten lassen:

a) Auf Grund der letzten Bemerkung geht das Fortrücken der Erzeugenden in der Weise vor sich, daß die oskulierende Ebene der Rückkehrkante immer senkrecht zur Normalebene von (M) ist. Daraus folgt, daß diese gleichzeitig die rektifizierende Ebene der Rückkehrkante ist. Mit andern Worten, die Normalebene der Evolvente fällt mit der rektifizierenden Ebene der Evolute zusammen.

b) Hat man eine Funktion φ gefunden, die der Gleichung (8) genügt, so erhält man unendlich viele andere durch Addition einer willkürlichen Konstanten. Daraus geht folgendes hervor: Läßt man die Erzeugenden einer abwickelbaren Fläche um einen und denselben willkürlichen Winkel um eine ihrer orthogonalen Trajektorien sich drehen, so hören sie nicht auf eine abwickelbare Fläche zu bilden. Die Rückkehrkanten aller dieser abwickelbaren Flächen sind gerade die unendlich vielen Evoluten der betrachteten Trajektorie.

Enveloppen.

674. Man betrachte die Schar der Flächen, welche durch die Gleichung $f(x, y, z, a) = 0$ für die unendlich vielen Werte des Parameters a dargestellt werden. Eine beliebige von ihnen, die durch einen speziellen Wert a des Parameters charakterisiert ist, wird von einer zweiten, die durch den Wert $a + h$ charakterisiert ist, längs einer gewissen Kurve geschnitten. Diese Kurve kann, wenn h nach Null konvergiert, einer Grenzlage auf der ersten Fläche zustreben. In dieser Lage heißt sie die Charakteristik der entsprechenden Fläche in der betrachteten Schar. Der Ort der Charakteristiken aller Flächen der Schar heißt die Enveloppe dieser Flächen. Es kann auch vorkommen, daß die Flächen (a) und $(a + h)$ sich nicht schneiden, wie klein auch h sein mag. Deswegen kann es aber doch auf der Fläche (a) Punkte stärkster unendlicher Annäherung an die Fläche $(a + h)$ geben (vgl. § 619), d. h. Punkte, die abgesehen von Infinitesimalen von höherer Ordnung als h als gemeinsame Punkte der beiden Flächen betrachtet werden dürfen. In diesem Falle ist die Charakteristik der Fläche (a) die Grenze, welcher der Ort dieser Punkte zustrebt, wenn h nach Null konvergiert. Durch analoge Betrachtungen wie die, welche wir in der Ebene angestellt haben, beweist man sofort, daß die Gleichung der Enveloppe durch Elimination von a aus den Gleichungen $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$ erhalten wird. Es ist auch leicht zu zeigen, daß jede Fläche der Schar von der Enveloppenfläche längs ihrer Charakteristik berührt wird. Man braucht in der Tat nur zu beachten, daß die Gleichung der Enveloppe die Gleichung der Flächenschar selbst ist, wenn darin a als Funktion der Koordinaten gedacht wird, die der Gleichung $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$ genügt. Die ersten partiellen Derivierten der linken Seite der Enveloppengleichung sind folglich

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial z},$$

d. h. gerade gleich $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$, wie im Falle eines konstanten a.

675. Beispiel. Ein bemerkenswertes Beispiel einer Enveloppe haben wir bei einer einfachen Unendlichkeit von Ebenen. Die Charakteristik jeder Ebene ist notwendig eine Gerade. Die Enveloppe ist also eine Regelfläche; und da nach dem letzten Theorem diese Fläche von einer einzigen Ebene längs jeder Erzeugenden berührt werden muß, so ist sie abwickelbar. Umgekehrt ist nach dem, was wir in § 669 gesehen haben, jede abwickelbare Fläche die Enveloppe der einfachen Unendlichkeit der oskulierenden Ebenen einer gewissen Kurve. Hiervon ausgehend läßt sich leicht ein wichtiger analytischer Charakter der abwickelbaren Flächen aufdecken. Die Gleichung einer Tangentialebene einer beliebigen Fläche ist

$$Z = pX + qY + (z - px - qy).$$

Damit die Fläche abwickelbar sei, ist es notwendig und hinreichend, daß p, q, $z - px - qy$ von einem einzigen Parameter abhängen. Dazu ist aber erforderlich und hinreichend (§ 578), daß die Jacobische Matrix dieser drei Funktionen lauter verschwindende Minoren zweiter Ordnung hat. Da nun

$$\frac{\partial p}{\partial x} = r, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = s, \quad \frac{\partial}{\partial x}(z - px - qy) = -(rx + sy),$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = s, \quad \frac{\partial q}{\partial y} = t, \quad \frac{\partial}{\partial y}(z - px - qy) = -(sx + ty)$$

ist, so lautet die in Rede stehende Matrix

$$\left\| \begin{matrix} r & s & rx + sy \\ s & t & sx + ty \end{matrix} \right\| \quad \text{und ist äquivalent mit} \quad \left\| \begin{matrix} r & s & 0 \\ s & t & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Sollen alle ihre Minoren zweiter Ordnung null sein, so ist dazu notwendig und hinreichend das Verschwinden von $rt - s^2$. Also charakterisiert die Relation $rt - s^2 = 0$ die abwickelbaren Flächen. Mit andern Worten, diese Flächen sind die einzigen, welche aus lauter parabolischen Punkten bestehen (§ 663). Man beachte, daß bei den windschiefen Regelflächen immer $rt - s^2 < 0$ ist, weil durch jeden Punkt sicher eine reelle Asymptotenlinie hindurchgeht, nämlich die geradlinige Erzeugende. Auf den abwickelbaren Flächen fallen die beiden Scharen von Asymptotenlinien in eine zusammen, die Schar der geradlinigen Erzeugenden; es gibt aber außerdem eine isolierte Asymptotenlinie, nämlich die Rückkehrkante. Dies widerspricht nicht dem früher Gesagten, da man leicht konstatieren kann (§ 694, b), daß auf der Rückkehrkante r, s, t unendlich werden.

676. Es werde nunmehr eine zweifach unendliche Schar von Flächen betrachtet, die durch die Gleichung $f(x, y, z, a, b) = 0$ für alle Paare von Werten der Parameter a, b dargestellt werden. Nach

Fixierung einer Fläche S, die einem gegebenen Paare (a_0, b_0) entspricht, wähle man willkürlich eine Funktion φ und setze

$$b = b_0 + \varphi(a) - \varphi(a_0).$$

Man wird auf solche Weise zu dem früheren Fall zurückgeführt und erhält auf S eine besondere Charakteristik, die der gegebenen Funktion φ entspricht. Wählt man nun aber für φ alle möglichen Funktionen, so gehen die unendlich vielen so erhaltenen Charakteristiken alle durch gewisse Punkte von S. In der Tat genügt die einer gegebenen Funktion φ entsprechende Charakteristik der Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b}\varphi'(a) = 0,$$

und es gehören ihr folglich diejenigen Punkte von S an, in welchen man gleichzeitig $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial b} = 0$ hat. Diese Punkte sind, wie man sieht, unabhängig von der Wahl von φ. Man hat also in diesem Falle nicht wie früher auf jeder Fläche eine Linie, sondern vielmehr diskrete Punkte, die beim Variieren der Fläche die Enveloppe der betrachteten Schar bilden. Die Gleichung dieser Enveloppe ergibt sich durch Elimination von a und b aus den Gleichungen

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial b} = 0.$$

Auch in diesem Falle berührt die Enveloppe alle eingehüllten Flächen. Insbesondere läßt sich jede beliebige Fläche als die Enveloppe ihrer Tangentialebenen betrachten.

677. Manchmal ist die Flächenschar gegeben durch die Gleichung $f(x, y, z, a, b, c, \ldots) = 0$, und zwischen den n Parametern hat man ν Relationen $\varphi = 0$, $\psi = 0, \ldots$, wobei $\nu = n - 1$ oder $\nu = n - 2$ ist, je nachdem die Schar einfach oder zweifach unendlich ist. Um alsdann die Gleichung der Enveloppe zu finden, muß man ausdrücken, daß in der Matrix

$$\begin{array}{cccc}
\frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial b} & \frac{\partial f}{\partial c} & \ldots \\[2ex]
\frac{\partial \varphi}{\partial a} & \frac{\partial \varphi}{\partial b} & \frac{\partial \varphi}{\partial c} & \ldots \\[2ex]
\frac{\partial \psi}{\partial a} & \frac{\partial \psi}{\partial b} & \frac{\partial \psi}{\partial c} & \ldots \\[2ex]
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

alle Minoren $(\nu + 1)$-ter Ordnung gleich Null sind. Man erhält auf diese Weise $n - \nu$ Relationen, und die gesuchte Gleichung ergibt sich durch Elimination der n Parameter aus der Gleichung der Flächenschar, den ν gegebenen Relationen zwischen den Parametern und den $n - \nu$ erhaltenen Relationen. Es kann auch vorkommen, daß in der

Gleichung der Flächenschar die Parameter und die Koordinaten nicht explicite vorkommen, d. h. daß die Gleichung in der Form $f(u, v, w, \ldots) = 0$ gegeben ist, wo $u, v, w, \ldots$ Funktionen von x, y, z und den Parametern sind; es ist aber klar, daß in diesem Falle die partiellen Derivierten nach einem Parameter a gebildet werden, indem man z. B. nimmt

$$\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial a} + \cdots \quad \text{u. s. w.}$$

678. Übungen. a) Um die Enveloppe der zu einer gegebenen Fläche $f(x, y, z) = 0$ in Bezug auf ein Zentrum Q homothetischen Flächen zu bestimmen, bemerke man zunächst folgendes. Sind ξ, η, ζ die Koordinaten von Q und setzt man

$$F(t) = f(\xi + t(x - \xi),\ \eta + t(y - \eta),\ \zeta + t(z - \zeta)),$$

so stellt die Gleichung $F(t) = 0$ für jeden Wert von t eine jener Flächen dar, insbesondere für $t = 1$ die gegebene Fläche. Da nun aber die Gleichung der Enveloppe durch Elimination von t aus $F(t) = 0$ und $F'(t) = 0$ entsteht, so sieht man (§ 661), daß die gesuchte Enveloppe der Kegel ist, welcher, vom Scheitel Q aus, der gegebenen Fläche umbeschrieben ist. Gibt man z. B. ein auf seine Achsen bezogenes Ellipsoid und setzt

$$f = -1 + \sum \frac{x^2}{a^2}, \quad f_0 = -1 + \sum \frac{\xi^2}{a^2}, \quad f_1 = -1 + \sum \frac{\xi x}{a^2},$$

so findet man $F(t) = (f + f_0 - 2f_1)t^2 - 2(f_0 - f_1)t + f_0$; und es genügt auszudrücken, daß die Diskriminante dieser Funktion, $ff_0 - f_1^2$, null ist, um die Gleichung des dem Ellipsoid umbeschriebenen Kegels zu finden:

$$\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} - 1\right)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) = \left(\frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} + \frac{\zeta z}{c^2} - 1\right)^2.$$

b) Man nennt Tubus oder Kanalfläche die Enveloppe einer einfachen Unendlichkeit gleich großer Kugeln. Man braucht nur die Gleichung der Kugel

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 = R^2$$

zu derivieren, indem man x, y, z als Funktionen des Bogens der Mittelpunktskurve (des Ortes der Mittelpunkte der eingehüllten Kugeln) betrachtet, um zu erhalten

$$(9) \qquad a(X - x) + b(Y - y) + c(Z - z) = 0$$

und zu erkennen, daß die Charakteristik in der Normalebene der genannten Kurve liegt. Daraus folgt, daß ein Tubus sich betrachten läßt als erzeugt von der Peripherie eines konstanten Kreises, dessen Mittelpunkt in jedem Augenblick senkrecht zur Ebene dieses Kreises fortrückt. Zur Gleichung des Tubus gelangt man, indem man aus den beiden obigen Gleichungen die einzige unabhängige Veränderliche s eliminiert, als deren Funktionen x, y, z, a, b, c vorausgesetzt werden. In ganz ähnlicher Weise verfährt man, um die Enveloppe einer beliebigen einfachen Unendlichkeit von Kugeln zu finden. Vorher hat man auf der rechten Seite von (9) $-R\dfrac{dR}{ds}$ an Stelle von 0 zu setzen. Die Charakteristik ist also im allgemeinen kein größter Kreis der Kugel und nur dann reell, wenn der absolute Betrag von dR/ds die 1 nicht übertrifft. Mit andern Worten, es gibt keine reelle Enveloppe, wenn die Kugel sich rascher vergrößert oder verkleinert als ihr Mittelpunkt fortschreitet. Insbesondere reduziert sich für $R = s +$ Const. die Enveloppe auf eine Kurve, eine Evolvente (§ 671) der Mittelpunktskurve; und die Kugeln verhalten sich (vgl. § 626, f) wie die oskulierenden Kreise einer ebenen Kurve. Dagegen sind die oskulierenden Kugeln einer gewundenen Kurve immer von einer Fläche umhüllt, dem Ort der oskulierenden Kreise dieser Kurve.

c) Wir wollen uns die Aufgabe stellen, die Enveloppe der Ebenen $\alpha x + \beta y + \gamma z = l$ zu finden unter der Voraussetzung, daß der Abstand l mit den Richtungskosinus α, β, γ durch die Relation

$$\frac{\alpha^2}{l^2-a^2} + \frac{\beta^2}{l^2-b^2} + \frac{\gamma^2}{l^2-c^2} = 0 \tag{10}$$

verbunden ist. Hier sind α, β, γ, l die Parameter, und sie genügen der Bedingung (10) und der andern $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Man muß also (§ 677) die Matrix

$$\left\| \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ x & y & z & 1 \\ \dfrac{\alpha}{l^2-a^2} & \dfrac{\beta}{l^2-b^2} & \dfrac{\gamma}{l^2-c^2} & \sigma \end{matrix} \right\|$$

betrachten, wo wir zur Abkürzung

$$\sigma = \frac{l\alpha^2}{(l^2-a^2)^2} + \frac{l\beta^2}{(l^2-b^2)^2} + \frac{l\gamma^2}{(l^2-c^2)^2}$$

gesetzt haben. Mit Hilfe der gewöhnlichen Transformationen kann man die obige Matrix in die folgende überführen:

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{x}{\alpha}\sigma - \dfrac{1}{l^2-a^2} & \dfrac{y}{\beta}\sigma - \dfrac{1}{l^2-b^2} & \dfrac{z}{\gamma}\sigma - \dfrac{1}{l^2-c^2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{l^2-a^2} & \dfrac{1}{l^2-b^2} & \dfrac{1}{l^2-c^2} & \sigma \end{matrix} \right\| .$$

Soll dieselbe lauter verschwindende Minoren dritter Ordnung haben, so muß sein

$$\frac{x}{\alpha}\sigma - \frac{1}{l^2-a^2} = \frac{y}{\beta}\sigma - \frac{1}{l^2-b^2} = \frac{z}{\gamma}\sigma - \frac{1}{l^2-c^2}.$$

Den gemeinsamen Wert dieser drei Größen erhält man, indem man die erste mit α^2, die zweite mit β^2, die dritte mit γ^2 multipliziert und alle drei addiert. Auf solche Weise findet man, wenn man sich an (10) erinnert, $l\sigma$, und es ist daher

$$x = l\alpha + \frac{1}{l^2-a^2}\cdot\frac{\alpha}{\sigma}, \quad y = l\beta + \frac{1}{l^2-b^2}\cdot\frac{\beta}{\sigma}, \quad z = l\gamma + \frac{1}{l^2-c^2}\cdot\frac{\gamma}{\sigma}.$$

Durch Quadrieren und Addieren erhält man noch

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2 + \frac{2l}{\sigma}\sum\frac{\alpha^2}{l^2 - a^2} + \frac{1}{\sigma^2}\sum\frac{\alpha^2}{(l^2 - a^2)^2} = l^2 + \frac{1}{l\sigma}.$$

Mithin kann man schreiben

$$x = \frac{l\alpha}{l^2 - a^2}\left(l^2 - a^2 + \frac{1}{l\sigma}\right) = \frac{l\alpha}{l^2 - a^2}(x^2 + y^2 + z^2 - a^2) \quad \text{u. s. w.},$$

also

$$\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2 - a^2} = \frac{l\alpha}{l^2 - a^2}, \quad \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2 - b^2} = \frac{l\beta}{l^2 - b^2},$$

$$\frac{z}{x^2 + y^2 + z^2 - c^2} = \frac{l\gamma}{l^2 - c^2}.$$

Multipliziert man noch mit x, y, z und addiert, so findet man die Gleichung

$$\sum\frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2 - a^2} = \sum\frac{l\alpha x}{l^2 - a^2} = l^2\sum\frac{\alpha^2}{l^2 - a^2} + \frac{1}{\sigma}\sum\frac{l\alpha^2}{(l^2 - a^2)^2} = 1,$$

die leicht auf folgende einfachere Form reduzierbar ist:

$$\frac{a^2x^2}{x^2 + y^2 + z^2 - a^2} + \frac{b^2y^2}{x^2 + y^2 + z^2 - b^2} + \frac{c^2z^2}{x^2 + y^2 + z^2 - c^2} = 0.$$

Die gesuchte Enveloppe ist also (§ 384, d) die Wellenfläche.

679. Eine nützliche Anwendung der vorhin entwickelten Theorie und insofern von Wichtigkeit, als sie eine Ergänzung zur Kurventheorie liefert, ist die Aufsuchung der Enveloppen der Seitenflächen des Fundamentaltrieders einer beliebigen Kurve. Betrachtet man in jeder der drei Gleichungen

$$\sum a(X - x) = 0, \quad \sum \alpha(X - x) = 0, \quad \sum \lambda(X - x) = 0,$$

welche die Normalebene, die oskulierende Ebene und die rektifizierende Ebene darstellen, $x, y, \ldots, \nu$ als Funktionen des Bogens s, die den bekannten Relationen (§ 638)

$$\frac{dx}{ds} = a, \quad \frac{da}{ds} = \frac{\lambda}{\varrho}, \quad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\lambda}{\tau}, \quad \frac{d\lambda}{ds} = -\frac{a}{\varrho} - \frac{\alpha}{\tau} \quad \text{u. s. w.}$$

genügen, so erhält man durch Derivation bezüglich

$$(11) \quad \sum\lambda(X - x) = \varrho, \quad \sum\lambda(X - x) = 0, \quad \sum l'(X - x) = 0.$$

Dabei ist in der letzten Gleichung gesetzt

$$(12) \quad l' = a\sin\varphi + \alpha\cos\varphi, \quad m' = b\sin\varphi + \beta\cos\varphi, \quad n' = c\sin\varphi + \gamma\cos\varphi$$

mit $\operatorname{tg}\varphi = \tau/\varrho$. Es gilt also folgendes:

a) Wie vorauszusehen war, umhüllen die oskulierenden Ebenen die *Developpable der Tangenten*, d. h. diejenige abwickelbare Fläche, welche als Rückkehrkante die betrachtete Kurve zuläßt.

b) Die Enveloppe der Normalebenen heißt die *Polardeveloppable* und ist der Ort der Achsen der oskulierenden Kreise. Offenbar kann irgend eine Gerade der Normalebene, die eine abwickelbare

Fläche erzeugt, deren Rückkehrkante nur auf der Achse des oskulierenden Kreises berühren. Daraus folgt sofort, daß die Polardeveloppable einer Kurve auch der Ort der Evoluten dieser Kurve ist; und man kann auf Grund einer früheren Bemerkung (§ 673, a) hinzufügen, daß die genannten Evoluten geodätische Linien der Polardeveloppablen sind. Um die Rückkehrkante dieser Fläche zu bestimmen, muß man noch die erste der Gleichungen (11) derivieren. Man gelangt so zu dem System

$$\sum a(X-x)=0, \quad \sum \lambda(X-x)=\varrho, \quad \sum \alpha(X-x)=-\tau\frac{d\varrho}{ds},$$

welches (§ 650) für X, Y, Z die Werte ξ, η, ζ liefert, die Koordinaten des Mittelpunkts der oskulierenden Kugel. Also ist die Rückkehrkante der Polardeveloppablen der Ort der Mittelpunkte der oskulierenden Kugeln.

c) Endlich heißt die von den rektifizierenden Ebenen eingehüllte Fläche die *rektifizierende Developpable*. Sie enthält die Kurve. Diese trifft die Erzeugenden unter einem Winkel, der im allgemeinen variabel ist und einzig von dem Verhältnis ihrer Krümmungen abhängt. Auf jener Fläche ist die betrachtete Kurve offenbar eine geodätische Linie. Will man ferner, um die Rückkehrkante der rektifizierenden Developpablen einer Kurve zu bestimmen, den Abschnitt t kennen, der von dieser Kurve auf der Erzeugenden, von der Rückkehrkante aus gerechnet, abgegrenzt wird, so muß man die dritte Gleichung (11) derivieren. Beachtet man, daß, wenn l, m, n die Richtungskosinus der Erzeugenden sind, nach (12) $dl' = l\,d\varphi$, $dm' = m\,d\varphi$, $dn' = n\,d\varphi$ ist, so erhält man durch jene Derivation

$$\frac{d\varphi}{ds}\sum l(X-x)=\sum l'a=\sin\varphi,$$

d. h. $t\,d\varphi = \sin\varphi\cdot ds$. Auf diese Weise wird u. a. klar, weshalb nur die zylindrischen Schraubenlinien (§ 655, c) zylindrische rektifizierende Flächen zulassen.

Krümmung.

680. Theorem von Meusnier. Wir wollen das Studium der Flexion der auf einer Fläche gezogenen Kurven in Angriff nehmen, und zwar betrachten wir in einem Punkte M eine Kurve, deren Tangente die Richtung (a, b, c) hat, und deren Hauptnormale mit der Flächennormale den Winkel φ bildet. Ein Punkt M' der Kurve, der zu M unendlich benachbart ist, möge sich in P auf die Tangentialebene projizieren und in Q auf die Tangente. Vernachlässigt man die Infinitesimalen von höherer als zweiter Ordnung, so kann man (§ 645) den Punkt M' als in der oskulierenden Ebene liegend betrachten, sodaß $M'Q$ parallel zur Hauptnormale wird, wie $M'P$ parallel zur Flächennormale in M ist. Es ist also in dem Dreieck $M'PQ$ der Winkel M' gleich φ, die Seite $M'P$ hat (§ 663) die Länge

$$h = \frac{r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2}{2\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

und die Seite $M'Q$ ist (§ 643) gleich $d\sigma^2/2\varrho$, wenn man mit $d\sigma$ das Differential bezeichnet, durch welches die Länge des Bogens MM' ersetzbar ist. Setzt man die angegebenen Werte in die Relation $M'P = M'Q \cdot \cos\varphi$ ein, so erhält man

$$(13)\qquad \frac{\cos\varphi}{\varrho} = \frac{ra^2 + 2sab + tb^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

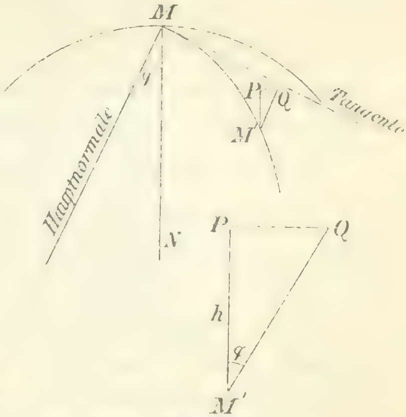

Fig. 85.

Wir wollen jetzt alle Kurven auf der Fläche betrachten, die einander in M berühren, und unter ihnen diejenige auszeichnen, welche in der durch die gemeinsame Tangente (a, b, c) und die Flächennormale bestimmten Ebene liegt und ein Normalschnitt heißt. Für alle diese Kurven hat die rechte Seite von (13) einen einzigen Wert, und man kann daher dasselbe von der linken Seite sagen. Daraus folgt, wenn ϱ_0 der Krümmungsradius des Normalschnitts ist,

$$\frac{\cos\varphi}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_0}, \quad \text{d. h. } \varrho = \varrho_0 \cos\varphi,$$

vorausgesetzt, daß ϱ_0 endlich ist. Man erhält also das Krümmungszentrum einer beliebigen Kurve der Fläche in einem Punkte M, indem man auf die oskulierende Ebene das Krümmungszentrum desjenigen Normalschnittes projiziert, der die Kurve in M berührt.

681. Beispiele. a) Auf der Kugel sind die Normalschnitte größte Kreise, und der Mittelpunkt der Kugel ist ihr gemeinsames Krümmungszentrum. Daraus folgt bei Anwendung des Theorems von Meusnier, daß das Krümmungszentrum in einem Punkt einer sphärischen Kurve die Projektion des Mittelpunkts der Kugel auf diejenige Ebene ist, welche die Kurve in dem betrachteten Punkte oskuliert. Diese Eigenschaft ergibt sich auch aus dem Umstand (§ 650), daß bei einer beliebigen Kurve der oskulierende Kreis der Schnitt der oskulierenden Kugel mit der oskulierenden Ebene ist.

b) Auf einer Rotationsfläche sind die Parallelkreise im allgemeinen schiefe Schnitte. Ihre Krümmungszentra gehören der Rotationsachse an; und da ihre Ebenen senkrecht zu dieser Achse sind, so gehören auch die

Krümmungszentra der die Parallelkreise berührenden Normalschnitte der Rotationsachse an. Folglich hat der ebene Schnitt, der in einem Punkte M einer Rotationsfläche senkrecht zum Meridian ausgeführt ist, sein dem Punkte M entsprechendes Krümmungszentrum auf der Rotationsachse.

682. Für eine Asymptotenlinie und für alle Kurven der Fläche, die sie in einem gegebenen Punkte M berühren, ist die rechte Seite von (13) null, und man hat daher $\frac{\cos\varphi}{\varrho} = 0$. Diese Relation wird von den Asymptotenlinien in jedem Punkte erfüllt, da $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist, während $1/\varrho$ im allgemeinen von Null verschieden ist. Dagegen ist für alle Kurven, die in M eine oskulierende Gerade berühren, aber nicht von der Tangentialebene der Fläche oskuliert werden, φ von $\frac{\pi}{2}$ verschieden, und es muß daher sein $1/\varrho = 0$, wie wir auf anderem Wege in § 663 erkannt haben. Es hat also z. B. jeder Schnitt, der auf der Fläche durch eine Ebene hervorgebracht wird, die nur durch eine der oskulierenden Geraden in M hindurchgeht, in diesem Punkte die Flexion Null. Betrachtet man dagegen den Schnitt, der auf der Fläche durch die Tangentialebene in M hervorgebracht wird, so findet man, daß jeder Zweig des Schnittes in M eine Flexion hat, die gleich zwei Dritteln der Flexion der berührenden Asymptotenlinie in dem genannten Punkte ist. Dieses interessante Theorem von Beltrami[1]) wird in § 704 bewiesen werden. Man sieht, daß das Theorem von Meusnier nicht gültig ist für die Kurven, welche die oskulierenden Geraden berühren, sei es, weil die daraus hervorgehende geometrische Konstruktion nicht mehr anwendbar ist, sei es, weil die unendlich vielen von der Tangentialebene in einem Punkte oskulierten und daselbst einander berührenden Kurven nicht dieselbe Flexion haben.

683. Normalkrümmung und geodätische Krümmung. Die Größe $\frac{\cos\varphi}{\varrho}$, welche die Flexion des die betrachtete Kurve berührenden Normalschnittes mißt, heißt die *Normalkrümmung*, während man $\frac{\sin\varphi}{\varrho}$ mit dem Namen *geodätische Krümmung* belegt. Die Achse des oskulierenden Kreises trifft die Ebene des genannten Schnittes in einem Punkte C_0 (dem Zentrum der Normalkrümmung) und die Tangentialebene in C_1 (dem Zentrum der geodätischen Krümmung). Die beiden Krümmungen werden offenbar ausgedrückt durch die reziproken Werte der Längen MC_0 und MC_1 (der Radien der Normalkrümmung und

1) „Nouvelles Annales de Mathématiques“ 1865, p. 258. Siehe auch meine „Natürliche Geometrie“, deutsche Ausgabe, S. 223.

der geodätischen Krümmung). Man beachte, daß die geodätische Krümmung nichts anderes ist als die Krümmung der Projektion der Kurve auf die Tangentialebene. In der Tat ist auf Grund des Theorems von Meusnier auf dem Zylinder, der die Kurve auf die Tangentialebene projiziert, die Krümmung des Normalschnitts, der diese Kurve berührt, gerade $\frac{\sin\varphi}{\varrho}$. Zu dem Begriff der Normalkrümmung und der geodätischen Krümmung wird man in der natürlichsten Weise geführt, wenn man die Richtungsänderung der Tangente untersucht. Die Drehung (§ 637) derselben gegen die Flächennormale ist

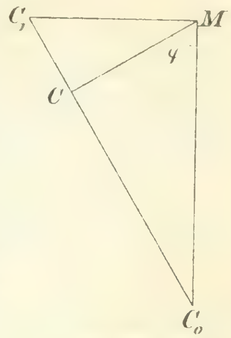

Fig. 86.

$$\omega = \Sigma \mathfrak{L}\, da = \varepsilon \Sigma \mathfrak{L} \lambda = \varepsilon \cos\varphi.$$

Dagegen ist die Drehung derselben Geraden gegen die Senkrechte, die man zu ihr in der Tangentialebene ziehen kann und die ihrer Richtung nach durch die Kosinus $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{N}'$ definiert ist,

$$\omega' = \Sigma \mathfrak{L}' da = \varepsilon \Sigma \mathfrak{L}' \lambda = \varepsilon \sin\varphi.$$

Die Richtungsänderung ε der Tangente im Raume läßt sich also betrachten als Resultante der Drehungen ω und ω', deren Verhältnisse zu ds, nämlich

$$\frac{\omega}{ds} = \frac{\cos\varphi}{\varrho}, \quad \frac{\omega'}{ds} = \frac{\sin\varphi}{\varrho}$$

gerade die Normalkrümmung und die geodätische Krümmung sind. Die erste dient folglich zur Messung der mehr oder weniger großen Biegung der Kurve außerhalb der Fläche, während die zweite dagegen zur Messung der Deviation auf der Fläche dient. Es ist von Wichtigkeit zu bemerken, daß die geodätischen Linien in jedem Punkte eine verschwindende geodätische Krümmung haben, während bei den Asymptotenlinien die Normalkrümmung null ist. Mit andern Worten, wenn ein Punkt sich längs einer geodätischen Linie bewegt, so kann man sagen, daß die Tangente der durchlaufenen Kurve sich immer normal zur Fläche verschiebt. Dagegen vollzieht sich die Richtungsänderung der Tangente einer Asymptotenlinie immer tangential zur Fläche.

684. Die Krümmung eines Normalschnittes ist

$$(14) \qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{ra^2 + 2sab + tb^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Um eine geometrische Vorstellung über das Variieren von ϱ zu erhalten für den Fall, daß der Schnitt sich um einen Punkt M dreht, verlegen wir den Anfangspunkt nach M und richten die z-Achse normal zur Fläche, sodaß $p = q = c = 0$ ist. Setzt man $a = \cos\theta$ und infolgedessen $b = \sin\theta$, so wird die Formel (14)

$$(15) \qquad \frac{1}{\varrho} = r\cos^2\theta + 2s\cos\theta\sin\theta + t\sin^2\theta.$$

Man trage nun auf jeder Tangente, von M aus, eine Strecke ab, die durch die Quadratwurzel aus dem absoluten Betrage des zugehörigen Krümmungsradius gemessen wird. Der Endpunkt des so konstruierten Radiusvektors hat in der Tangentialebene die Koordinaten

$$x = \sqrt{\pm\varrho}\cdot\cos\theta, \quad y = \sqrt{\pm\varrho}\cdot\sin\theta,$$

welche auf Grund von (15) der Gleichung

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = \pm 1$$

genügen. Also (§ 664) variiert in jedem Punkte die Krümmung der Normalschnitte (von einem Schnitt zum andern) im umgekehrten Verhältnis des Quadrates des entsprechenden Durchmessers der Dupinschen Indikatrix. Insbesondere ist sie null bei den durch die oskulierenden Geraden bestimmten Schnitten und erreicht ihren kleinsten und ihren größten Wert bei den Schnitten, welche den Achsen der Indikatrix entsprechen. Diese letzteren Schnitte nennt man die Hauptschnitte. Die Krümmungen $1/\varrho_1$ und $1/\varrho_2$ der Hauptschnitte sind die Hauptkrümmungen.

685. Theorem von Euler. Wenn wir die Figur auf die Achsen der Indikatrix beziehen, so verschwindet in (15) das Glied mit $\cos\theta\sin\theta$; und da für $\theta = 0$ sein muß $\varrho = \varrho_1$, wie für $\theta = \frac{\pi}{2}$ sein muß $\varrho = \varrho_2$, so hat man $1/\varrho_1 = r$, $1/\varrho_2 = t$ und daher

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2\theta}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\theta}{\varrho_2}.$$

Dies ist das Theorem von Euler. Schreibt man die vorstehende Gleichung in der einen oder andern der folgenden Weisen

$$\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1} = \left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1}\right)\sin^2\theta, \quad \frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho} = \left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1}\right)\cos^2\theta,$$

und nimmt, um einen bestimmten Fall zu haben, $1/\varrho_1 < 1/\varrho_2$ an, so zeigt sich sofort, daß man immer hat

$$\frac{1}{\varrho_1} \leq \frac{1}{\varrho} \leq \frac{1}{\varrho_2}.$$

In den elliptischen Punkten sind ϱ_1 und ϱ_2 von demselben Zeichen, d. h. die beiden Hauptkrümmungszentra, C_1 und C_2, befinden sich auf einer und derselben Seite der Tangentialebene. Da nun aus der zuletzt erhaltenen Einschränkung folgt, daß ϱ zwischen ϱ_1 und ϱ_2 enthalten sein muß, so sieht man, daß die Krümmungszentra der Normalschnitte alle auf die Strecke C_1C_2 fallen. In den hyperbolischen Punkten dagegen trennt die Tangentialebene C_1 von C_2, und ϱ kann positiv oder negativ sein. Im ersten Falle hat man $\varrho \geqq \varrho_2 > 0$ und im zweiten $\varrho \leqq \varrho_1 < 0$, sodaß die Krümmungszentra aller Normalschnitte außerhalb der Strecke $C_1 C_2$ zu liegen kommen.

686. Die Theoreme von Euler und von Meusnier zeigen, daß es genügt, die beiden Hauptkrümmungen in einem Punkte M einer Fläche zu kennen, um die Flexion jeder beliebigen Kurve zu kennen, die auf der Fläche durch M gezogen ist, vorausgesetzt, daß die Kurve nicht von der Tangentialebene in M oskuliert wird. Es ist also von Wichtigkeit, daß man die Hauptkrümmungsradien in einem Punkte einer Fläche zu bestimmen weiß. Nach Formel (14) reduziert sich die Frage auf die Bestimmung des Minimums und des Maximums des Trinoms $ra^2 + 2sab + tb^2$. Dabei ist bekannt, daß zwischen den Veränderlichen a und b die Relation

$$(1 + p^2) a^2 + 2pqab + (1 + q^2) b^2 = 1 \tag{16}$$

besteht, die man durch Elimination von c aus $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ und der Orthogonalitätsbedingung $pa + qb - c = 0$ für die Tangente und die Flächennormale erhält. Wiederholt man hier eine unter allgemeineren Bedingungen bereits ausgeführte Rechnung (§ 384, c), so wird man dazu geführt zu setzen

$$\left\{\begin{array}{l} ra + sb = k[(1 + p^2) a + pqb], \\ sa + tb = k[pqa + (1 + q^2) b]. \end{array}\right. \tag{17}$$

Eliminiert man k, so erhält man eine neue Gleichung in a und b, welche zusammen mit (16) zur Bestimmung der Achsenrichtungen der Indikatrix dient, mithin zur Bestimmung der Hauptschnitte. Eliminiert man dagegen a und b, so findet man

$$\begin{vmatrix} r - k(1 + p^2) & s - kpq \\ s - kpq & t - k(1 + q^2) \end{vmatrix} = 0,$$

d. h.

$$rt - s^2 - [(1 + q^2) r - 2pqs + (1 + p^2) t] k + (1 + p^2 + q^2) k^2 = 0. \tag{18}$$

Multipliziert man andererseits die erste der Gleichungen (17) mit a, die zweite mit b und addiert dann beide, so erhält man

$$ra^2 + 2sab + tb^2 = k[(1 + p^2) a^2 + 2pqab + (1 + q^2) b^2] = k.$$

Also stellt k, dividiert durch $\sqrt{1 + p^2 + q^2}$, gerade den kleinsten oder größten Wert von $1/\varrho$ dar; und da die Wurzeln k_1 und k_2 der Gleichung (18) durch die Relationen

$$k_1 + k_2 = \frac{(1 + q^2) r - 2pqs + (1 + p^2) t}{1 + p^2 + q^2}, \quad k_1 k_2 = \frac{rt - s^2}{1 + p^2 + q^2}$$

verbunden sind, so hat man

$$(19)\qquad \frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}=\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{1}{\varrho_1\varrho_2}=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}.$$

Dies sind die Formeln, die zur Ermittelung der Hauptkrümmungen dienen. Setzt man

$$\mathfrak{L}=\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad \mathfrak{M}=\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

so erkennt man durch eine leichte Rechnung, daß man den Formeln (19) auch die kürzere Form

$$(20)\qquad H=\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial y},\quad K=\frac{\partial(\mathfrak{L},\mathfrak{M})}{\partial(x,y)}$$

geben kann, wenn man, wie es üblich ist, mit H und K die Summe und das Produkt der Hauptkrümmungen bezeichnet.

687. Wir wollen uns hier einen Augenblick unterbrechen, um zu bemerken, daß in den Formeln (20) bei den partiellen Derivationen x und y als unabhängige Veränderliche vorausgesetzt werden. Offenbar könnte man z. B. H auch in einer der beiden folgenden Weisen ausdrücken:

$$\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial z},\quad \frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial z}+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x}.$$

Es haben dann aber die partiellen Derivierten in Bezug auf eine gegebene Veränderliche in den drei Ausdrücken verschiedene Bedeutungen. Will man z. B. statt z die Veränderliche y als Funktion der beiden andern betrachten, die als unabhängig vorausgesetzt werden, so hat man, wenn die unter dieser Voraussetzung genommenen Derivierten durch Klammern gekennzeichnet werden,

$$\frac{\partial}{\partial x}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)+p\left(\frac{\partial}{\partial z}\right),\quad \frac{\partial}{\partial y}=q\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

und daher

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial y}=\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x}\right)+p\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial z}\right)+q\left(\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial z}\right)=\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial z}\right).$$

Ebenso ist

$$\frac{\partial(\mathfrak{L},\mathfrak{N})}{\partial(x,y)}=q\frac{\partial((\mathfrak{L},\mathfrak{N}))}{\partial((x,z))}.$$

Eliminiert man die Derivierten von $\mathfrak{M}$ mit Hilfe der Relationen

$$p\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x}+q\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial x}=\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial x},\quad p\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial y}+q\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial y}=\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial y},$$

so findet man

$$\frac{\partial(\mathfrak{L},\mathfrak{M})}{\partial(x,y)}=\frac{1}{q}\frac{\partial(\mathfrak{L},\mathfrak{N})}{\partial(x,y)}=\frac{\partial((\mathfrak{L},\mathfrak{N}))}{\partial((x,z))}.$$

688. Mittlere Krümmung. Man verdankt Sophie Germain den Begriff der mittleren Krümmung. Man versteht darunter das arithmetische Mittel $\frac{1}{2}H$ der Hauptkrümmungen. Um diese Benennung zu rechtfertigen, bemerke man zunächst folgendes: Wenn ϱ und ϱ' die Krümmungsradien von irgend zwei zueinander senkrechten Normalschnitten sind, so hat man nach der Eulerschen Formel

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2\theta}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\theta}{\varrho_2}, \quad \frac{1}{\varrho'} = \frac{\sin^2\theta}{\varrho_1} + \frac{\cos^2\theta}{\varrho_2},$$

mithin nach Addition

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} = H.$$

Wir wollen nunmehr $2n$ Tangenten betrachten, die um M herum gleichmäßig verteilt sind. Man braucht sie sich nur in Paare orthogonaler Tangenten angeordnet zu denken, um sich zu überzeugen, daß, wenn man auch n ins Unendliche zunehmen läßt, das arithmetische Mittel der Normalkrümmungen immer gleich dem Wert von $\frac{1}{2}H$ im Punkte M bleibt.

689. Die Flächen konstanter mittlerer Krümmung erweisen sich bei den Kapillaritätserscheinungen als wichtig und sind von Plateau[1]) experimentell hergestellt worden. Von besonderer Wichtigkeit sind ferner die Flächen mit der mittleren Krümmung Null, d. h. die Flächen, bei welchen in jedem Punkte die Hauptkrümmungsradien gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sind. Dies ist mit der Aussage äquivalent, daß die Dupinsche Indikatrix aus zwei komplementären gleichseitigen Hyperbeln besteht, woraus sich die folgende charakteristische Eigenschaft ergibt: Die Asymptotenlinien schneiden sich in jedem Punkt unter rechtem Winkel. Analytisch sind diese Flächen auf Grund der ersten Formel (19) durch die Differentialgleichung charakterisiert

$$(1 + q^2)\,r - 2pqs + (1 + p^2)\,t = 0.$$

Sie führen den Namen Minimalflächen, weil jede geschlossene Kurve, die auf einer solchen Fläche gezogen ist, ein Flächenstück ausschneidet, welches kleiner ist als das von derselben Kurve auf einer andern durch sie hindurchgehenden Fläche umgrenzte Gebiet. Wir werden das an einer andern Stelle dieses Buches beweisen.

690. Beispiele. a) Ein Beispiel für eine Minimalfläche bietet sich uns sogleich unter den Rotationsflächen. Wir werden sehr bald sehen, daß der durch M hindurchgehende Meridian einer der Hauptschnitte ist; der andere berührt in M den Parallelkreis. Die Hauptkrümmungsradien sind also der Krümmungsradius des Meridians und der Abschnitt (§ 681, b), den die Rotationsachse auf der von M aus gerechneten Normalen bestimmt. Diese Radien müssen nun bei einer Minimalfläche entgegengesetzt ge-

1) Siehe z. B. den „Cours de physique“ von Jamin (3ième éd., t. I, p. 225) oder das 4. Kap. der „Leçons sur la capillarité“ von H. Poincaré. Siehe auch meine „Natürliche Geometrie“, S. 233.

richtet sein, und es muß daher der Meridian seine konvexe Seite der Rotationsachse zukehren. Er muß ferner so beschaffen sein, daß sein Krümmungszentrum in Bezug auf den betrachteten Punkt symmetrisch liegt zu dem Schnittpunkt der Normale mit einer festen Geraden. Wir haben früher gesehen (§ 595, 1), daß diese Eigenschaft der Kettenlinie zukommt, und wir werden im folgenden sehen, daß sie bei andern Kurven nicht stattfinden kann. Also ist das Katenoid (§ 657) die einzige Minimalrotationsfläche.

b) Auch das Helikoid mit Leitebene (§ 655, b) ist eine Minimalfläche. Da nämlich die Erzeugenden die Hauptnormalen von einer zirkularen Schraubenlinie sind und zugleich von unendlich vielen andern (§ 658, b), die auf konzentrischen Zylindern liegen, so ist klar, daß diese Schraubenlinien die eine der beiden Scharen von Asymptotenlinien bilden. Die andre Schar besteht, wie auf jeder Regelfläche, aus den geradlinigen Erzeugenden. Nachdem man auf diese Weise die Orthogonalität der beiden Scharen von Asymptotenlinien konstatiert hat, ist der Nachweis erbracht, daß die Fläche eine Minimalfläche ist. Umgekehrt wird auf jeder Minimalregelfläche die eine Schar von Asymptotenlinien von den orthogonalen Trajektorien der Erzeugenden gebildet, und diese Kurven lassen daher die Erzeugenden als Hauptnormalen zu, woraus folgt (§ 658, b), daß jede von ihnen, weil sie ihre Hauptnormalen mit unendlich vielen andern Kurven gemein hat, eine zirkulare Schraubenlinie ist. Die Fläche (die, wie man sieht, aus den Hauptnormalen einer zirkularen Schraubenlinie besteht) ist also ein Helikoid mit Leitebene. Man gelangt auf diese Weise zu folgendem Theorem von Catalan: Das Helikoid mit Leitebene ist die einzige Minimalregelfläche.

691. Totale Krümmung. Man verdankt Gauß den Begriff der totalen Krümmung. Man versteht darunter das Produkt der Hauptkrümmungen:

$$K = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}. \tag{21}$$

Die Analogie zwischen der totalen Krümmung der Flächen und der Krümmung der ebenen Kurven tritt zu Tage, wenn man sich die Gleichung der Fläche in der Form $f(x, y, z) = 0$ gegeben denkt und K durch die successiven partiellen Derivierten von f auszudrücken versucht. Man erhält dann nämlich auf Grund bekannter Formeln (§ 574)

$$K = -\frac{1}{\Delta f^2} \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix}. \tag{22}$$

Es erscheinen hier die parabolischen Punkte der Flächen (§ 663) als das Analogon der Wendepunkte der ebenen Kurven, und der Unterschied zwischen elliptischen und hyperbolischen Punkten beruht einzig und allein auf dem Vorzeichen von K. Wissenswert ist es, daß ein drittes Krümmungsmaß

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1{}^2}+\frac{1}{\varrho_2{}^2}\right)=\frac{1}{2}H^2-K$$

von Casorati vorgeschlagen worden ist als ein Maß, welches in getreuerer Weise als die andern dem gewöhnlichen Begriff der Krümmung entsprechen soll. Man darf aber den Diskussionen über das zweckdienlichste Maß für die Krümmung einer Fläche keine allzugroße Bedeutung beilegen. Das, worauf es ankommt, ist die Kenntnis der beiden Radien ϱ_1 und ϱ_2 oder statt dessen irgend zweier voneinander unabhängiger Funktionen dieser Radien; und die Funktionen (19), die sich analytisch in der natürlichsten Weise darbieten, sind zugleich auch diejenigen, welche bei den wichtigsten geometrischen und mechanischen Fragen vorkommen. Wir wollen z. B. annehmen, daß eine Fläche gegeben sei, auf die man eine zweite Fläche abwickeln will, die als eine äußerst dünne, biegsame, aber unausdehnbare Membran betrachtet wird. Gauß hat bewiesen[1]), daß eine notwendige Bedingung für die Möglichkeit dieser Abwickelung folgende ist: In entsprechenden Punkten, d. h. in solchen Punkten, die bei der Abwickelung der einen Fläche auf die andere zum Zusammenfallen kommen, müssen die totalen Krümmungen gleich sein. Die totale Krümmung stellt also in jedem Punkte einer Fläche, die man durch bloße Biegung deformiert, etwas Unveränderliches und Bleibendes dar. Aus dem Theorem von Gauß folgt auch, daß die einzigen Flächen, auf denen man (wie in der Ebene und auf der Kugel) eine beliebige Figur ohne Gestaltänderung von einer Stelle nach einer andern verschieben kann, die Flächen mit konstanter totaler Krümmung sind. Man nennt sie kurz Flächen konstanter Krümmung. Die obige Bemerkung ist von großer Wichtigkeit für das Studium der grundlegenden Axiome der Geometrie.

692. Beispiele. a) Bemerkenswerte Beispiele für Flächen konstanter Krümmung werden uns von den Rotationsflächen geliefert. Auf der *Kugel* vom Radius a ist die Krümmung überall $1/a^2$. Es gibt aber noch unendlich viele andre Rotationsflächen[2]), bei denen die totale Krümmung konstant (positiv oder negativ) ist. Die *Pseudosphäre*, d. h. die Fläche, welche von einer um ihre Asymptote rotierenden Traktrix (§ 626, d) erzeugt wird, hat in jedem Punkte die totale Krümmung $-1/a^2$, wenn a die konstante Länge der Tangente zwischen Berührungspunkt und Asymptote ist. Wir wissen in der Tat, daß die Projektion des Krümmungs-

1) Siehe z. B. den „Calcul différentiel" von Boussinesq, p. 298*.

2) Siehe „Natürliche Geometrie", S. 229.

zentrums C_1 auf die Rotationsachse mit T, dem Schnittpunkt der Tangente und der Achse, zusammenfällt, während das andre Krümmungszentrum, C_2, sich auf der Achse selbst befindet. Nun hat man aber in dem rechtwinkligen Dreieck TC_1C_2

$$MC_1 \cdot MC_2 = MT^2, \quad \text{d. h.} \quad \varrho_1\varrho_2 = -a^2.$$

b) Die Flächen, welche sich durch bloße Biegung auf die Ebene ausbreiten lassen, müssen von der Krümmung Null sein, d. h. man muß in allen ihren Punkten $rt - s^2 = 0$ haben. Sie sind also die früher von uns so genannten (§ 675) abwickelbaren Flächen (Developpablen). Nach Casorati würde die einzige Fläche von der Krümmung Null die Ebene sein, während ein Kreiszylinder eine halb so große Krümmung wie eine Kugel von demselben Radius hätte. Wir wollen aber zu dem Gaußschen Begriff zurückkehren und die wichtige Bemerkung machen, daß die geodätischen Linien, insofern sie den kürzesten Weg zwischen zwei Punkten bezeichnen, bei der Abwickelung einer Fläche auf eine andere geodätische Linien bleiben. Breitet man also eine abwickelbare Fläche auf die Ebene aus, so werden ihre geodätischen Linien zu Geraden. Insbesondere wird jede Kurve eine Gerade, wenn man ihre rektifizierende Developpable (§ 679, c) auf die Ebene ausbreitet, d. h. durch jede Kurve läßt sich eine abwickelbare Fläche legen von der Beschaffenheit, daß sich bei Ausbreitung der Fläche auf eine Ebene die Kurve in eine Gerade verwandelt. Die Evoluten der Kurve (§ 679, b) dagegen werden alle zu Geraden, wenn man die Polardeveloppable auf die Ebene ausbreitet. Wir wollen hier noch die Bemerkung machen, daß die Polardeveloppable jeder ebenen Kurve ein Zylinder ist, und daß daher die Evoluten einer solchen Kurve zylindrische Schraubenlinien sind.

693. Übungen. a) Bei einer Fläche zweiten Grades mit Mittelpunkt, die auf ihre Achsen bezogen ist, kann man die totale Krümmung mit Hilfe der Formel (22) berechnen, indem man

$$f = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)$$

nimmt. Zunächst bemerke man, daß die Gleichung der Tangentialebene $\sum \frac{Xx}{a^2} = 1$ ist und daher der Abstand h dieser Ebene vom Mittelpunkt durch die Formel

$$\frac{1}{h^2} = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \Delta f$$

ausgedrückt wird. Die Formel (22) liefert dann

$$K = -\frac{h^4}{a^4b^4c^4}\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & a^2 & 0 & 0 \\ y & 0 & b^2 & 0 \\ z & 0 & 0 & c^2 \end{vmatrix} = \frac{h^4}{a^2b^2c^2}.$$

Es gilt also folgender Satz (vgl. § 595, h): Bei den Flächen zweiten Grades mit Mittelpunkt variiert die totale Krümmung wie die vierte Potenz des Abstandes zwischen Tangentialebene und Mittelpunkt.

b) Stellen wir uns die Aufgabe, die Hauptkrümmungen in einem beliebigen Punkte M einer abwickelbaren Fläche zu berechnen. Die Koordinaten von M kann man in der Form ansetzen

$$X = x + av, \quad Y = y + bv, \quad Z = z + cv,$$

wo a, b, c die Richtungskosinus der Erzeugenden darstellen und x, y, z die Koordinaten des Punktes Q, in welchem die Erzeugende die Rückkehrkante berührt. Diese sechs Größen hängen einzig und allein von dem Bogen u der Rückkehrkante ab, während v, welches von u unabhängig ist, die Länge des Abschnitts QM darstellt. Da nun bekanntlich (§ 669) die Richtungskosinus der Flächennormale mit den Richtungskosinus α, β, γ der Binormale von (Q) übereinstimmen, so sieht man sofort, daß $p = -\alpha/\gamma$, $q = -\beta/\gamma$ ist, woraus folgt

$$\frac{\partial p}{\partial v} = \frac{\partial q}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial u} = -\frac{b}{\tau\gamma^2}, \quad \frac{\partial q}{\partial u} = \frac{a}{\tau\gamma^2},$$

d. h.

$$ra + sb = sa + tb = 0, \quad r\lambda + s\mu = -\frac{\varrho b}{\tau v \gamma^2}, \quad s\lambda + t\mu = \frac{\varrho a}{\tau v \gamma^2},$$

mithin

$$r = -\frac{\varrho b^2}{\tau v \gamma^3}, \quad s = \frac{\varrho a b}{\tau v \gamma^3}, \quad t = -\frac{\varrho a^2}{\tau v \gamma^3}.$$

Die Formel (21) gibt $K = 0$. Das war zu erwarten, weil wir schon gesehen haben (§ 675), daß in allen Punkten einer Developpablen $rt - s^2 = 0$ ist, oder auch, weil das Zusammenfallen der beiden Scharen von Asymptotenlinien in die eine Schar der Erzeugenden uns sagt, daß einer der beiden Hauptschnitte in einem beliebigen Punkte M die durch M hindurchgehende Erzeugende ist; denn die Tangenten dieser Schnitte müssen ja die Winkel der oskulierenden Geraden halbieren. Eine der beiden Hauptkrümmungen ist also null. Die andre ist durch die erste Formel (19) gegeben und hat den Wert

$$\frac{1}{R} = -\left[(1-\beta^2)a^2 + 2\alpha\beta ab + (1-\alpha^2)b^2\right]\frac{\varrho}{\tau v \gamma^2} = -(1 - c^2 - \nu^2)\frac{\varrho}{\tau v \gamma^2} = -\frac{\varrho}{\tau v}.$$

Hiernach ist $R = -v \operatorname{tg} \varphi$, wobei φ der Winkel ist, um den in einem bereits definierten Sinne (§ 679) die Tangente der Rückkehrkante sich drehen muß, wenn sie mit der Erzeugenden der rektifizierenden Developpablen zusammenfallen soll. Da die Länge R im positiven Sinne der Binormale aufgetragen wird, so sieht man, daß die Zentra der Normalkrümmung aller orthogonalen Trajektorien der Erzeugenden einer abwickelbaren Fläche auf der rektifizierenden Developpablen der Rückkehrkante liegen. Zu demselben Schluß gelangt man auch durch die Bemerkung, daß die Erzeugende der rektifizierenden Developpablen der Rückkehrkante zu gleicher Zeit (§§ 673, a; 679, b, c) die Achse der oskulierenden Kreise aller orthogonalen Trajektorien ist. Daraus leitet man unter Berufung auf das Theorem von Meusnier ab, daß die genannte Erzeugende die zu der Erzeugenden der ersten Fläche senkrechten Ebenen in den Krümmungszentren der zugehörigen Schnitte längs dieser Erzeugenden trifft.

694. Wir wollen mit einer Verallgemeinerung der Formeln (19) schließen, und zwar wollen wir es so einrichten, daß dieselben unmittelbar auf den Fall anwendbar werden, wo x, y, z als Funktionen von zwei unabhängigen Veränderlichen u, v gegeben sind. Wir erinnern an die Formeln am Schluß von § 660

$$(23)\quad \mathfrak{L} = \frac{1}{\sqrt{ab-c^2}}\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\quad \mathfrak{M} = \frac{1}{\sqrt{ab-c^2}}\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\quad \mathfrak{N} = \frac{1}{\sqrt{ab-c^2}}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},$$

in welchen

$$a = \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2,\quad b = \sum\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2,\quad c = \sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}$$

ist. Da man hat

$$\frac{\partial(\mathfrak{L},\mathfrak{M})}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(\mathfrak{L},\mathfrak{M})}{\partial(u,v)}\cdot\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{\sqrt{ab-c^2}}\cdot\frac{1}{\mathfrak{N}}\,\frac{\partial(\mathfrak{L},\mathfrak{M})}{\partial(u,v)}\quad \text{u. s. w.},$$

so ist nach der zweiten Formel (20)

$$\sqrt{ab-c^2}\cdot K = \frac{1}{\mathfrak{L}}\,\frac{\partial(\mathfrak{M},\mathfrak{N})}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\mathfrak{M}}\,\frac{\partial(\mathfrak{N},\mathfrak{L})}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\mathfrak{N}}\,\frac{\partial(\mathfrak{L},\mathfrak{M})}{\partial(u,v)}.$$

Multipliziert man diese drei Ausdrücke bezüglich mit $\mathfrak{L}^2$, $\mathfrak{M}^2$, $\mathfrak{N}^2$ und addiert, so erhält man

$$(24)\qquad \sqrt{ab-c^2}\cdot K = \mathfrak{L}\,\frac{\partial(\mathfrak{M},\mathfrak{N})}{\partial(u,v)} + \mathfrak{M}\,\frac{\partial(\mathfrak{N},\mathfrak{L})}{\partial(u,v)} + \mathfrak{N}\,\frac{\partial(\mathfrak{L},\mathfrak{M})}{\partial(u,v)}$$

oder

$$\sqrt{ab-c^2}\cdot K = \begin{vmatrix} \mathfrak{L} & \dfrac{\partial\mathfrak{L}}{\partial u} & \dfrac{\partial\mathfrak{L}}{\partial v} \\ \mathfrak{M} & \dfrac{\partial\mathfrak{M}}{\partial u} & \dfrac{\partial\mathfrak{M}}{\partial v} \\ \mathfrak{N} & \dfrac{\partial\mathfrak{N}}{\partial u} & \dfrac{\partial\mathfrak{N}}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Man kann die Formel (24) auch in der Weise transformieren, daß in dem Ausdruck von K explicite die ersten und zweiten partiellen Derivierten von x, y, z nach u, v auftreten. Schreibt man die Formel in der Form

$$(ab-c^2)\,K = \sum\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\,\frac{\partial(\mathfrak{M},\mathfrak{N})}{\partial(u,v)},$$

so erkennt man sofort (§ 29), daß die rechte Seite das Produkt der Matrices

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{Vmatrix},\qquad \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial\mathfrak{L}}{\partial u} & \dfrac{\partial\mathfrak{M}}{\partial u} & \dfrac{\partial\mathfrak{N}}{\partial u} \\ \dfrac{\partial\mathfrak{L}}{\partial v} & \dfrac{\partial\mathfrak{M}}{\partial v} & \dfrac{\partial\mathfrak{N}}{\partial v} \end{Vmatrix}$$

ist. Andererseits findet man, wenn man die Multiplikation ausführt und die Gleichungen beachtet, die sich durch partielle Derivation der Orthogonalitätsbedingungen

$$\sum \mathfrak{L} \frac{\partial x}{\partial u} = 0, \quad \sum \mathfrak{L} \frac{\partial x}{\partial v} = 0$$

ergeben, daß die Elemente der Produktdeterminante folgende sind:

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u} = -\sum \mathfrak{L} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{ab - c^2}},$$

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial v} = -\sum \mathfrak{L} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = -\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{ab - c^2}},$$

$$\sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u} = -\sum \mathfrak{L} \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} = -\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{ab - c^2}},$$

$$\sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial v} = -\sum \mathfrak{L} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -\frac{\mathfrak{B}}{\sqrt{ab - c^2}}.$$

Dabei haben wir zur Abkürzung gesetzt

$$\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{vmatrix};$$

$$\mathfrak{C} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \end{vmatrix}.$$

Es ist also

(25) $$K = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{C}^2}{(ab - c^2)^2}.$$

695. In ähnlicher Weise gehen wir bei der Berechnung von H aus von der ersten Formel (20), indem wir die Vorzeichen der rechten Seite umkehren, damit die Kosinus $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$ mit dem Zeichen genommen sind, welches sich für sie aus (23) für $u = x$, $v = y$ ergibt. Offenbar ist

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} = \frac{\partial (\mathfrak{L}, y)}{\partial (x, y)} - \frac{\partial (\mathfrak{M}, x)}{\partial (x, y)} = \frac{1}{\sqrt{ab - c^2}} \cdot \frac{1}{\mathfrak{N}} \left[\frac{\partial (\mathfrak{L}, y)}{\partial (u, v)} - \frac{\partial (\mathfrak{M}, x)}{\partial (u, v)} \right] \text{ u. s. w.}$$

Mithin läßt sich $\sqrt{ab - c^2} \cdot H$ durch jede der drei Differenzen

$$\frac{\partial (\mathfrak{N}, y)}{\partial (u, v)} - \frac{\partial (\mathfrak{M}, z)}{\partial (u, v)}, \quad \frac{\partial (\mathfrak{L}, z)}{\partial (u, v)} - \frac{\partial (\mathfrak{N}, x)}{\partial (u, v)}, \quad \frac{\partial (\mathfrak{M}, x)}{\partial (u, v)} - \frac{\partial (\mathfrak{L}, y)}{\partial (u, v)},$$

die man bezüglich durch $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ zu dividieren hat, ausdrücken. Daraus folgt, wenn man mit $\mathfrak{L}^2$, $\mathfrak{M}^2$, $\mathfrak{N}^2$ multipliziert und dann addiert,

$$\sqrt{ab-c^2}\cdot H = \sum \mathfrak{L}\left[\frac{\partial(\mathfrak{N}, y)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial(\mathfrak{M}, z)}{\partial(u, v)}\right]$$

oder

$$\sqrt{ab-c^2}\cdot H = \sum\left[\left(\mathfrak{M}\frac{\partial z}{\partial v} - \mathfrak{N}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial u} - \left(\mathfrak{M}\frac{\partial z}{\partial u} - \mathfrak{N}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial v}\right].$$

Inzwischen liefert eine leichte Rechnung

$$\mathfrak{M}\frac{\partial z}{\partial v} - \mathfrak{N}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{ab-c^2}}\left(c\frac{\partial x}{\partial v} - b\frac{\partial x}{\partial u}\right),$$

$$\mathfrak{M}\frac{\partial z}{\partial u} - \mathfrak{N}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{ab-c^2}}\left(a\frac{\partial x}{\partial v} - c\frac{\partial x}{\partial u}\right).$$

Also ist

$$(ab-c^2)H = \sum\left[-b\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial u} - a\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial v} + c\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial u}\right)\right]$$

und endlich

$$H = \frac{\mathfrak{A}b + \mathfrak{B}a - 2\mathfrak{C}c}{(ab-c^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{26}$$

Es ist leicht zu verifizieren, daß die Formeln (25) und (26) sich auf die Formeln (19) reduzieren, wenn man $u = x$, $v = y$ setzt; denn unter dieser Voraussetzung gehen die Funktionen $a, b, c, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ in $1+p^2$, $1+q^2$, pq, r, t, s über.

Bestimmung und Eigenschaften der merkwürdigen Kurven einer Fläche.

696. Krümmungslinien; Nabelpunkte. Zur Bestimmung der Krümmungslinien (§ 665) einer gegebenen Fläche hat man die durch Elimination von k aus (17) hervorgehende Gleichung

$$\frac{(1+p^2)dx + pq\,dy}{r\,dx + s\,dy} = \frac{pq\,dx + (1+q^2)dy}{s\,dx + t\,dy}, \tag{27}$$

d. h.

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{r}{1+p^2} - \frac{s}{pq}\right)\frac{dx^2}{1+q^2} - \left(\frac{t}{1+q^2} - \frac{r}{1+p^2}\right)\frac{dx\,dy}{pq} \\ &\qquad + \left(\frac{s}{pq} - \frac{t}{1+q^2}\right)\frac{dy^2}{1+p^2} = 0. \end{aligned}\right. \tag{28}$$

Denkt man sich p, q, r, s, t durch die unabhängigen Veränderlichen x, y ausgedrückt, so ergeben sich aus (28) zwei Gleichungen

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y), \quad \frac{dy}{dx} = \psi(x, y). \tag{29}$$

Von diesen Gleichungen, die jede für sich betrachtet werden, gelangt man durch ein Verfahren, welches wir am Schlusse dieses Lehrbuchs klar machen werden, zu den Gleichungen von zwei Scharen zur z-Achse paralleler Zylinder, die die Fläche längs ihrer Krümmungslinien schneiden. Man beachte, daß die Gleichung (28) dann und nur dann identisch erfüllt ist, wenn die Koordinaten x, y, z eines Flächenpunktes M auch den beiden Gleichungen

$$\frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2} \tag{30}$$

genügen. In einem solchen Punkte M laufen also unendlich viele Krümmungslinien zusammen. Man nennt derartige Punkte **Nabelpunkte**. Es gibt ihrer im allgemeinen nur eine endliche Anzahl. Sie können aber auch Linien der Fläche erfüllen: das ist der Fall, wenn die Gleichungen (30) sich auf eine einzige reduzieren. Die Unbestimmtheit der Richtung der Tangenten der Krümmungslinien in einem Nabelpunkt kann an nichts anderem liegen, als an der Unbestimmtheit des Achsenpaares der Dupinschen Indikatrix, also daran, daß diese ein Kreis ist. Daraus folgt (§ 664), daß sich die Fläche in der Umgebung der Nabelpunkte wie eine Kugel verhält; denn wenn man die Tangentialebene unendlich wenig verschiebt, sodaß sie senkrecht zur Normale bleibt, so werden auf der Fläche unendlich kleine Kreisschnitte bestimmt. Dieser Umstand läßt sofort erkennen, daß es auf einem Ellipsoid z. B. vier reelle Nabelpunkte gibt. Sie sind die Endpunkte der zu den beiden Scharen von Kreisschnitten konjugierten Durchmesser. Man kann übrigens verifizieren, daß die Bedingungen (30) gerade mit der einen Bedingung $\varrho_1 = \varrho_2$ äquivalent sind; denn aus (19) ergibt sich durch eine leichte Rechnung

$$\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right)^2$$
$$= \frac{(1+p^2)(1+q^2)}{(1+p^2+q^2)^3}\left[(1+p^2+q^2)\left(\frac{r}{1+p^2} - \frac{t}{1+q^2}\right)^2 + p^2q^2\left(\frac{r}{1+p^2} + \frac{t}{1+q^2} - \frac{2s}{pq}\right)^2\right],$$

und man sieht, daß zum Bestehen der Gleichung $\varrho_1 = \varrho_2$ die Bedingungen (30) hinreichend und notwendig sind.

697. Die Normalen, welche längs irgend einer Kurve auf einer Fläche errichtet sind, bilden eine im allgemeinen windschiefe Regelfläche, die man als **Normalenfläche** bezeichnet. Wie viele und welche unter den unendlich vielen Normalenflächen, die durch einen Flächenpunkt hindurchgehen, sind abwickelbar? Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Normale in M eine Developpable erzeugt, wenn M auf der gegebenen Fläche fortrückt, ist (§ 667)

$$\begin{vmatrix} p & dp & dx \\ q & dq & dy \\ -1 & 0 & dz \end{vmatrix} = 0.$$

Die obige Determinante ist gleich

$$\begin{vmatrix} p & dp & dx + pdz \\ q & dq & dy + qdz \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} dx + pdz & dp \\ dy + qdz & dq \end{vmatrix}.$$

Es muß also sein

$$\frac{dx + pdz}{dp} = \frac{dy + qdz}{dq}; \tag{31}$$

aber diese Gleichung ist nicht verschieden von (27), wie man sofort erkennt, wenn man beachtet, daß

$$dz = pdx + qdy, \quad dp = rdx + sdy, \quad dq = sdx + tdy$$

ist. Es gehen also durch jeden Punkt der Fläche zwei abwickelbare Normalenflächen, deren Spuren auf der Fläche gerade die Krümmungslinien sind. Die Rückkehrkanten aller dieser Normalenflächen bilden eine Fläche mit zwei Mänteln, welche man auch als den Ort aller Hauptkrümmungszentra betrachten kann. Diese zweite Fläche ist also im Verhältnis zu der ersten etwas Analoges wie die Evolute einer Kurve[1] im Verhältnis zu der Kurve. Die oben angegebene charakteristische Eigenschaft der Krümmungslinien läßt sich auch folgendermaßen aussprechen: Jede Krümmungslinie ist eine orthogonale Trajektorie der Erzeugenden auf einer Developpablen, die aus Normalen der Fläche besteht, und diese Eigenschaft kommt keinen andern Kurven zu. Hieraus ist, wenn man sich an ein früheres Theorem (§ 673, b) erinnert, leicht folgender Satz abzuleiten: Wenn eine Kurve Krümmungslinie auf einer Fläche ist, so bewahrt sie diesen Charakter auf allen Flächen, welche die gegebene längs der Kurve unter konstantem Winkel schneiden. Daraus folgt insbesondere: Wenn eine Ebene eine Fläche unter konstantem Winkel schneidet, so ist der Schnitt notwendig eine Krümmungslinie; und wenn umgekehrt eine Krümmungslinie eben ist, so schneidet ihre Ebene die Fläche unter konstantem Winkel. Das Gleiche läßt sich allgemeiner für die sphärischen Kurven behaupten, da auf einer Kugel jede Kurve eine Krümmungslinie ist.

698. Formeln von Rodrigue. Die Bedingung dafür, daß ein Punkt (x, y, z) auf einer Fläche eine Krümmungslinie erzeugt, kann man unmittelbar hinschreiben, indem man ausdrückt, daß die Normalebene der betrachteten Kurve mit der rektifizierenden Ebene einer Evolute dieser Kurve zusammenfallen muß (§ 673, a), deren Tangenten Normalen der Fläche sind. Man muß also haben

$$\frac{dx}{d\mathfrak{L}} = \frac{dy}{d\mathfrak{M}} = \frac{dz}{d\mathfrak{N}}. \tag{32}$$

---

1) Wegen der Haupteigenschaften der Evoluten der Flächen siehe „Natürliche Geometrie", S. 217.

Dies sind die Formeln von Rodrigue. Sie reduzieren sich auf eine einzige, wenn man die Orthogonalitätsbedingung

$$\mathfrak{L}\,dx + \mathfrak{M}\,dy + \mathfrak{N}\,dz = 0$$

berücksichtigt. Umgekehrt hat man, wenn die Bedingungen (32) erfüllt sind,

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{L} & d\mathfrak{L} & dx \\ \mathfrak{M} & d\mathfrak{M} & dy \\ \mathfrak{N} & d\mathfrak{N} & dz \end{vmatrix} = 0,$$

d. h. (§ 667) die Normale der Fläche erzeugt eine Developpable, und der Punkt (x, y, z) bewegt sich also auf einer Krümmungslinie. Man kann übrigens die Formeln (32) auch aus der letzten Bedingung gewinnen, weil dieselbe, ins Quadrat erhoben, sich leicht auf die Form

$$(d\mathfrak{N}\,dy - d\mathfrak{M}\,dz)^2 + (d\mathfrak{L}\,dz - d\mathfrak{N}\,dx)^2 + (d\mathfrak{M}\,dx - d\mathfrak{L}\,dy)^2 = 0$$

reduziert und sich dann in die Formeln (32) spaltet. Es ist ferner leicht zu sehen, daß der gemeinsame Wert der Verhältnisse (32), abgesehen vom Vorzeichen, den zugehörigen Hauptkrümmungsradius darstellt. Endlich gelangt man von den Formeln von Rodrigue zu der Bedingung (31), indem man $\mathfrak{L} = -\mathfrak{N}p$, $\mathfrak{M} = -\mathfrak{N}q$ differentiiert und bemerkt, daß $d\mathfrak{L} + p\,d\mathfrak{N}$, $d\mathfrak{M} + q\,d\mathfrak{N}$ und folglich auch $dx + p\,dz$, $dy + q\,dz$ proportional zu dp, dq sind.

699. Beispiele. a) Auf den Rotationsflächen sind die Krümmungslinien die Meridiane und die Parallelkreise. In der Tat liegen die Flächennormalen längs jedes Meridians in der Ebene des Meridians, und die Normalen längs eines Parallelkreises laufen auf der Rotationsachse zusammen. Man braucht, um es noch einfacher einzusehen, nur zu bemerken, daß die Ebene jedes Meridians und Parallelkreises die Fläche unter konstantem Winkel trifft. Hat man übrigens eine der beiden Scharen von Krümmungslinien gefunden, so ist die andere durch die Bedingung bestimmt, daß ihre Linien die der ersten Schar orthogonal durchsetzen müssen. Den beiden Scharen von Krümmungslinien entsprechen die beiden Mäntel der Evolute. Einer von ihnen wird durch Rotation der Evolute des Meridians um die Achse der Fläche erzeugt, und der andere reduziert sich (§ 681, b) auf die Achse selbst. Z. B. bildet ein Katenoid zusammen mit der Rotationsachse die Evolute einer Pseudosphäre.

b) Auf einer abwickelbaren Fläche ist jede Erzeugende eine Krümmungslinie (§ 693, b), weil die Flächennormalen längs einer Erzeugenden in einer Ebene liegen. Läßt man die Erzeugenden um eine ihrer orthogonalen Trajektorien um einen rechten Winkel sich drehen, so werden sie zu Normalen der Fläche und hören andererseits nicht auf (§ 673, b) eine abwickelbare Fläche zu bilden. Man erkennt auf diese Weise direkt, daß die orthogonalen Trajektorien der Erzeugenden die andere Schar von Krümmungslinien bilden. Die Evolute der Fläche hat einen Mantel im Unendlichen, während der andere (§ 693, b) die rektifizierende Developpable der Rückkehrkante ist.

c) Auf der Enveloppe einer einfachen Unendlichkeit von Kugeln sind die Charakteristiken Krümmungslinien; denn (§ 674) längs einer jeden von ihnen sind die Flächennormalen die Radien der eingehüllten Kugel, die im Mittelpunkt C_1 zusammenlaufen. Daraus folgt, daß eins der beiden Hauptkrümmungszentra C_1 ist. Das andre bestimmt man im Falle eines Tubus (§ 678, b) durch die Bemerkung, daß es der Rückkehrkante der Developpablen angehört, die von einer Normale der Mittelpunktskurve erzeugt wird, und daß es folglich (§ 679, b) auf der Achse des oskulierenden Kreises dieser Kurve liegen muß. Die Hauptkrümmungsradien sind also

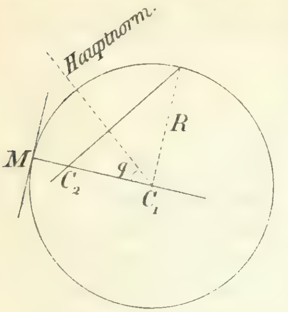

Fig. 87.

$$\varrho_1 = R, \quad \varrho_2 = R - \frac{\varrho}{\cos\varphi},$$

wie sich auch auf rein rechnerischem Wege feststellen läßt, indem man von den Formeln (19) Gebrauch macht und $\Sigma\lambda(X - x) = \cos\varphi$ setzt, oder einfacher $u = s$, $v = \varphi$ setzt und sich der Formeln (25) und (26) bedient. Wir wollen endlich noch bemerken, daß die Evolute eines Tubus aus der Polardeveloppablen der Mittelpunktskurve und aus dieser Kurve selbst besteht.

700. Geodätische Torsion. Die in § 697 gefundene charakteristische Eigenschaft der Krümmungslinien steht in engem Zusammenhang mit dem Begriff der *geodätischen Torsion.* Dieser Begriff wurde von Bertrand eingeführt, um ein Maß für die auf eine Tangente bezügliche Drehungskomponente der Tangentialebene zu liefern, wenn der Berührungspunkt sich in der Richtung der Tangente verschiebt. Es ist natürlich als Maß dieser Drehung das Verhältnis des Winkels,

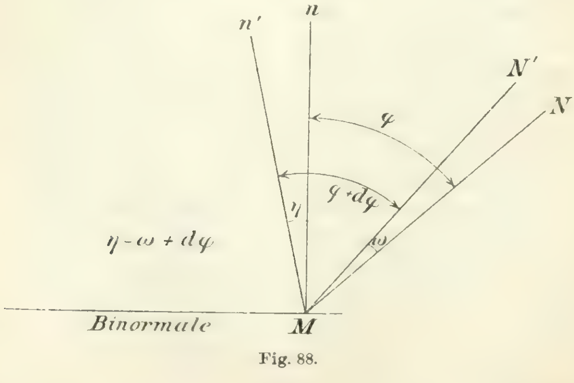

Fig. 88.

um welchen die Projektion der Flächennormale auf die Normalebene sich dreht, zu $d\sigma$ (dem Bogendifferential) anzunehmen. Wir haben bereits gefunden (§ 672), daß dieser Winkel gleich $\eta - d\varphi$ ist. Jenes Verhältnis

$$\tau = \frac{1}{\iota} - \frac{d\varphi}{ds}$$

heißt die geodätische Torsion. Offenbar läßt sich die zu Anfang erwähnte charakteristische Eigenschaft der Krümmungslinien dahin ausdrücken, daß diese Linien in jedem Punkte die geodätische Torsion Null haben. Die geodätische Torsion hat also für die Krümmungslinien eine analoge Bedeutung, wie die Normalkrümmung (§ 683) für die Asymptotenlinien; und beide bleiben in jedem Punkte dieselben für alle Kurven, welche eine gemeinsame Tangente zulassen, während die geodätische Krümmung bei diesen Kurven zugleich mit der Lage der oskulierenden Ebene variiert. Wir werden ferner sehen, daß auch zwischen den Gesetzen, die die Änderungen der Normalkrümmung und der geodätischen Torsion für die unendlich vielen von einem Flächenpunkt ausgehenden Richtungen beherrschen, Analogie besteht. Beide werden nämlich gemessen durch homogene quadratische Funktionen der Kosinus, die diese Richtungen definieren.

701. In der Tat, wenn mit a', b', c' die Richtungskosinus derjenigen Tangente der Fläche bezeichnet werden, die zu der betrachteten Tangente senkrecht ist, so ist klar, daß wegen

$$\mathfrak{L} = \alpha \sin\varphi + \lambda \cos\varphi, \quad a' = a\cos\varphi - \lambda \sin\varphi \quad \text{u. s. w.}$$

folgende Relationen gelten

$$(33)\quad \frac{d\mathfrak{L}}{d\sigma} = -\frac{a}{\varrho}\cos\varphi - a'\tau,\quad \frac{d\mathfrak{M}}{d\sigma} = -\frac{b}{\varrho}\cos\varphi - b'\tau,\quad \frac{d\mathfrak{N}}{d\sigma} = -\frac{c}{\varrho}\cos\varphi - c'\tau.$$

Dies sind sozusagen die Frenetschen Formeln (vgl. § 637) für das durch die orthogonale Determinante

$$\begin{vmatrix} a & a' & \mathfrak{L} \\ b & b' & \mathfrak{M} \\ c & c' & \mathfrak{N} \end{vmatrix} = 1$$

definierte Tripel von Richtungen. Multipliziert man die Formeln (33) einmal mit a, b, c, ein zweites Mal mit a', b', c', so erhält man durch Addition

$$\frac{\cos\varphi}{\varrho} = -\sum a\frac{d\mathfrak{L}}{d\sigma},\quad \tau = -\sum a'\frac{d\mathfrak{L}}{d\sigma}.$$

Da nun $\mathfrak{L} = -\mathfrak{N}p$, $\mathfrak{M} = -\mathfrak{N}q$ ist, wobei $\mathfrak{N} = 1 : \sqrt{1 + p^2 + q^2}$, so werden die letzten Formeln, wenn man die Orthogonalitätsbedingungen $pa + qb = c$, $pa' + qb' = c'$ berücksichtigt,

$$\frac{\cos\varphi}{\varrho} = a\left(p\frac{d\mathfrak{N}}{d\sigma} + \mathfrak{N}\frac{dp}{d\sigma}\right) + b\left(q\frac{d\mathfrak{N}}{d\sigma} + \mathfrak{N}\frac{dq}{d\sigma}\right) - c\frac{d\mathfrak{N}}{d\sigma} = \mathfrak{N}\left(a\frac{dp}{d\sigma} + b\frac{dq}{d\sigma}\right),$$

$$\tau = a'\left(p\frac{d\mathfrak{N}}{d\sigma} + \mathfrak{N}\frac{dp}{d\sigma}\right) + b'\left(q\frac{d\mathfrak{N}}{d\sigma} + \mathfrak{N}\frac{dq}{d\sigma}\right) - c'\frac{d\mathfrak{N}}{d\sigma} = \mathfrak{N}\left(a'\frac{dp}{d\sigma} + b'\frac{dq}{d\sigma}\right).$$

Die erste Formel ist nicht verschieden von (13), für die wir auf diese Weise einen neuen Beweis erhalten haben; die zweite Formel gibt uns

$$\tau = \frac{raa' + s(ab' + ba') + tbb'}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \tag{34}$$

und diese Gleichung kann man auf eine analoge Form bringen wie (13), indem man bemerkt, daß

$$a' = \mathfrak{M}c - \mathfrak{N}b = -\mathfrak{N}(b + qc) = -\mathfrak{N}[pqa + (1 + q^2)b],$$
$$b' = \mathfrak{N}a - \mathfrak{L}c = \quad \mathfrak{N}(a + pc) = \quad \mathfrak{N}[(1 + p^2)a + pqb]$$

ist. Man erhält dann

$$\tau = \frac{-(ra + sb)[pqa + (1 + q^2)b] + (sa + tb)[(1 + p^2)a + pqb]}{1 + p^2 + q^2},$$

und man gelangt wieder zu der für die Krümmungslinien charakteristischen Bedingung (27), wenn man $\tau = 0$ setzt.

702. Will man die Eigenschaften von τ ermitteln, so ist der Gebrauch der Formel (34) bequemer.

a) Eine erste Eigenschaft ergibt sich sofort durch folgende Bemerkung. Ersetzt man die Richtung (a, b, c) durch (a', b', c'), so muß man diese durch die Richtung $(-a, -b, -c)$ ersetzen, sodaß also τ nur einen Zeichenwechsel erleidet. Mithin haben zwei Kurven einer Fläche, die sich unter rechtem Winkel schneiden, in dem Schnittpunkt geodätische Torsionen mit entgegengesetztem Zeichen, die aber dem absoluten Betrage nach gleich sind.

b) Sind (a_1, b_1, c_1) und (a_2, b_2, c_2) die Richtungen der Tangenten der Krümmungslinien, so kann man immer setzen

$$a = a_1 \cos\theta + a_2 \sin\theta, \quad a' = -a_1 \sin\theta + a_2 \cos\theta,$$
$$b = b_1 \cos\theta + b_2 \sin\theta, \quad b' = -b_1 \sin\theta + b_2 \cos\theta.$$

Setzt man diese Werte in (34) ein und bemerkt, daß

$$ra_1a_2 + s(a_1b_2 + a_2b_1) + tb_1b_2 = 0$$

ist, so erhält man die Formel

$$\tau = \left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1}\right)\sin\theta\cos\theta, \tag{35}$$

die klar erkennen läßt, in welcher Weise τ um einen Punkt herum variiert.

c) Man addiere zu dem Produkt der Normalkrümmungen in den Richtungen (a, b, c) und (a', b', c') das Produkt der geodätischen Torsionen in denselben Richtungen und bemerke, daß der Ausdruck

$$(ra^2 + 2sab + tb^2)(ra'^2 + 2sa'b' + tb'^2) - [raa' + s(ab' + ba') + tbb']^2$$

sich identisch auf $(rt - s^2)\mathfrak{N}^2$ reduziert. Dann erhält man die wichtige Formel

$$(36) \qquad K = \frac{1}{\varrho \varrho'} - \tau^2,$$

die man auch ableiten kann, indem man sich des Ausdrucks (35) von τ und der Eulerschen Formel bedient. Schreibt man in der Tat die letztere in den beiden in § 685 angegebenen Weisen, so erhält man sofort durch Multiplikation

$$\tau^2 = \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1}\right)\left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho}\right) = -\frac{1}{\varrho^2} + \frac{H}{\varrho} - K = \frac{1}{\varrho \varrho'} - K.$$

703. Asymptotenlinien; Theorem von Enneper. Die Aufsuchung der Asymptotenlinien gründet sich auf die Gleichung

$$(37) \qquad r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0.$$

Dieselbe drückt aus, daß die Normalkrümmung dieser Kurven null ist. Die Gleichung (37) drückt auch die Orthogonalität der Hauptnormale gegen die Flächennormale aus, da die linke Seite identisch gleich $-p\,d^2x - q\,d^2y + d^2z$ ist. Man kann (37) auch in allgemeinerer Form so schreiben:

$$\mathfrak{L}\,d^2x + \mathfrak{M}\,d^2y + \mathfrak{N}\,d^2z = 0.$$

Sind x, y, z als Funktionen von zwei unabhängigen Veränderlichen u, v gegeben und beachtet man, daß

$$d^2x = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}du^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}du\,dv + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}dv^2 \quad \text{u. s. w.}$$

ist, so wird die letzte Gleichung

$$(38) \qquad \mathfrak{A}\,du^2 + 2\mathfrak{C}\,du\,dv + \mathfrak{B}\,dv^2 = 0,$$

wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die am Schluß von § 694 festgelegte Bedeutung haben. Im folgenden werden wir sehen, daß die Gleichung (37), ebenso wie (28), die dieselbe Form hat, zwei einfach unendliche Flächenscharen charakterisiert, welche die gegebene Fläche längs der Asymptotenlinien schneiden. Es ist übrigens, wenn man diese Linien auf einer gegebenen Fläche studieren will, nicht unerläßlich, ihre Gleichungen zu kennen. Es gibt nämlich, wenn die Hauptkrümmungen der Fläche bekannt sind, Formeln zur Berechnung der Krümmungen der Asymptotenlinien. Wenn wir nicht die diesem Lehrbuch gesteckten Grenzen überschreiten wollen, so können wir hier einen Beweis für die Formel von Bonnet[1]), welche die Flexion der Asymptotenlinien ausgedrückt durch ϱ_1 und ϱ_2 liefert, nicht geben. Es ist dagegen leicht aus (36) folgendes Theorem von Enneper abzuleiten: Die Torsion der Asymptotenlinien ist gleich der Quadratwurzel aus der negativ genommenen totalen Krümmung. In der Tat ist bei den Asymptotenlinien, wie bei allen Kurven, deren

1) „Nouvelles Annales de Mathématiques" 1865, p. 268.

Hauptnormalen gegen die Flächennormalen gleich geneigt sind (das gilt auch von den geodätischen Linien), die geodätische Torsion nicht verschieden von der absoluten Torsion. Da also $1/\tau = \tau$, $1/\varrho = 0$ ist, so gibt die Formel (36) $\tau = \pm\sqrt{-\varrho_1\varrho_2}$.

704. Theorem von Beltrami. Wir wollen zum Schluß das in § 682 ausgesprochene Theorem von Beltrami beweisen. Man verlege den Anfangspunkt nach einem beliebigen Punkt M der Fläche; man wähle ferner in der Tangentialebene die Tangente einer Asymptotenlinie als Achse der x und die Hauptnormale als Achse der y und ziehe die z-Achse (die Flächennormale) in der negativen Richtung der Binormale. Die in § 643 gefundenen Formeln (19) sind auf jede Kurve anwendbar, die die Asymptotenlinie berührt und in M von der Tangentialebene der Fläche oskuliert wird. Wenn also x, y, z die Koordinaten $(u, w, -v)$ eines zu M unendlich benachbarten Punktes M' auf der betrachteten Kurve sind, so hat man

$$\lim \frac{y}{x^2} = \frac{1}{2\varrho}, \quad \lim \frac{z}{x^3} = \frac{1}{6\varrho\tau}.$$

Insbesondere gelten diese Formeln für die Asymptotenlinie, wenn man für ϱ und τ die Werte ϱ_0 und τ_0 setzt, welche diese Radien auf der Asymptotenlinie in M haben. Andererseits läßt sich der Gleichung der Fläche in der Umgebung von M die Form geben

$$z = \tfrac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + kx^3 + \cdots.$$

Da nach der Voraussetzung eine der oskulierenden Geraden die x-Achse ist, so hat man $r = 0$. Außerdem gibt[1]) die Formel (34) $s = 1/\tau_0$. Läßt man also M' nach M hinrücken, so kommt

$$k = \lim \frac{z}{x^3} - \frac{1}{\tau_0}\lim\frac{y}{x^2} = \frac{1}{2\varrho}\left(\frac{1}{3\tau} - \frac{1}{\tau_0}\right).$$

Insbesondere ergibt sich, wenn M' längs der Asymptotenlinie nach M rückt, $k = -1/3\varrho_0\tau_0$. Durch Vergleichung der beiden Werte von k gelangt man zu der interessanten Formel von Bonnet

$$2\frac{\varrho}{\varrho_0} + \frac{\tau_0}{\tau} = 3,$$

die als Spezialfall $(\tau = \infty)$ das Theorem von Beltrami einschließt.

705. Geodätische Linien; Formeln von Weingarten. Die Definition (§ 665) der geodätischen Linien einer Fläche drückt sich unmittelbar in den Gleichungen aus

$$\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds} : \mathfrak{L} = \frac{d}{ds}\frac{dy}{ds} : \mathfrak{M} = \frac{d}{ds}\frac{dz}{ds} : \mathfrak{N}, \tag{39}$$

1) Mit diesen Werten von r und s ist das Theorem von Enneper aufs neue bewiesen, da $K = rt - s^2 = -1/\tau_0^2$ ist.

wobei s die Länge des Bogens ist. Man beachte, daß diese Gleichungen sich in Wirklichkeit auf eine einzige reduzieren, da

$$\sum \frac{dx}{ds}\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds} = 0, \qquad \sum \mathfrak{L}\frac{dx}{ds} = 0$$

ist. Man gelangt übrigens zu einer einzigen Gleichung, wenn man, anstatt auszudrücken, daß die Hauptnormale mit der Flächennormale zusammenfällt, hinschreibt, daß die Binormale in der Tangentialebene liegt:

$$\sum \mathfrak{L}\,(dy\,d^2z - dz\,d^2y) = 0.$$

Es kommt sehr selten vor, daß man imstande ist, von den Gleichungen (39) zu einer Gleichung in x, y, z mit zwei willkürlichen Konstanten zu gelangen, die zusammen mit der Gleichung der Fläche die zweifach unendliche Schar der geodätischen Linien darstellt. Man kann trotzdem diese Kurven studieren, ohne ihre Gleichungen in endlicher Form zu kennen, und es ist für die Anwendungen von besonderer Wichtigkeit zu wissen, wie sich die geodätischen Linien in ganz kleinen Bereichen der Fläche verhalten. Man verlege den An-

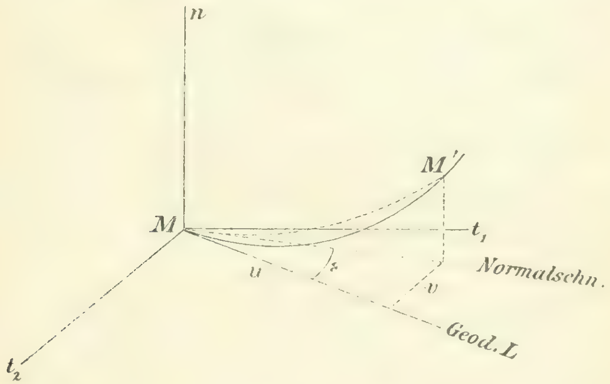

Fig. 89.

fangspunkt auf die Fläche, nach M, und richte die Achsen x und y längs der Tangenten der Krümmungslinien. Sodann betrachte man einen Bogen $MM' = \sigma$ auf der durch den Winkel θ, den ihre Tangente in M mit Mx bildet, definierten geodätischen Linie. Konstruiert man von den durch M hindurchgehenden Normalschnitten den, der auch durch M' hindurchgeht, so wird auf der Fläche ein anderer Kurvenbogen $MM' = \sigma + \delta$ bestimmt. Die Ebene dieses Schnittes pflegt man in der Praxis als oskulierende Ebene der geodätischen Linie anzunehmen, obwohl man sie, damit sie es tatsächlich wird, einer gewissen Drehung ε unterwerfen muß. Rechnet man sie für einen auf der positiven Hälfte der z-Achse (der Haupt normale) befindlichen Beobachter im Sinne des Uhrzeigers, so erledigt sich ihre Berechnung leicht mit Hilfe der Bemerkung, daß $\operatorname{tg}\varepsilon = -v/u$ ist, wo u und v (§ 643) die Abstände des Punktes M' von der Normalebene und der oskulierenden Ebene bedeuten. Man erhält daher, wenn man in den Formeln (19) des § 643 das ds in σ verwandelt, $\varepsilon = \sigma^2/6\varrho\mathfrak{r}$, d. h. die Drehung ε ist infinitesimal von zweiter Ordnung in Bezug auf den Bogen σ. Dieser Schluß, der so einfach ist und übrigens vorauszusehen war, enthält einen der Fundamentalsätze der Geodäsie. In der Praxis pflegt man auch, und zwar mit mehr Recht, δ zu vernachlässigen, d. h. den längs eines Normalschnittes gemessenen Bogen MM' als einen Bogen einer geodätischen Linie zu betrachten. Das rechtfertigt sich durch den Nachweis, daß $\delta = \frac{2}{5}\sigma\varepsilon^2$ ist, daß also die Differenz zwischen den beiden Bogen infinitesimal von fünfter Ordnung ist. Dieses und andere wichtige Resultate lassen sich aus den Formeln von Weingarten ableiten, die die Koordinaten x, y, z von M' als Funktionen von σ und von θ liefern. Da man nach den zitierten Formeln (19) hat

$$u = \sigma - \frac{\sigma^3}{6\varrho^2} + \cdots, \quad v = -\frac{\sigma^3}{6\varrho\mathfrak{r}} + \cdots, \quad w = \frac{\sigma^2}{2\varrho} + \frac{\sigma^3}{6}\frac{d}{ds}\frac{1}{\varrho} + \cdots,$$

so erhält man sofort $z = w$ und außerdem

$$x = u\cos\theta - v\sin\theta = \sigma\cos\theta - \frac{\sigma^3}{6\varrho}\left(\frac{\cos\theta}{\varrho} - \frac{\sin\theta}{\mathfrak{r}}\right) + \cdots,$$

$$y = u\sin\theta + v\cos\theta = \sigma\sin\theta - \frac{\sigma^3}{6\varrho}\left(\frac{\sin\theta}{\varrho} + \frac{\cos\theta}{\mathfrak{r}}\right) + \cdots.$$

Andererseits hat man auf Grund des Theorems von Euler (§ 685) und der Formel (35), wenn man sich erinnert, daß für die geodätischen Linien $\tau = 1/\mathfrak{r}$ ist,

$$\frac{\cos\theta}{\varrho} - \frac{\sin\theta}{\mathfrak{r}} = \frac{\cos\theta}{\varrho_1}, \quad \frac{\sin\theta}{\varrho} + \frac{\cos\theta}{\mathfrak{r}} = \frac{\sin\theta}{\varrho_2}.$$

Also ist

$$x = \left(\sigma - \frac{\sigma^3}{6\varrho\varrho_1} + \cdots\right)\cos\theta, \quad y = \left(\sigma - \frac{\sigma^3}{6\varrho\varrho_2} + \cdots\right)\sin\theta, \quad z = \frac{\sigma^2}{2\varrho} + \cdots.$$

706. Anwendung auf die Rotationsflächen. a) Um die Asymptotenlinien zu bestimmen, wähle man die Rotationsachse als z-Achse, und $z = f(x)$ sei in der (xz)-Ebene die Gleichung des Meridians. Die Gleichung der Fläche ist dann $z = f(R)$ mit $R = \sqrt{x^2 + y^2}$. Daraus folgt durch Derivation

$$p = \frac{x}{R}f'(R) = x\varphi(R), \quad q = \frac{y}{R}f'(R) = y\varphi(R);$$

ferner

$$r = \varphi(R) + \frac{x^2}{R}\varphi'(R), \quad s = \frac{xy}{R}\varphi'(R), \quad t - \varphi(R) + \frac{y^2}{R}\varphi'(R).$$

Die Gleichung (37) wird jetzt

$$(dx^2 + dy^2)\,\varphi(R) + (x\,dx + y\,dy)^2\,\frac{\varphi'(R)}{R} = 0,$$

oder, wenn man in der (xy)-Ebene Polarkoordinaten benutzt,

$$(dR^2 + R^2 d\theta^2)\,\varphi(R) + R\varphi'(R)\,dR^2 = 0,$$

mithin

(40) $$\pm\frac{d\theta}{dR} = \sqrt{-\frac{f''(R)}{R f'(R)}}\,.$$

Direkter gelangt man zu dieser Gleichung, wenn man von (38) ausgeht; denn für $u = R$, $v = \theta$ findet man leicht

$$\mathfrak{A} = Rf''(R),\quad \mathfrak{B} = R^2 f'(R),\quad \mathfrak{C} = 0.$$

In der Integralrechnung werden wir lernen, wie man von der Gleichung (40) zu einer andern in endlicher Form

$$\pm(\theta - \theta_0) = F(R)$$

gelangt, die zwei Kurvenscharen, die Projektionen der Asymptotenlinien auf die (xy)-Ebene, darstellt. Diese Kurven lassen sich alle aus der einen $\theta = F(R)$ durch Spiegelung an der Polarachse und Drehung um den Pol ableiten.

b) Nur in ganz speziellen Fällen ist die vollständige Bestimmung der geodätischen Linien möglich. Man kann aber trotzdem in dem allgemeinen Falle aus (39) ein bemerkenswertes Theorem gewinnen, welches die Diskussion der geodätischen Linien auf den Rotationsflächen sehr erleichtert und ihren Verlauf zu übersehen gestattet. In der Tat muß sein

$$\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds} : x = \frac{d}{ds}\frac{dy}{ds} : y \quad \text{oder} \quad x\frac{d}{ds}\frac{dy}{ds} - y\frac{d}{ds}\frac{dx}{ds} = 0,$$

also

$$\frac{d}{ds}\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right) = 0,\quad x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds} = c,$$

wo c eine willkürliche Konstante ist. Es sei nun ψ der Winkel einer geodätischen Linie mit dem Meridian, und man beachte, daß $-\sin\theta$, $\cos\theta$, 0 die Richtungskosinus der Tangente des Parallelkreises sind und dx/ds, dy/ds, dz/ds die Richtungskosinus der Tangente der geodätischen Linie. Dann hat man

$$\sin\psi = -\sin\theta\cdot\frac{dx}{ds} + \cos\theta\cdot\frac{dy}{ds} = \frac{1}{R}\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right),$$

d. h. $R\sin\psi = c$. Die geodätischen Linien einer Rotationsfläche treffen also die Meridiane unter Winkeln, deren Sinus längs jeder geodätischen Linie wie die Krümmung der Parallelkreise variiert. Dieses Theorem, welches man Clairaut verdankt, ist in der Geodäsie sehr nützlich. Es legt der von den geodätischen Linien, die einem gegebenen (nicht verschwindenden) Wert von c entsprechen, erfüllten Region Grenzen auf. In der Tat kann R dem absoluten Betrage nach nicht kleiner als c werden. Denkt man sich also eine geodätische Linie in dem Sinne durchlaufen, in welchem die Parallelkreise kleiner werden, so wird die Kurve immer mehr von den Meridianen abweichen, um sich den Parallelkreisen zu nähern, und schließlich wird sie den Parallelkreis vom Radius c berühren ohne ihn überschreiten zu können.

707. Übungen. a) Die Asymptotenlinien des Helikoids mit Leitebene (§ 690, b) sind uns bereits bekannt. Wir wollen sie aber hier noch einmal bestimmen, und zwar mit Hilfe des in § 704 angegebenen Verfahrens. Die Gleichung der Fläche ist $z = a\theta$, wo θ gleich $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ ist, vermehrt um ein beliebiges Multiplum von π. Daraus folgt

$$(41)\qquad p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{ay}{x^2+y^2}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{ax}{x^2+y^2}.$$

Durch nochmalige Derivation erkennt man, daß r, s, t proportional zu $-2xy$, x^2-y^2, $2xy$ sind, sodaß die Gleichung (37) folgende wird

$$-xy\,dx^2 + (x^2-y^2)\,dx\,dy + xy\,dy^2 = 0.$$

Sie spaltet sich in die beiden Gleichungen

$$y\,dx - x\,dy = 0, \quad x\,dx + y\,dy = 0.$$

Die erste liefert die Erzeugenden ($y = kx$), während die zweite $x^2+y^2 = \text{Const.}$ gibt. Die Asymptotenlinien der beiden Scharen sind also zueinander orthogonal, und die Fläche ist daher, wie wir auch schon wissen, eine Minimalfläche. Rascher kommt man zum Ziele, wenn man $u = R$, $v = \theta$ nimmt und die Gleichung (38) anwendet, die sich auf $dR\,d\theta = 0$ reduziert, da $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = 0$, $\mathfrak{C} = -a$ ist. Die Asymptotenlinien werden also dargestellt durch die Gleichungen $R = \text{Const.}$ (Schraubenlinien) und $\theta = \text{Const.}$ (geradlinige Erzeugende).

b) Wir wollen auf derselben Fläche die Krümmungslinien zu bestimmen suchen. Sie durchsetzen offenbar die geradlinigen Erzeugenden unter 45^0. Um sie analytisch zu bestimmen, setzen wir die Werte (41) oder

$$p = -\frac{a}{R}\sin\theta, \quad q = \frac{a}{R}\cos\theta$$

in die Gleichung (31) ein. Diese wird dann

$$\frac{\frac{dR}{R}\cos\theta - \left(1+\frac{a^2}{R^2}\right)\sin\theta\,d\theta}{\frac{dR}{R}\sin\theta - \cos\theta\,d\theta} + \frac{\frac{dR}{R}\sin\theta + \left(1+\frac{a^2}{R^2}\right)\cos\theta\,d\theta}{\frac{dR}{R}\cos\theta + \sin\theta\,d\theta} = 0$$

und reduziert sich auf

$$\pm\frac{d\theta}{dR} = \frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}} \quad \text{oder} \quad \mp\,d\theta = \frac{d\psi}{\sin\psi},$$

wenn man $R = a\cot\psi$ setzt. Die rechte Seite der letzten Gleichung ist (§ 292, b) das Differential von $\log\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}$. Man erhält also successiv

$$e^{\mp(\theta-\theta_0)} = \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}, \quad R = \frac{a}{2}\left(e^{\pm(\theta-\theta_0)} - e^{\mp(\theta-\theta_0)}\right).$$

Diese Kurven, die Projektionen der Krümmungslinien auf die Leitebene, erhält man alle, indem man die Spirale $R = \frac{a}{2}(e^{\theta} - e^{-\theta})$ um den Pol rotieren läßt. Diese Spirale geht vom Pol aus wie eine archimedische Spirale und hat die Tendenz sich im Unendlichen in ein Paar logarithmischer Spiralen zu verwandeln, die die Radienvektoren unter 45^0 treffen.

c) Um die Asymptotenlinien des Katenoids zu bestimmen, mache man Gebrauch von der Formel (40) und bemerke, daß die Funktion $z = f(R)$ implicite definiert ist durch die Gleichung des Meridians: $R = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right)$. Sie liefert uns bei zweimaliger Derivation nach R

$$\frac{1}{f'(R)} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} - e^{-\frac{z}{a}}\right), \quad -\frac{f''(R)}{f'^3(R)} = \frac{1}{2a}\left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right) = \frac{R}{a^2},$$

sodaß die Formel (40) übergeht in

$$\pm \frac{d\theta}{dR} = \frac{f'(R)}{a}, \quad \text{woraus folgt} \quad \pm a(\theta - \theta_0) = f(R).$$

Die Projektionen der Asymptotenlinien auf die Ebene des Kehlkreises werden also in Polarkoordinaten durch die Gleichung dargestellt, welche man erhält, indem man in der Gleichung des Meridians z durch $\pm a(\theta - \theta_0)$ ersetzt:

$$R = \frac{a}{2}\left(e^{\pm(\theta-\theta_0)} + e^{\mp(\theta-\theta_0)}\right).$$

Alle diese Kurven werden erhalten durch Rotation der Spirale

$$R = \frac{a}{2}(e^{\theta} + e^{-\theta})$$

um den Pol. Man braucht also nur eine Asymptotenlinie zu haben, um sie alle zu kennen. Die Gleichungen

$$x = \frac{a}{2}(e^{\theta} + e^{-\theta})\cos\theta, \quad y = \frac{a}{2}(e^{\theta} + e^{-\theta})\sin\theta, \quad z = a\theta$$

stellen gerade eine der Asymptotenlinien dar, und wir haben dieselbe bereits in § 657 untersucht. Die Eigenschaft, die Parallelkreise des Katenoids unter 45^0 zu schneiden, die diese Kurve hat, erscheint uns jetzt als evident. Da nämlich das Katenoid eine Minimalfläche ist (§ 690, a), so müssen die Asymptotenlinien die Krümmungslinien, also die Meridiane und die Parallelkreise, gerade unter 45^0 treffen. Die andre Eigenschaft unserer Kurve, welche den Torsionsradius betrifft, ist eine unmittelbare Folge des Theorems von Enneper. Bezeichnet man in der Tat mit n den Abschnitt der Flächennormale, der zwischen dem Incidenzpunkt und der Rotationsachse liegt, so sind die Hauptkrümmungsradien $\varrho_1 = n$ und $\varrho_2 = -n$. Die Formel am Schluß von § 704 gibt dann sofort $\tau = \pm n$.

d) Bemerkenswert sind auch die Asymptotenlinien der Pseudosphäre (§ 693, a). Es sei ψ die Neigung der Tangente gegen die Rotationsachse, sodaß $R = a\sin\psi$, $f'(R) = -\cot\psi$ und infolgedessen $f''(R) = 1/a\cos\psi\sin^2\psi$ ist. Die Formel (40) wird $\pm d\theta = d\psi/\sin\psi$, und man leitet daraus ab $\pm(\theta - \theta_0) = \log\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}$, mithin

$$R = \frac{2a}{e^{\pm(\theta-\theta_0)} + e^{\mp(\theta-\theta_0)}}.$$

Diese Gleichung stellt die unendlich vielen Lagen dar, welche eine *Poinsotsche Spirale* $R = 2a/(e^\theta + e^{-\theta})$ durch Rotation um den Pol annehmen kann. Um die Asymptotenlinien der Pseudosphäre zu kennen, braucht man nur eine von ihnen zu diskutieren. Man betrachte diejenige, welche der Gleichung $-\theta = \log \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}$ entspricht, und bemerke, daß

$$\frac{dz}{d\psi} = a\frac{dz}{dR}\cos\psi = -a\frac{\cos^2\psi}{\sin\psi} = -\frac{a}{\sin\psi} + a\sin\psi$$

ist. Daraus folgt $z = -a\left(\log \operatorname{tg}\frac{\psi}{2} + \cos\psi\right)$. Die Asymptotenlinie, welche wir betrachten wollen, wird also dargestellt durch die Gleichungen

$$x = \frac{2a\cos\theta}{e^\theta + e^{-\theta}}, \quad y = \frac{2a\sin\theta}{e^\theta + e^{-\theta}}, \quad z = a\left(\theta - \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{e^\theta + e^{-\theta}}\right).$$

Verfährt man wie in § 657, so findet man leicht $s = a\theta$. Also ist jeder (nicht zu große) Bogen einer Asymptotenlinie so lang wie der Bogen, welchen die Meridiane in den Endpunkten auf dem größten Parallelkreis ausschneiden. Es seien nun l, m, n die Richtungskosinus der Rotationsachse in Bezug auf das Fundamentaltrieder der Kurve. Die Differentiation von z liefert

$$l = \frac{dz}{ds} = -\frac{\sin\psi}{a}\frac{dz}{d\psi} = \cos^2\psi.$$

Andererseits ist (§ 638)

$$\frac{dl}{ds} = \frac{n}{\varrho}, \quad \frac{dm}{ds} = \frac{n}{\tau}, \tag{42}$$

und die Werte von m und von τ sind uns bereits bekannt. In der Tat ist $m = -\sin\psi$ der Kosinus des Winkels, den die Binormale (die Normale der Fläche) mit der z-Achse bildet. Außerdem ergibt sich aus dem Theorem von Enneper sofort $\tau = \pm a$. Nehmen wir $\tau = a$ (linksgewundene Asymptotenlinie) und bemerken wir, daß aus der zweiten Formel (42) hervorgeht

$$n = a\frac{dm}{ds} = \frac{dm}{d\theta} = \cos\psi\sin\psi.$$

Daraus folgt durch Einsetzen in die erste Formel (42)

$$\varrho = \frac{a}{2\sin\psi} = \frac{a}{4}\left(e^\theta + e^{-\theta}\right) = \frac{a}{4}\left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right).$$

Man bemerke, daß in dem Berührungspunkt der Asymptotenlinie mit dem größten Parallelkreis der Krümmungsradius $\frac{1}{2}a$ ist, während er nach dem Theorem von Beltrami (§ 682) den Wert $\frac{2}{3}a$ haben müßte. Das klärt sich durch die Bemerkung auf, daß der genannte Parallelkreis (der Ort der Spitzen der Meridiane) eine singuläre Linie der Fläche ist.

Siebentes Buch.

Integralrechnung.

Die Integration.

Grundbegriffe.

708. Man nennt Integral von $f(x)dx$ und bezeichnet mit $\int f(x)dx$ jede Funktion, welche als Differential $f(x)dx$ hat. Mit andern Worten, wenn man schreibt $\int f(x)dx = F(x)$, so will man behaupten, daß $f(x)dx = dF(x)$ ist. Da man aus diesen beiden Gleichungen durch Elimination des einen oder des andern der Symbole F und f ableitet

$$f(x)dx = d\int f(x)dx, \quad \int dF(x) = F(x),$$

so sieht man, daß die beiden Zeichen d und $\int$ sich gegenseitig aufheben. Nennt man also Integration die durch das Zeichen $\int$ dargestellte Operation, durch die man, wenn f gegeben ist, F findet, so kann man sagen, daß die Integration die inverse Operation der Differentiation ist. Es ist uns bereits bekannt (§ 307, b), daß, wenn $F(x)$ eine Funktion ist, die das Differential $f(x)dx$ zuläßt, alle andern Funktionen, die dasselbe Differential haben, durch $F(x) + C$ dargestellt werden, wo C eine willkürliche Konstante ist. Dagegen ist die Differenz der Werte, welche das einem gegebenen Wert von C entsprechende Integral $\int f(x)dx$ an den Endpunkten eines gegebenen Intervalles (a, b) annimmt, vollkommen bestimmt, weil bei der Bildung der Differenz der Wert C ganz herausfällt. Diese Differenz bezeichnet man mit $\int_a^b f(x)dx$ und nennt sie ein bestimmtes Integral (zwischen den Grenzen a und b) zum Unterschied von dem unbestimmten Integral $\int f(x)dx$. Es ist also

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Diese Definitionen sind aber nicht befriedigend, weil sie uns nichts über die Existenz des Integrals und über die Art seiner Berechnung sagen. Sie sind vielmehr nur als Erklärungen von Symbolen zu betrachten, und wir werden deshalb versuchen, sie in andere zu verwandeln, die zur Definition der durch jene Symbole dargestellten Operationen selbst dienen.

709. Um zunächst eine Erklärung des bestimmten Integrals zu gewinnen, wollen wir bemerken, daß $F'(x) = f(x)$ ist und das Theorem von Lagrange (§ 306) auf n Intervalle $h_1, h_2, \ldots, h_n$ anwenden, in die wir das Intervall (a, b) in beliebiger Weise zerlegt haben. Nennen wir α_i einen bestimmten Wert, der dem Intervall (x_{i-1}, x_i) von der Größe h_i angehört, und β_i den zugehörigen Wert von $f(x)$, so ist

$$F(x_1) - F(a) = h_1\beta_1,\ F(x_2) - F(x_1) = h_2\beta_2,\ \ldots,\ F(b) - F(x_{n-1}) = h_n\beta_n.$$

Durch Addition ergibt sich $F(b) - F(a) = \sigma_n$, wenn man setzt

$$\sigma_n = h_1\beta_1 + h_2\beta_2 + \cdots + h_n\beta_n.$$

Man kann also, wenn man n ins Unendliche wachsen läßt, schreiben $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{n=\infty} \sigma_n$, d. h. der Wert des Integrals läßt sich als Grenzwert der Folge $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$ betrachten, deren Glieder übrigens alle einander gleich sind. Dies vorausgeschickt wollen wir folgendes beweisen: W e n n $f(x)$ e i n e s t e t i g e F u n k t i o n i s t, s o d a r f m a n j e d e s α_i d u r c h e i n e b e l i e b i g e Z a h l d e s I n t e r v a l l e s (x_{i-1}, x_i) e r s e t z e n, vorausgesetzt, daß beim unendlichen Zunehmen von n alle Teilintervalle gleichzeitig nach Null konvergieren. Hat man in der Tat die Zahl h gefunden, die man auf Grund des Theorems von Cantor (§ 279) jeder positiven Zahl ε entsprechen lassen kann, und nimmt man an, daß $h_1, h_2, \ldots, h_n$ schon sämtlich kleiner gemacht sind als h, so wird sein $|f_i - \beta_i| < \varepsilon$ für jeden Wert f_i, den die Funktion in dem Intervall h_i annimmt. Setzt man also

$$\tau_n = h_1 f_1 + h_2 f_2 + \cdots + h_n f_n,$$

so wird man haben

$$|\tau_n - \sigma_n| < \sum_1^n h_i |f_i - \beta_i| < \varepsilon \sum_1^n h_i = (b-a)\,\varepsilon.$$

Beachtet man, daß $(b-a)\,\varepsilon$ beliebig klein gewählt werden kann, so folgt

$$\lim_{n=\infty} \tau_n = \lim_{n=\infty} \sigma_n = \int_a^b f(x)\,dx,$$

d. h. es konvergieren auch die Zahlen $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$ (die nicht mehr alle einander gleich sind) nach dem Wert des Integrals.

710. Definition des Integrals. Lassen wir uns von den obigen Betrachtungen leiten, so sind wir in der Lage, folgende Definition aufzustellen, wobei wir mit den aufzuerlegenden Bedingungen möglichst verschwenderisch sein wollen: „Man zerlege in beliebiger Weise das Intervall (a, b) in Teilintervalle $h_1, h_2, \ldots, h_n$, die nach Null konvergieren, wenn n unendlich zunimmt, und bezeichne mit $f_1, f_2, \ldots, f_n$ irgend welche Zahlen, die in jedem der genannten Intervalle zwischen der unteren und der oberen Grenze von $f(x)$ liegen (diese Grenzen nicht ausgeschlossen). Konvergiert dann die Summe $h_1 f_1 + h_2 f_2 + \cdots + h_n f_n$ immer nach demselben Grenzwert, so heißt dieser das *bestimmte Integral* von $f(x)\,dx$ zwischen a und b und wird mit $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ bezeichnet."
Setzt man ferner die Grenze b als veränderlich voraus und nennt sie x, so erhält man die Definition des *unbestimmten Integrals* $F(x)$. In allen Fällen heißt $f(x)\,dx$ das Element des Integrals, sodaß sich ein Integral als eine *Summe* von unendlich vielen infinitesimalen Elementen betrachten läßt.

711. Von den allgemeinen Eigenschaften der Integrale bemerken wir sofort die folgende

$$\int\limits_a^b k f(x)\,dx = k\int\limits_a^b f(x)\,dx, \quad (k \text{ konstant})$$

die eine unmittelbare Folge der Definition ist, ebenso wie die weitere

$$\int\limits_a^b (u + v + \cdots)\,dx = \int\limits_a^b u\,dx + \int\limits_a^b v\,dx + \cdots,$$

die offenbar immer besteht, so lange die Funktionen $u, v, \ldots$ von x in endlicher Anzahl vorhanden sind. Man braucht in der Tat nur in den Gleichungen

$$\sum_1^n k h_i f_i = k \sum_1^n h_i f_i, \quad \sum_1^n h_i (u_i + v_i + \cdots) = \sum_1^n h_i u_i + \sum_1^n h_i v_i + \cdots$$

zur Grenze überzugehen, indem man die Existenz der Integrale von $f\,dx$, $u\,dx$, $v\,dx$, ... zuläßt. Es ist jetzt zweckmäßig, den Integralbegriff von den verschiedenen Einschränkungen, die er noch enthält, zu befreien.

a) Um vor allen Dingen nicht mehr $a < b$ annehmen zu müssen, wollen wir vereinbaren, daß unter allen Umständen

$$(1) \qquad \int\limits_a^b = -\int\limits_b^a$$

sein soll. Diese Festsetzung ist ganz natürlich, wenn man bedenkt, daß, falls man das Intervall $b-a$ als negativ betrachtet, auch die Teilintervalle $h_1, h_2, \ldots$ als negativ vorauszusetzen sind, während die zugehörigen Werte $f_1, f_2, \ldots$ ungeändert bleiben. Mit andern Worten, jedes Element $f(x)dx$ hat das Zeichen von $f(x)$ oder das entgegengesetzte, je nachdem, wenn x von der Grenze a nach der Grenze b variiert, dx positiv oder negativ ist. Nunmehr ist leicht zu beweisen, daß man immer hat

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b. \tag{2}$$

Diese Eigenschaft ist evident, wenn c zwischen a und b liegt. Im entgegengesetzten Falle erhält man, wenn z. B. $a < b < c$ ist, unter Beachtung von (1) sofort

$$\int_a^b = \int_a^c - \int_b^c = \int_a^c + \int_c^b.$$

b) Die Definition von $\int_a^b f(x)dx$ verlangt, daß $f(x)$ in dem Integrationsintervall (a, b) endlich ist. Aber diese Einschränkung läßt sich z. T. aufheben durch die Vereinbarung, falls $f(x)$ in einem Punkte c unendlich wird, zu setzen

$$\int_a^b = \lim_{\varepsilon=0} \int_a^{c-\varepsilon} + \lim_{\eta=0} \int_{c+\eta}^b.$$

c) Es gibt auch Integrale, die über unendliche Intervalle erstreckt sind; aber sie müssen als Grenzwerte von andern Integralen betrachtet werden, die über endliche Intervalle erstreckt sind. Man hat mit andern Worten per definitionem

$$\int_a^{\pm\infty} = \lim_{x=\pm\infty} \int_a^x, \qquad \int_{\pm\infty}^a = \lim_{x=\pm\infty} \int_x^a,$$

außerdem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^a + \int_a^\infty.$$

Es ist leicht zu konstatieren, daß die vorhin angegebenen Eigenschaften, die sich auf Integrale mit endlichem Integrationsintervall beziehen, auch im Falle eines unendlichen Integrationsintervalles bestehen.

d) Infolge der letzten Definition ist es nicht erlaubt, ein Integral, welches sich auf ein unendliches Intervall bezieht, als den Grenzwert einer Summe $h_1 f_1 + h_2 f_2 + \cdots$ zu betrachten. Wir wollen jedoch einen sehr allgemeinen Fall angeben, wo folgendes stattfindet: Zerlegt man das Intervall (a, ∞) in unendlich viele Intervalle $h_1, h_2, h_3, \ldots$, die nach Null konvergieren, und wählt in jedem Intervall h_i zwischen der unteren und der oberen Grenze von $f(x)$ in diesem Intervall einen Wert f_i, so kann man behaupten, daß

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim\,(h_1 f_1 + h_2 f_2 + h_3 f_3 + \cdots)$$

ist. Dies gilt dann, wenn bei der Teilung eines beliebigen Intervalles (x, ∞) nach demselben Gesetz als Grenzwert der analogen Summe eine Größe $\varrho(x)$ herauskommt, die für unendliches x nach Null konvergiert. In der Tat ist klar, daß man hat

$$\int_a^x f(x)\,dx = \varrho(a) - \varrho(x), \quad \int_a^\infty f(x)\,dx = \varrho(a).$$

712. Unter den unendlich vielen möglichen Zerlegungen des Intervalles (a, b) ist die einfachste ohne Zweifel die in gleiche Teile, für welche man hat

$$\tau_n = h\,(f_1 + f_2 + \cdots + f_n) = (b - a)\,\frac{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}{n},$$

folglich

$$\lim_{n=\infty} \frac{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}{n} = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Aus diesem Grunde gibt man der rechten Seite den Namen Mittelwert von $f(x)$ im Intervall (a, b). Da alle Zahlen f_i zwischen der unteren Grenze λ und der oberen Grenze μ von $f(x)$ in (a, b) enthalten sind, so läßt sich dasselbe auch von ihrem arithmetischen Mittel sagen, und es ist infolgedessen auch der Mittelwert von $f(x)$ zwischen λ und μ enthalten. Dies vorausgeschickt betrachte man die Funktion

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx,$$

erteile x einen Zuwachs h und bemerke unter Erinnerung an die Eigenschaft (2), daß man hat

$$F(x + h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(x)\,dx = h f_0,$$

wo f_0, der Mittelwert von $f(x)$ in $(x, x + h)$, beim Konvergieren von h nach Null endlich bleibt, sodaß $\lim F(x + h) = F(x)$ ist. *Die Funktion $F(x)$ ist* also *stetig.*

713. Man kann noch etwas mehr aussagen, wenn die zu integrierende Funktion stetig ist, weil alsdann λ und μ Werte von $f(x)$

in (a, b) sind (§ 278) und $f(x)$ beim Übergange von einem zum andern Werte sicher (§ 276) wenigstens einmal gleich seinem Mittelwerte in (a, b) wird. Für einen passenden Wert ξ des Intervalles (a, b) hat man also

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi). \tag{3}$$

Es ist jetzt leicht zu beweisen, daß die in § 710 gegebene Definition des Integrals mit der zu Anfang gegebenen übereinstimmt. $F(x)$ *hat* nämlich *die Derivierte* $f(x)$. Wendet man in der Tat die Formel (3) auf das Intervall $(x, x+h)$ an, so erhält man $F(x+h) - F(x) = hf(\xi)$, wo ξ zwischen x und $x+h$ enthalten ist und daher nach x konvergiert, wenn h der Null zustrebt. Daraus folgt

$$F'(x) = \lim \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim f(\xi) = f(x).$$

Hiernach ist klar, daß die Formel (3) einfach der Ausdruck des Theorems von Lagrange ist, angewandt auf das unbestimmte Integral. Nur wenn $f(x)$ unstetig ist, können die neue und die alte Definition im Widerspruch stehen; und es läßt sich tatsächlich beweisen[1], daß das Integral von $f(x)dx$ nach dem neuen Begriff manchmal nicht existiert, obwohl $f(x)$ eine primitive Funktion zuläßt.

Integrierbarkeit.

714. Theorem. Für die Existenz von $\int_a^b f(x)\,dx$ ist es notwendig und hinreichend, daß sich eine Teilung des Intervalles (a, b) in Intervalle $h_1, h_2, \ldots, h_n$ bilden läßt von folgender Beschaffenheit: Nennt man $\mathfrak{O}_i$ die Schwankung von $f(x)$ in h_i, so hat die Summe

$$\omega_n = h_1\mathfrak{O}_1 + h_2\mathfrak{O}_2 + \cdots + h_n\mathfrak{O}_n$$

den Grenzwert Null, wenn die genannten Intervalle, an Zahl zunehmend, gleichzeitig dem Verschwinden zustreben.

a) Wenn das Integral existiert, so ist damit gesagt, daß die Summe $\tau_n = \sum_1^n h_i f_i$ immer denselben Grenzwert hat, wie man auch die Zahlen f_i in den bezüglichen Intervallen wählen mag. Ersetzt man insbesondere $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ein Mal durch die oberen Grenzen von $f(x)$ in den zugehörigen Intervallen, ein anderes Mal durch die unteren Grenzen, so erhält man durch Subtraktion $\lim \omega_n = 0$, welches

1) Volterra (Giornale di Matematiche, 1881, p. 334).

auch der Modus sein mag, nach welchem man das Intervall (a, b) in infinitesimale Teile zerlegt.

b) Wenn umgekehrt für jeden Teilungsmodus $\lim \omega_n = 0$ ist, so können die Summen

$$\tau'_{n'} = \sum_1^{n'} h'_i f'_i, \quad \tau''_{n''} = \sum_1^{n''} h''_i f''_i$$

nicht nach verschiedenen Grenzwerten konvergieren. Betrachten wir in der Tat die Zerlegung in Teilintervalle $h_1, h_2, \ldots, h_n$, die durch die Punkte der beiden Zerlegungen hervorgebracht wird. Ein Intervall h' besteht aus einem Intervall h oder aus mehreren solchen; und wenn man für jedes von diesen Intervallen nach Belieben einen Wert f zwischen den Grenzen der Werte von $f(x)$ wählt, so hat man

$$h'_i f'_i = h_{r+1} f_{r+1} + h_{r+2} f_{r+2} + h_{r+3} f_{r+3} + \cdots + h_s f_s$$
$$+ h_{r+1}(f'_i - f_{r+1}) + h_{r+2}(f'_i - f_{r+2}) + \cdots + h_s(f'_i - f_s).$$

Der zweite Teil dieser Summe ist seinem absoluten Betrage nach nicht größer als das Produkt von $\mathfrak{O}'_i$ mit

$$h_{r+1} + h_{r+2} + \cdots + h_s = h'_i.$$

Also hat man

$$\tau'_{n'} = \tau_n + \varrho'_{n'}, \quad \tau''_{n''} = \tau_n + \varrho''_{n''},$$

wo

$$|\varrho'_{n'}| \leqq \omega'_{n'}, \quad |\varrho''_{n''}| \leqq \omega''_{n''}$$

ist. Daraus folgt

$$\tau'_{n'} - \tau''_{n''} = \varrho'_{n'} - \varrho''_{n''}, \quad |\tau'_{n'} - \tau''_{n''}| \leqq \omega'_{n'} + \omega''_{n''}.$$

Da nun $\omega'_{n'}$ und $\omega''_{n''}$ nach Null konvergieren, wenn alle Teilintervalle dem Verschwinden zustreben, so konvergiert auch $\tau'_{n'} - \tau''_{n''}$ nach Null, und es kann daher $\tau'_{n'}$ nicht einem Grenzwert zustreben, ohne daß $\tau''_{n''}$ demselben Grenzwert zustrebt.

c) Wir wollen ferner beweisen, daß τ_n notwendig nach einem Grenzwert konvergiert, wenn ω_n nach Null konvergiert. Ist ε positiv und beliebig klein gegeben, so kann man immer eine Zahl δ finden derart, daß $\omega_n < \frac{1}{2}\varepsilon$ ist, wenn die Intervalle h alle kleiner als δ sind. Wir können annehmen, daß bei wachsendem n die Intervalle h schließlich beständig kleiner bleiben als δ und ein Mal $h_1', h_2', \ldots, h'_{n'}$ werden, ein anderes Mal $h_1'', h_2'', \ldots, h''_{n''}$. Es seien $\tau_{n'}$ und $\tau_{n''}$ die zugehörigen Werte von τ_n und $\omega_{n'}, \omega_{n''}$ die von ω_n. Offenbar lassen sich auf diese Summen die oben für die τ' und τ'' angestellten Betrachtungen anwenden, und man kann schreiben

$$|\tau_{n'} - \tau_{n''}| \leqq \omega_{n'} + \omega_{n''} < \varepsilon$$

für jedes Paar von Werten n', n'', die größer sind als eine gewisse Zahl. Also konvergiert τ_n nach einem endlichen Grenzwert (§ 139).

d) Es bleibt nur noch folgendes zu zeigen übrig: Wenn die Summe ω_n für einen bestimmten Modus, (a, b) in infinitesimale Teile zu zerlegen, nach Null konvergiert, so konvergiert sie auch für jeden andern Teilungsmodus nach Null. Hat man für eine gegebene Teilung in Intervalle $h_1', h_2', \ldots, h_{n'}'$ $\lim \omega_{n'}' = 0$, so kann man, wenn $\varepsilon > 0$ gegeben ist, annehmen, daß $\omega_{n'}'$ bereits kleiner gemacht ist als ε; ferner kann man bei einem andern Teilungsmodus immer voraussetzen, daß die Teilintervalle $h_1'', h_2'', \ldots, h_{n''}''$ schon kleiner geworden sind als η/n', wobei mit η irgend eine andere beliebig kleine positive Zahl bezeichnet wird. Dies vorausgeschickt betrachten wir die Teilung in Intervalle $h_1, h_2, \ldots, h_n$, welche mit Hilfe der Punkte beider Teilungen erhalten wird. Man hat

$$\begin{aligned} h_i'\mathcal{O}_i' &= h_{r+1}\mathcal{O}_{r+1} + h_{r+2}\mathcal{O}_{r+2} + h_{r+3}\mathcal{O}_{r+3} + \cdots + h_s\mathcal{O}_s \\ &+ h_{r+1}(\mathcal{O}_i' - \mathcal{O}_{r+1}) + h_{r+2}(\mathcal{O}_i' - \mathcal{O}_{r+2}) + \cdots + h_s(\mathcal{O}_i' - \mathcal{O}_s) \end{aligned}$$

oder, wenn man beachtet, daß $\mathcal{O}_{r+1}, \mathcal{O}_{r+2}, \ldots, \mathcal{O}_s$ nicht größer als $\mathcal{O}_i'$ sind,

$$h_i'\mathcal{O}_i' \geqq h_{r+1}\mathcal{O}_{r+1} + h_{r+2}\mathcal{O}_{r+2} + \cdots + h_s\mathcal{O}_s,$$

ferner durch Summation $\omega_{n'}' \geqq \omega_n$. Andererseits betrachte man $\omega_{n''}''$. Diese Summe hat mit ω_n alle Glieder gemeinsam, die zu Intervallen h'' gehören, in deren Inneres keine Punkte der ersten Teilung fallen. Die Zahl der andern Glieder von $\omega_{n''}''$ ist kleiner als n', weil sie eben zu Intervallen h'' gehören, in deren jedes wenigstens einer der $n' - 1$ Punkte der ersten Teilung fällt; und da jedes der genannten Glieder kleiner als das Produkt von η/n' mit einer Schwankung ist, die sicherlich die Gesamtschwankung $\mathcal{O}$ von $f(x)$ in (a, b) nicht übertrifft, so ist ihre Summe kleiner als $\eta\mathcal{O}$. Also hat man

$$\omega_{n''}'' < \omega_n + \eta\mathcal{O} \quad \text{und daher} \quad \omega_{n''}'' < \omega_{n'}' + \eta\mathcal{O} < \varepsilon + \eta\mathcal{O}.$$

Wenn die Intervalle fortfahren sich zu verkleinern, so hört die letzte Ungleichung nicht auf gültig zu sein, d. h. $\omega_{n''}''$ wird und bleibt kleiner als die Größe $\varepsilon + \eta\mathcal{O}$, die beliebig klein gemacht werden kann. Mithin ist $\lim \omega_{n''}'' = 0$.

715. Aus dem vorhin bewiesenen Kriterium der Integrabilität wollen wir jetzt einige nützliche Folgerungen ziehen:

a) Wenn das Integral von $f(x)dx$ existiert, so existiert auch dasjenige von $|f(x)|\,dx$. In der Tat ist die Schwankung $\mathcal{O}'$ von $|f(x)|$ in irgend einem Intervall offenbar gleich der Schwankung $\mathcal{O}$ von $f(x)$, wenn diese Funktion in dem betrachteten Intervall ihr Zeichen nicht ändert. Dagegen ist sie kleiner als $\mathcal{O}$ im entgegengesetzten Falle. Daraus folgt $\mathcal{O}_i' \leqq \mathcal{O}_i$, mithin $\omega_n' \leqq \omega_n$, und man hat daher, wenn $\lim \omega_n = 0$ ist, $\lim \omega_n' = 0$. Man beachte überdies, daß wegen $\left|\sum_1^n h_i f_i\right| \leqq \sum_1^n h_i f_i$ in der Grenze $(n = \infty)$

$$\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b |f(x)|\,dx$$

ist.

b) Die Summe von zwei oder mehr integrablen Funktionen in endlicher Anzahl ist eine integrable Funktion. Dieser Satz, der oben (§ 711) als eine unmittelbare Folge der Definition des Integrals angegeben wurde, läßt sich auch mittels des Integrabilitätskriteriums ableiten, wenn man bemerkt, daß die Schwankung einer Summe von Funktionen in irgend einem Intervall nicht größer ist als die Summe der Schwankungen der Funktionen in demselben Intervall. Sind in der Tat λ', μ' die Grenzen von u und λ'', μ'' die von v, so hat man $\lambda' + \lambda'' \leqq u + v \leqq \mu' + \mu''$. Die untere Grenze λ von $u + v$ ist daher nicht kleiner als $\lambda' + \lambda''$ und die obere Grenze μ nicht größer als $\mu' + \mu''$, sodaß für die Schwankung von $u + v$ gilt $\Theta = \mu - \lambda \leq \Theta' + \Theta''$. Wendet man diesen Schluß auf jedes Intervall h_i an, so findet man $\omega_n < \omega_n' + \omega_n''$, woraus folgt, daß $\lim \omega_n = 0$ ist, wenn man hat $\lim \omega_n' = 0$, $\lim \omega_n'' = 0$.

c) Das Produkt von zwei oder mehr integrablen Funktionen in endlicher Anzahl ist eine integrable Funktion. Bezeichnet man in der Tat mit c eine Zahl, die nicht kleiner ist als die größte der Zahlen $0, -\lambda', -\lambda''$, so hat man

$$(\lambda' + c)(\lambda'' + c) < (u + c)(v + c) < (\mu' + c)(\mu'' + c),$$

mithin

$$\lambda'\lambda'' - c(\Theta' + \Theta'') < uv < \mu'\mu'' + c(\Theta' + \Theta'')$$

und daher

$$\Theta \leq \mu'\mu'' - \lambda'\lambda'' + 2c(\Theta' + \Theta'') = \mu'\Theta'' + \lambda''\Theta' + 2c(\Theta' + \Theta''),$$

endlich $\Theta < k(\Theta' + \Theta'')$, wenn man mit k eine Zahl bezeichnet, die größer ist als $\mu' + 2c$ und $\lambda'' + 2c$. Dieser Schluß läßt sich auf jedes Intervall h_i anwenden, indem man die Werte von c und von k ungeändert läßt; denn es ist $\lambda' \leqq \lambda_i'$, $\lambda'' < \lambda_i''$, $\mu' \geqq \mu_i'$, $\mu'' \geqq \mu_i''$. Daraus folgt $\Theta_i < k(\Theta_i' + \Theta_i'')$, ferner $\omega_n < k(\omega_n' + \omega_n'')$ und daher $\lim \omega_n = 0$, wenn, wie vorausgesetzt wird, $\lim \omega_n' = 0$ und $\lim \omega_n'' = 0$ ist.

d) Wenn $f(x)$ integrabel ist, so ist auch $1/f(x)$ integrabel, vorausgesetzt, daß $1/f(x)$ in dem Integrationsintervall endlich bleibt. Bleibt z. B. $f(x)$ immer größer als eine bestimmte positive Zahl, so ist ihre untere Grenze λ positiv, und die Grenzen von $1/f(x)$ sind $\lambda' = 1/\mu$, $\mu' = 1/\lambda$. Daraus folgt

$$\Theta' = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\Theta}{\lambda\mu} \leq \frac{\Theta}{\lambda^2}.$$

In jedem Intervall h_i hat man also $\Theta_i' \leqq \Theta_i / \lambda_i^2 \leqq \Theta_i / \lambda^2$; mithin ist $\omega_n' \leqq \omega_n / \lambda^2$ und endlich $\lim \omega_n' = 0$, wenn $\lim \omega_n = 0$ ist.

e) Der Quotient von zwei integrablen Funktionen ist eine integrable Funktion, vorausgesetzt, daß er in dem Integrationsintervall endlich ist. Wenn in der Tat die als endlich vorausgesetzten Funktionen u und v integrabel sind, so ist auch $1/v$, welches nach Voraussetzung endlich ist, integrabel. Folglich ist u/v integrabel, als Produkt von u und $1/v$.

f) Eine andere unmittelbare Folge des Integrabilitätskriteriums, die wir hier angeben müssen, um uns in kurzem darauf berufen zu können, ist die Integrabilität der (endlichen) Funktionen, die immer in einem Sinne variieren und monoton heißen. Die Funktionen können dabei in dem Integrationsintervall auch mit Unstetigkeiten (die notwendig gewöhnliche sind) behaftet sein. Für solche Funktionen sind die Schwankungen $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n$ gleich den absoluten Beträgen der Differenzen

$$f(x_1) - f(a),\ f(x_2) - f(x_1),\ \ldots,\ f(b) - f(x_{n-1}),$$

welche alle dasselbe Zeichen haben. Ihre Summe ist daher gleich der Totalschwankung Θ, dem absoluten Betrage von $f(b) - f(a)$. Wenn also $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ das Intervall (a, b) in gleiche Teile teilen, so hat man

$$\omega_n = \sum_1^n h_i \Theta_i = h\Theta, \quad \lim \omega_n = 0.$$

Hieraus folgt auch die Integrierbarkeit jeder endlichen Funktion, die eine endliche Anzahl Minima und Maxima in dem Integrationsintervall hat: man braucht das Intervall nur derart zu zerlegen, daß in jedem Teilintervall die Funktion monoton ist.

716. Wir wollen einen Augenblick stehen bleiben und zwei Theoreme beweisen, die bei der Untersuchung der bestimmten Integrale sehr nützlich sind:

a) Der Begriff des Mittelwertes (§ 712) einer integrablen Funktion $f(x)$ läßt sich ausdehnen, indem man dem Intervall (a, b) in jedem Punkte x eine Dichtigkeit $\varphi(x)$ beilegt, die notwendig positiv ist, oder indem man $\varphi(x)dx$ an die Stelle von dx setzt, als wenn die Größe jedes Intervalles h_i nicht mehr h_i, sondern $h_i\varphi_i$ wäre. Da $\lambda \leqq f_i < \mu$ ist, so wird sein

$$\lambda \sum_1^n h_i\varphi_i \leqq \sum_1^n h_i f_i \varphi_i \leqq \mu \sum_1^n h_i \varphi_i,$$

da $\varphi_i > 0$ ist. Man hat also, wenn man die Integrabilität von $\varphi(x)$ voraussetzt, woraus (§ 715, c) diejenige von $f(x)\varphi(x)$ folgt,

$$\lambda \int_a^b \varphi(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \leq \mu \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

oder

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f_0 \int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

wo f_0 eine Zahl zwischen λ und μ ist. Dieses Resultat ist bekannt unter dem Namen *erster* Mittelwertsatz.

b) Man nehme jetzt weiter an, daß $f(x)$ monoton ist, dafür aber $\varphi(x)$ nur verpflichtet ist, integrabel zu sein. Man hat

$$\sum_1^n h_i f_i \varphi_i = (f_1 - f_2) h_1 \varphi_1 + (f_2 - f_3)(h_1 \varphi_1 + h_2 \varphi_2) + \cdots$$
$$+ (f_{n-1} - f_n)(h_1 \varphi_1 + \cdots + h_{n-1} \varphi_{n-1}) + f_n (h_1 \varphi_1 + \cdots + h_n \varphi_n).$$

Da die Differenzen $f_1 - f_2$, $f_2 - f_3$, ... alle von demselben Zeichen sind, so kann man schreiben

$$\sum_1^n h_i f_i \varphi_i = k_n (f_1 - f_n) + f_n \sum_1^n h_i \varphi_i,$$

indem man mit k_n einen Wert bezeichnet, der zwischen den Summen

$$h_1 \varphi_1, \quad h_1 \varphi_1 + h_2 \varphi_2, \quad \ldots, \quad h_1 \varphi_1 + h_2 \varphi_2 + \cdots + h_{n-1} \varphi_{n-1}$$

liegt. Bedenkt man (§ 715, f, c), daß die Funktion $f(x)\varphi(x)$ integrabel ist, so erkennt man, daß beim unendlichen Zunehmen von n in der letzten Gleichung k_n nach einem Grenzwert k konvergieren muß, sodaß jene Gleichung in

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = k[f(a) - f(b)] + f(b) \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

übergeht. Offenbar hat k einen Wert, der zwischen den Werten liegt, die das Integral $\int_a^x \varphi(x)\,dx$ annimmt, wenn die obere Grenze x von a bis b variiert. Da (§ 712) das genannte Integral eine stetige Funktion von x ist, so gibt es in (a, b) eine Zahl ξ derart, daß $k = \int_a^\xi \varphi(x)\,dx$ ist. Andererseits hat man wegen der Eigenschaft (2)

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = k + \int_\xi^b \varphi(x)\,dx.$$

Also ist

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(a) \int_a^\xi \varphi(x)\,dx + f(b) \int_\xi^b \varphi(x)\,dx.$$

Dies ist der *zweite* Mittelwertsatz, den man Bonnet verdankt. Man beachte, daß, falls $f(x)$ an den Grenzen a und b unstetig wäre, $f(a)$ und $f(b)$ bezüglich durch $f(a+0)$ und $f(b-0)$ ersetzt werden müßten, da dies die Grenzwerte von f_1 und f_n sind.

717. Anwendungen. a) Um zu sehen, ob das Integral von $f(x)\,dx$, erstreckt über das Intervall (a, b), eine Bedeutung hat, wenn $f(x)$ in irgend einem Punkte c des Intervalls unendlich wird, muß man (§ 711, b) untersuchen, ob

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx, \qquad \int_{c+\eta}^{b} f(x)\,dx$$

für nach Null konvergierende ε und η endlichen Grenzwerten zustreben. Wir wollen, um einen bestimmten Fall vor uns zu haben, den ersten der beiden Grenzwerte betrachten und bemerken, daß zu seiner Existenz (§ 264) folgendes notwendig und hinreichend ist:

$$\int_a^{c-\alpha} f(x)\,dx - \int_a^{c-\beta} f(x)\,dx = \int_{c-\beta}^{c-\alpha} f(x)\,dx$$

muß nach Null konvergieren, wenn α und β unabhängig voneinander der Null zustreben. Um zu sehen, ob diese Bedingung erfüllt ist, kann man den ersten Mittelwertsatz anwenden. Wenn z. B. $f(x)$ in der Weise unendlich wird, daß $\lim\limits_{x=c}(c-x)^r f(x) = k \gtrless 0$ ist, oder, wie man zu sagen pflegt, von r-ter Ordnung unendlich wird, so hat man

$$\int_{c-\beta}^{c-\alpha} f(x)\,dx = \int_{c-\beta}^{c-\alpha} (c-x)^{-r} g(x)\,dx = g_0 \int_{c-\beta}^{c-\alpha} (c-x)^{-r}\,dx,$$

da $(c-x)^{-r}$ links von c sein Zeichen nicht ändert; und die Funktion $g(x)$, die nach k konvergiert und integrabel ist (als Produkt von zwei integrablen Funktionen) hat sicher einen Mittelwert g_0, der für infinitesimale α, β nach k konvergiert. Nun hat x^{-r} eine primitive Funktion, die für $r \gtrless 1$ proportional zu x^{1-r} ist und für $r = 1$ gleich $\log x$. Die Frage reduziert sich also darauf zu sehen, für welche Werte von r im ersten Falle $\alpha^{1-r} - \beta^{1-r}$ nach Null konvergiert. Dies ist nur der Fall für $r < 1$. Für $r = 1$ wird man dazu geführt $\log\frac{\alpha}{\beta}$ zu betrachten, welches keinem Grenzwert zustrebt. Also hat das vorgelegte Integral eine Bedeutung nur dann, wenn $f(x)$ von niedrigerer Ordnung als der ersten unendlich wird.

b) Wir wollen uns die analoge Frage stellen, wann das Integral von $f(x)\,dx$, erstreckt über ein unendliches Intervall (§ 711, c) eine Bedeutung haben kann. Damit der Grenzwert von $\int_a^b f(x)\,dx$ für unendliches b existiere, ist notwendig und hinreichend, daß

$$\int_a^{\alpha} f(x)\,dx - \int_a^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx,$$

wenn α und β unabhängig voneinander ins Unendliche wachsen, nach Null konvergiert. Jetzt nehme man an, daß sich $f(x)$ für unendliches x derart verhält, daß $\lim\limits_{x=\infty} x^r f(x) = k \gtrless 0$ ist. Man hat

$$\int_\beta^\alpha f(x)\,dx = \int_\beta^\alpha x^{-r} g(x)\,dx = g_0 \int_\beta^\alpha x^{-r}\,dx,$$

wo g_0 nach k konvergiert. Es muß also $\alpha^{1-r} - \beta^{1-r}$ nach Null konvergieren, wozu notwendig und hinreichend ist, daß man hat $r > 1$. Folglich hat das Integral $\int_a^x f(x)\,dx$ nur dann eine Bedeutung, wenn für unendliches x die Funktion $f(x)$ von höherer als erster Ordnung infinitesimal wird.

c) Das Integral von $f(x)\,dx$, erstreckt über ein unendliches Intervall, existiert nicht, wenn die Funktion $xf(x) = g(x)$ für unendliches x nach einem endlichen von Null verschiedenen Grenzwert konvergiert. Es kann aber das Integral auch existieren, wenn $g(x)$ keinem Grenzwert zustrebt, und es existiert sicher, wenn das Integral dieser Funktion, erstreckt über ein beliebiges Intervall, dem absoluten Betrage nach kleiner bleibt als eine Zahl k. Wendet man in der Tat den zweiten Mittelwertsatz an, so erhält man

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \frac{1}{\alpha}\int_\alpha^\xi g(x)\,dx + \frac{1}{\beta}\int_\xi^\beta g(x)\,dx$$

und infolgedessen

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right| < k\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right), \qquad \lim \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = 0$$

für unendlich zunehmende α, β.

718. Kriterium von Riemann. Es gibt ein sehr einfaches Mittel, welches von Riemann angegeben worden ist, um die Integrierbarkeit einer Funktion $f(x)$ auf Grund des in § 714 bewiesenen Kriteriums zu konstatieren. ε sei eine vorgelegte positive Größe und l_n die Summe derjenigen unter den Intervallen $h_1, h_2, \ldots, h_n$, in welchen die Schwankung von $f(x)$ größer als ε ist. Die Schwankung von $f(x)$ in jedem dieser Intervalle übertrifft nicht die Gesamtschwankung Θ; und in den andern Teilintervallen, deren Summe gleich $b - a - l_n$ ist, übertrifft sie nicht ε. Also ist

$$\omega_n \leq (\Theta - \varepsilon)\,l_n + (b - a)\,\varepsilon.$$

Wenn $\lim l_n = 0$ ist für jedes ε, so kann man, wenn η positiv und beliebig klein gegeben ist, $(b - a)\,\varepsilon = \frac{1}{2}\eta$ nehmen, die zugehörige

1) „Gesammelte Werke", S. 227.

Summe l_n bestimmen und n wachsen lassen, bis $\mathfrak{S} l_n < \frac{1}{2}\eta$ ist und bleibt. Alsdann wird auch sein $\omega_n < \eta$, mithin $\lim \omega_n = 0$. Umgekehrt hat man, wenn diese Bedingung erfüllt ist, weil $\omega_n > \varepsilon l_n$ ist, $\lim l_n = 0$ für jeden Wert von ε; d. h. man wird für jede positive Zahl η die Anzahl der Teilintervalle genügend wachsen lassen können, damit schließlich $l_n < \eta$ ist. Zur Integrabilität einer Funktion ist also notwendig und hinreichend, daß für jedes Paar von positiven, beliebig kleinen Größen ε und η eine Zerlegung des Integrationsintervalls gelingt, bei welcher die Summe der Teilintervalle, in denen die Schwankung der Funktion ε übertrifft, kleiner ist als η.

719. Wenn z. B. $f(x)$ stetig ist, so sagt uns das Theorem von Cantor (§ 279), daß sich bei gegebenem ε die Intervalle $h_1, h_2, \ldots, h_n$ genügend verkleinern lassen, damit in allen die Schwankung von $f(x)$ kleiner wird als ε. Man hat also $l_n = 0$. Mithin ist jede stetige Funktion integrabel. Es ist aber klar und uns bereits bekannt (§ 715, f), daß auch unstetige Funktionen integrabel sein können. Solche sind z. B. die endlichen, im allgemeinen stetigen Funktionen (§ 272, a), da die in endlicher Anzahl vorhandenen Unstetigkeitspunkte sich in beliebig kleine Intervalle einschließen lassen. Integrabel sind auch die endlichen Funktionen mit unendlich vielen Unstetigkeiten, so oft die Punkte des Integrationsintervalls, in deren Umgebung unendlich viele Unstetigkeitspunkte fallen, eine endliche Anzahl bilden. Isoliert man zunächst diese Punkte durch beliebig kleine Intervalle, so bleiben andere Unstetigkeitspunkte in endlicher Anzahl, die sich ihrerseits in beliebig kleine Intervalle einschließen lassen; und die Summe aller dieser Intervalle (der einzigen, die zur Bildung von l_n einen Beitrag liefern können) ist so klein als man will. In vielen andern Fällen[1] ist eine Funktion integrabel trotz der unendlich vielen Unstetigkeiten, welche sie längs des Integrationsintervalles bieten kann; und es ist leicht zu beweisen[1], daß nur von den total unstetigen Funktionen (§ 272, c) gesagt werden kann, daß sie *nie* integrabel sind; denn nimmt man ε hinreichend klein, so wird es immer in der Umgebung jedes Punktes des Integrationsintervalls wenigstens ein infinitesimales Intervall geben, in welchem die Schwankung größer bleibt als ε. Jedenfalls sieht man, daß die Stetigkeit zwar eine hinreichende Bedingung für die *Integrierbarkeit* ist, *nicht aber eine notwendige*. Dagegen ist, wie wir wissen (§ 282, e, f) die Stetigkeit eine notwendige Bedingung für die *Derivierbarkeit*, *nicht aber eine hinreichende*. Der Inbegriff der integrierbaren Funktionen schließt also den der derivier-

1) Dini „Fondamenti etc.", pp. 245—249.

baren ein und ist sehr viel ausgedehnter. Nichtsdestoweniger ist die Integration praktisch eine bedeutend schwierigere Operation als die Derivation; und während man allgemeine Regeln hat, um eine beliebige gegebene Funktion zu derivieren, kennt man zur Integration nur einige kleine Hilfsmittel, die jedoch für die Integrationen, die in der Praxis auszuführen sind, vollkommen ausreichen, und bei geschickter Anwendung auch in der höheren Mathematik zu den wichtigsten Resultaten führen.

Integrationsregeln.

720. Direkte Integration. Die erste sich darbietende Regel zur Berechnung eines Integrals ist die, welche sich unmittelbar aus der Definition ergibt; und die natürlichste Art diese Regel anzuwenden besteht darin, das Integrationsintervall in n gleiche Teile h zu zerlegen (sodaß $nh = b - a$ ist) und für jedes Teilintervall den Funktionswert an einer der Grenzen zu wählen:

$$(4)\qquad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h=0} h\,\{f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + f(a+nh)\}.$$

Es lassen sich aber auch andere Teilungsmodi denken, die manchmal zweckmäßiger sind. Wenn z. B. $a > 0$ ist, so kann man setzen $aq^n = b$ (wo $q > 1$ ist und für unendliches n nach 1 konvergiert) und hat dann

$$(5)\quad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{q=1} a(q-1)\,\{f(a) + qf(aq) + q^2 f(aq^2) + \cdots + q^{n-1} f(aq^{n-1})\}.$$

Nach demselben Gesetz kann man das Integrationsintervall auch in dem Falle teilen, wo der eine Endpunkt im Punkte 0 liegt; man muß dann von dem andern Endpunkt anfangen, muß sich aber erinnern (vgl. § 711, d), daß ein solches Verfahren nicht streng ist. Bezeichnet man mit q eine Zahl, die wachsend nach 1 konvergiert, so findet man

$$(6)\quad \int_0^a f(x)\,dx = \lim_{q=1} a(1-q)\,\{f(a) + qf(aq) + q^2 f(aq^2) + q^3 f(aq^3) + \cdots\}.$$

721. Beispiele. a) Wenn $f(x) = e^x$ ist, so hat man bei Anwendung der Formel (4)

$$\int_0^x e^x\,dx = \lim_{h=0} h\,(e^h + e^{2h} + \cdots + e^{nh}) = (e^x - 1)\lim_{h=0}\frac{h}{e^h - 1} = e^x - 1.$$

In unbestimmter Form: $\int e^x\,dx = e^x + C$.

b) Hier ein Fall, in welchem die Formel (5) nützlicher ist:

$$\int_a^x \frac{dx}{x} = \lim_{q=1} n(q-1) = \lim_{n=\infty} n\left(\sqrt[n]{\frac{x}{a}} - 1\right) = \log\frac{x}{a}\,.$$

Analog hat man

$$\int_a^x \log x\,dx = \lim_{q=1} \sum_1^n (aq^i - aq^{i-1}) \log(aq^i)$$

$$= x\log x - a\log a - (x-a)\lim_{q=1}\frac{\log q}{q-1} = x(\log x - 1) - a(\log a - 1).$$

In unbestimmter Form:

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + C, \qquad \int \log x\,dx = x(\log x - 1) + C.$$

Man muß jedoch beachten, daß in diesen Resultaten die Voraussetzung $x > 0$ steckt, da im Gebiet der reellen Zahlen die Funktion $\log x$ für $x < 0$ nicht existiert. So ist z. B. die primitive Funktion von $\frac{1}{x}$ für $x < 0$ nicht $\log x$, sondern $\log(-x)$.

c) Die vorstehende Rechnung ist nicht mehr anwendbar, wenn $a = 0$ ist. Aber aus dem erhaltenen Resultat leitet man, wenn man sich (§ 712) an die notwendige Stetigkeit der Integralfunktionen erinnert, sofort ab

$$\int_0^x \log x\,dx = x(\log x - 1) - \lim_{a=0} a(\log a - 1) = x(\log x - 1).$$

Zu demselben Resultat gelangt man leicht mit Hilfe der Formel (6):

$$\int_0^x \log x\,dx = x\lim_{q=1}\left(\log x + \frac{q\log q}{q-1}\right) = x(\log x - 1)$$

oder in strengerer Weise, unter Benutzung einer früheren Formel (§ 335, c), mit Hilfe von (4):

$$\int_0^x \log x\,dx = \lim_{h=0} h\log(n!\,h^n)$$

$$= \lim_{n=\infty}\frac{x}{n}\left(n\log n - n + \cdots + n\log\frac{x}{n}\right) = x(\log x - 1).$$

d) Leicht ist die Berechnung des Integrals $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\,dx$, wenn (§ 459) die Formel

$$\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$

bekannt ist. Setzt man in der Tat $nh = \frac{\pi}{2}$, so findet man sofort

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\,dx = \lim_{h=0} h\log\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}} = \frac{\pi}{2}\lim_{n=\infty}\log\frac{n^{\frac{1}{2n}}}{2^{1-\frac{1}{n}}} = -\frac{\pi}{2}\log 2.$$

e) Um das Poissonsche Integral $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ zu berechnen, teilen wir das Intervall (x, ∞) in lauter Intervalle, die gleich h sind, und suchen den Grenzwert $\varrho(x)$ von

$$h\left(e^{-(x+h)^2}+e^{-(x+2h)^2}+e^{-(x+3h)^2}+\cdots\right)$$

für nach Null konvergierendes h. Setzt man $e^{-h^2}=q$, so läßt sich $\varrho(0)$ leicht berechnen, indem man sich der Formel (§ 342, c)

$$\lim_{q=1}(q+q^4+q^9+\cdots)\sqrt{1-q}=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

bedient. Man hat in der Tat

$$\varrho(0)=\lim_{h=0}h(q+q^4+q^9+\cdots)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\lim_{h=0}\frac{h}{\sqrt{1-e^{-h^2}}}=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Da nun $e^{-(x+\alpha)^2}<e^{-x^2}\cdot e^{-\alpha^2}$ ist, so ist offenbar

$$0<\varrho(x)<\varrho(0)\,e^{-x^2},\qquad \lim_{x=\infty}\varrho(x)=0;$$

und man kann daher unter Erinnerung an früher Gesagtes (§ 711, d) behaupten, daß

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

ist.

f) Ebenso muß man, um das Dirichletsche Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ zu berechnen, wissen (§ 363), daß man hat

$$\sin h+\tfrac{1}{2}\sin 2h+\tfrac{1}{3}\sin 3h+\cdots=\tfrac{1}{2}(\pi-h),$$

vorausgesetzt, daß h positiv und kleiner als 2π ist. Daraus folgt sofort

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\lim_{h=0}\frac{\pi-h}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

Zu diesem Resultat gelangt Fourier[1]) durch ein ähnliches Verfahren, welches vollkommen der Strenge entbehrt, indem er von der Formel

$$\sin h+\frac{1}{3}\sin 3h+\frac{1}{5}\sin 5h+\cdots=\frac{\pi}{4}(-1)^{\left[\frac{h}{\pi}\right]}$$

ausgeht, die eine einfache Folge der soeben angeführten ist. Teilt man das Intervall $(0, \infty)$ in unendlich viele Intervalle, deren erstes die Größe h hat, während die andern doppelt so groß sind, so findet man als Wert des Integrals

$$\lim_{h=0}\left(\sin h+\frac{2}{3}\sin 3h+\frac{2}{5}\sin 5h+\cdots\right)=\frac{\pi}{2}-\lim_{h=0}\sin h=\frac{\pi}{2}.$$

Man bemerke, daß ebenso

1) „Oeuvres", t. I, p. 402.

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \lim_{h=0} \frac{1}{h}\,(\sin^2 h + \tfrac{1}{4}\sin^2 2h + \tfrac{1}{9}\sin^2 3h + \cdots)$$
$$= \lim_{h=0}\,(\sin 2h + \tfrac{1}{2}\sin 4h + \tfrac{1}{3}\sin 6h + \cdots)$$

ist, mithin

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \lim_{h=0} \frac{\pi - 2h}{2} = \frac{\pi}{2},$$

sodaß beide Integrale gleich $\frac{\pi}{2}$ sind, obwohl das zweite Integral Elemente hat, die dem absoluten Betrage nach kleiner sind als die des ersten. Dies klärt sich auf durch die Bemerkung, daß diese Elemente alle positiv sind, während diejenigen des ersten Integrals in den Intervallen $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, $(2\pi, 3\pi)$, ... abwechselnd positiv und negativ sind.

g) Berechnet man $\int_0^1 \log(-\log x)\,dx$ mit Hilfe der Formel (6), so wird man dazu geführt, den Grenzwert von

$$(1-q)\,\{\log(-\log q) + q\log(-2\log q) + q^2\log(-3\log q) + \cdots\}$$
$$= \log(-\log q) + \sum_1^\infty q^n \log\frac{n+1}{n} = \log\frac{\log q}{q-1} - \sum_1^\infty q^n\left(\frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n}\right)$$

für nach 1 konvergierendes $q < 1$ zu suchen. Auf Grund des Theorems von Abel (§ 340) hat man

$$\lim_{q=1-0} \sum_1^\infty q^n\left(\frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n}\right) = \sum_1^\infty\left(\frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n}\right) = \lim_{n=\infty}(H_n - \log n).$$

Wir wissen (§ 183), daß dieser Grenzwert existiert und die Eulersche Konstante ist. Man erhält auf diese Weise den von Mascheroni gefundenen Wert

$$\int_0^1 \log(-\log x)\,dx = -0{,}577215664\ldots.$$

h) Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, das wichtige Integral $\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}\,dx$ zu berechnen, welches man als Eulersches Integral zweiter Gattung bezeichnet. Sein Wert ist der Grenzwert von

$$h^\mu(1^{\mu-1}e^{-h} + 2^{\mu-1}e^{-2h} + 3^{\mu-1}e^{-3h} + \cdots)$$

für nach Null konvergierendes h, d. h., wenn man $e^{-h} = q$ setzt und ein früheres Resultat (§ 342, f) benutzt,

$$\lim_{q=1} h^\mu\,(1^{\mu-1}q + 2^{\mu-1}q^2 + 3^{\mu-1}q^3 + \cdots) = \Gamma(\mu)\lim_{h=0}\left(\frac{h}{1-e^{-h}}\right)^\mu = \Gamma(\mu).$$

Es ist also

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}\,dx = \Gamma(\mu).$$

i) Aus der bekannten Eigenschaft (§ 164, e) $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$ leitet man unter Erinnerung an eine im § 159 aufgestellte Formel ab

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}} = \frac{(\sqrt{2\pi})^{n-1}}{\sqrt{n}},$$

wie man übrigens auch direkt aus der Definition (§ 252, e) der Funktion Γ herleiten kann. Dies vorausgeschickt hat man

$$\lim_{h=0} h \log \Gamma(h)\,\Gamma(2h)\ldots\Gamma(nh) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n}\left\{(n-1)\log\sqrt{2\pi} - \log\sqrt{n}\right\}$$

und infolgedessen

$$\int_0^1 \log \Gamma(x)\,dx = \log\sqrt{2\pi}\,.$$

Man kann jetzt nach Lerch allgemeiner dasselbe Integral zwischen den Grenzen μ und $\mu+1$ berechnen, was auch $\mu > 0$ sein mag. Bezeichnen wir seinen Wert mit $f(\mu)$ und beachten wir, daß

$$f(\mu) = \int_0^{\mu+1} - \int_0^{\mu}, \qquad f'(\mu) = \log\Gamma(\mu+1) - \log\Gamma(\mu) = \log\mu$$

ist. Daraus folgt auf Grund eines früheren Resultates

$$f(\mu) = \mu(\log\mu - 1) + f(0),$$

und man gelangt so zu der Formel von Raabe

$$\int_\mu^{\mu+1} \log\Gamma(x)\,dx = \mu\log\mu - \mu + \log\sqrt{2\pi}\,.$$

722. Unmittelbare Integration. Die in den vorigen Paragraphen angegebene und entwickelte Methode ist in der Mehrzahl der Fälle praktisch undurchführbar, insofern uns dabei Schwierigkeiten (Bestimmungen von Summen) begegnen, zu deren Überwindung gerade (§ 357) die Kenntnis der primitiven Funktion F der zu integrierenden Funktion f erforderlich ist. Die Vorteile, welche die doppelte Willkürlichkeit, die in dem Teilungsmodus des Integrationsintervalls in infinitesimale Teile und in der Wahl der Funktionswerte liegt, scheinbar bietet, sind rein illusorisch. Welches Gesetz man nämlich auch bei der Teilung des Intervalls befolgen mag, so würde offenbar die beste Art die Werte von f zu wählen gerade darin bestehen, für jedes Teilintervall denjenigen Wert von f zu nehmen, dessen Produkt mit der Größe des Intervalles gleich dem Zuwachs ist, welchen F beim Übergange von einem Ende dieses Intervalles zu dem andern erfährt; denn auf solche Weise würde die Summe, von der man den Grenzwert zu suchen hat, unmittelbar gleich (§ 709) dem Wert des

Integrals werden. Hieraus ersieht man, daß jene Methode wegen ihrer übermäßigen Allgemeinheit uns kein sicheres Mittel liefert, um die wesentliche Schwierigkeit zu überwinden, die gerade auf der Nichtkenntnis der primitiven Funktion F beruht. Man tut also besser, wenn man sich auf die bereits bei der Berechnung der Derivierten erworbenen Kenntnisse (§§ 288—291) verläßt, und kann auf Grund des in § 713 bewiesenen Theorems unmittelbar schreiben:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad \int \frac{dx}{x} = \log|x| + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C.$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C, \quad \int \sin x\, dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

Man muß sich die Werte dieser acht Integrale immer gegenwärtig halten und auf sie durch geeignete Kunstgriffe alle andern Integrale nach Möglichkeit zurückzuführen suchen, die man in der Praxis des Kalküls anzutreffen Gelegenheit hat.

723. Beispiele. a) Es kommen häufig Integrale vor von der Form

$$\int \frac{du}{u} = \log|u| + C.$$

Z. B. ist

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\log|\cos x| + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{1}{2}\,dx}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C,$$

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \left(1 - \frac{e^x}{e^x+1}\right) dx = x - \log(e^x+1) + C,$$

$$\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx = \int \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}\,dx = 2\int \frac{d\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}$$

$$= 2\log\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right) + C = \log(e^x + e^{-x} + 2) + C,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x + 1} = \int \frac{\cos x\, dx}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{2}\int \frac{\cos x + \sin x}{\sin x + \cos x}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\{x + \log|\sin x + \cos x|\} + C.$$

b) Die Berechnung von $\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x}$ läßt sich rasch ausführen, indem man setzt

$$\frac{a}{\cos\alpha} = \frac{b}{\sin\alpha} = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Das Integral wird dann

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{dx}{\sin(x+\alpha)}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\log\left|\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(x+\alpha)\right|+C.$$

Ersetzt man α durch seinen Wert $\operatorname{arc\,tg}(b/a)$, so findet man

$$\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\log\left|\frac{b\sin x-a\cos x+\sqrt{a^2+b^2}}{a\sin x+b\cos x}\right|+C.$$

c) Sehr häufig sind auch die Integrale von der Form

$$\int\frac{du}{\sqrt{u}}=2\sqrt{u}+C.$$

Z. B. ist

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}+C,$$

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx=\int\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$$

Ebenso erhält man, wenn man bemerkt, daß $\int u\,du=\frac{u^2}{2}+C$ ist, unmittelbar die Resultate

$$\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\frac{1}{2}(\arcsin x)^2+C,\qquad\int\frac{\operatorname{arc\,tg}x}{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg}x)^2+C.$$

d) Weitere Übungsbeispiele:

$$\int\operatorname{tg}^2x\,dx=\int\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x}\,dx=\int\frac{dx}{\cos^2x}-\int dx=\operatorname{tg}x-x+C,$$

$$\int\frac{dx}{\sin^2x\cos^2x}=\int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^2x\cos^2x}\,dx=\int\frac{dx}{\cos^2x}+\int\frac{dx}{\sin^2x}=\operatorname{tg}x-\cot x+C,$$

$$\int\cos^2x\,dx=\tfrac{1}{2}\int(1+\cos2x)\,dx=\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}\int\cos2x\,dx=\tfrac{1}{2}(x+\sin x\cos x)+C.$$

Allgemeiner kann man, indem man sich auf die trigonometrische Formel

$$\cos mx\cos nx=\tfrac{1}{2}\{\cos(m-n)x+\cos(m+n)x\}$$

stützt, jedes Integral von der Form $\int\cos\alpha x\cdot\cos\beta x\cdot\cos\gamma x\ldots dx$ berechnen. Ist z. B. das Integral von $\cos x\cos2x\cos3x\cdot dx$ zur Berechnung vorgelegt, so hat man

$$\cos x\cos2x=\tfrac{1}{2}(\cos x+\cos3x),$$

ferner

$$\cos x\cos2x\cos3x=\tfrac{1}{4}(1+\cos2x+\cos4x+\cos6x)$$

und endlich

$$\int\cos x\cos2x\cos3x\cdot dx=\tfrac{1}{4}\left(x+\tfrac{1}{2}\sin2x+\tfrac{1}{4}\sin4x+\tfrac{1}{6}\sin6x\right)+C.$$

e) Andere Integrale sind reduzierbar auf die Form $\int\frac{du}{u^2}=-\frac{1}{u}+C.$

Es sei z. B. zu berechnen das von Hermite[1] vorgelegte Integral

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x\cos x - \sin x)^2}.$$

Schlägt man den äußerst einfachen Weg ein, den W. W. Beman angegeben hat, so kann man zunächst bemerken, daß

$$x\cos x - \sin x = x\sin x\left(\cot x - \frac{1}{x}\right) = \cos x\,(x - \operatorname{tg} x)$$

ist, und die zu integrierende Funktion in

$$\frac{\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}}{\left(\cot x - \dfrac{1}{x}\right)^2} + \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1}{(x - \operatorname{tg} x)^2}$$

zerlegen. Da ferner

$$d\left(\cot x - \frac{1}{x}\right) = \left(-\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{x^2}\right)dx, \qquad d\,(x - \operatorname{tg} x) = \left(1 - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$$

ist, so findet man die primitive Funktion

$$\frac{1}{\cot x - \dfrac{1}{x}} + \frac{1}{x - \operatorname{tg} x} = \frac{x\sin x + \cos x}{x\cos x - \sin x} = \frac{\operatorname{tg} x + \dfrac{1}{x}}{1 - \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}}$$

und endlich

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x\cos x - \sin x)^2} = \operatorname{tg}\left(x + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right) + C.$$

724. Integration durch Substitution. Um $\int f(x)\,dx$ zu berechnen ist es häufig zweckmäßig eine andere Veränderliche $t = \varphi(x)$ anzunehmen. Wenn man aus dieser Relation $x = \psi(t)$ gewinnen kann, sodaß $dx = \psi'(t)\,dt$ ist, so wird offenbar

$$\int f(x)\,dx = \int f(\psi(t))\,\psi'(t)\,dt,$$

und es kann vorkommen, daß das Integral in dieser neuen Form sich leichter berechnen läßt. Wenn die erste Integration sich zwischen den Grenzen a und b erstreckt, so wird sich die zweite von $\varphi(a)$ bis $\varphi(b)$ erstrecken müssen, vorausgesetzt, daß t zwischen diesen Grenzen stets in demselben Sinne variiert und stetig bleibt. Man kann in diesem Falle schreiben

$$(7)\qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)\,dt,$$

wenn man mit $g(t)$ kurz die Funktion $f(\psi(t))\,\psi'(t)$ bezeichnet. Wenn dagegen, während x immer in demselben Sinne von a nach b hin variiert, t zuerst in einem Sinne bis zu $x = c_1$, dann im entgegen-

[1] „Cours d'Analyse de l'École polytechnique", p. 260.

gesetzten Sinne bis $x = c_2$ variiert u. s. w., so muß man die zweite Integration in zwei oder mehr Integrationen spalten, die sich auf Intervalle beziehen, in deren jedem die Bedingung erfüllt ist, daß t in stetiger Weise immer in demselben Sinne variiert; und man wird haben

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(c_1)} g_1(t)\,dt + \int_{\varphi(c_1)}^{\varphi(c_2)} g_2(t)\,dt + \cdots,$$

wenn man $g_1(t)$ das auf Grund des Ausdrucks $\psi_1(t)$ von x in dem Intervall (a, c_1) berechnete $g(t)$ nennt, während $g_2(t)$ auf Grund des Ausdrucks $\psi_2(t)$ von x in (c_1, c_2) berechnet ist, u. s. w. Wenn z. B. t, während x von a nach b hin variiert, von dem Werte $\alpha = \varphi(a)$ ausgeht und wieder zu diesem Werte $\alpha = \varphi(b)$ zurückkehrt, indem es durch ein Minimum oder durch ein Maximum $\beta = \varphi(c)$ hindurchgeht, so ist klar, daß die Werte von x in dem Intervall (a, c) durch eine Funktion $\psi_1(t)$ dargestellt werden und in dem Intervall (c, b) durch eine andere Funktion $\psi_2(t)$, da jedem zwischen α und β enthaltenen Wert von t zwei Werte von x entsprechen müssen. Daraus folgt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta g_1(t)\,dt + \int_\beta^\alpha g_2(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \{g_1(t) - g_2(t)\}\,dt,$$

während, wenn man es unterlassen hätte diese Bemerkung zu machen, man in den ungeheuerlichen Irrtum verfallen könnte zu behaupten, daß das Integral verschwindet, weil $\int_\alpha^\alpha = 0$ ist. Dies dient dazu zu zeigen, wie notwendig es ist, wenn man die Grenzen der neuen Integration feststellen will, aufmerksam die Art und Weise des Variierens der neuen Veränderlichen zu studieren. Wenn ferner diese Veränderliche Unstetigkeiten hätte, z. B. eine gewöhnliche Unstetigkeit im Punkte $x = c$, so müßte man offenbar schreiben

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(c-0)} g(t)\,dt + \int_{\varphi(c+0)}^{\varphi(b)} g(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)\,dt - \int_{\varphi(c-0)}^{\varphi(c+0)} g(t)\,dt.$$

Dies trifft auch zu, wenn $\varphi(x)$ bei $x = c$ einen Zeichenwechsel erfährt und unendlich wird, in welchem Falle man hat

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\pm\infty} g(t)\,dt + \int_{\mp\infty}^{\varphi(b)} g(t)\,dt.$$

Man gelangt auf diese Weise zu einem Wert, der im allgemeinen von demjenigen verschieden ist, welchen man bei blinder Anwendung der Formel (7) erhalten würde, da er davon um $G(\pm\infty) - G(\mp\infty)$ abweicht, wenn $G(t)$ das unbestimmte Integral von $g(t)\,dt$ ist.

725. Beispiele. a) Setzt man der Reihe nach $x = at$, a/t, $a(1-t)$, so lassen sich folgende Integrale berechnen:

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg} t + C = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \mp\frac{1}{a}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \pm\frac{1}{a}\arccos t + C = \pm\frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \mp\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \pm\arccos t + C = \pm\arccos\frac{a-x}{a} + C.$$

Bei dem letzten Beispiel müssen die oberen Zeichen oder die unteren Zeichen genommen werden, je nachdem a positiv oder negativ ist. Dasselbe muß man bei dem vorletzten Beispiel tun, je nachdem man die Integration über positive oder über negative Werte von x erstrecken will; und man geht übrigens von dem einen dieser Fälle zu dem andern über, indem man x in $-x$ verwandelt und bemerkt, daß

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

ist. Das doppelte Zeichen rührt von den Quadratwurzeln her, welche immer mit dem Zeichen $+$ genommen vorausgesetzt werden, sodaß man z. B. hat $\sqrt{cx^2} = \pm x\sqrt{c}$ und nicht $\sqrt{cx^2} = x\sqrt{c}$.

b) Mit Hilfe der Substitution $x = \cos\theta$ berechnet man folgende andern Integrale:

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = -2\int \sin^2\frac{\theta}{2}\,d\theta = -(\theta - \sin\theta) + C = \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C',$$

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx = -\int \sin^2\theta\,d\theta = -\tfrac{1}{2}(\theta - \sin\theta\cos\theta) + C$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C',$$

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\int \cos^2\theta\,d\theta = -\tfrac{1}{2}(\theta + \sin\theta\cos\theta) + C$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(\arcsin x - x\sqrt{1-x^2}\right) + C'.$$

Um dagegen $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ zu berechnen ist es zweckmäßig $x = \cot\theta$ zu setzen und anzunehmen $\sin\theta > 0$, wodurch die Variabilität von x nicht eingeschränkt wird. Das Integral verwandelt sich in

$$-\int\frac{d\theta}{\sin\theta} = \log\cot\frac{\theta}{2} + C = \log\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} + C.$$

Also ist

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C.$$

c) Wir wollen uns die Aufgabe stellen $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$ zu berechnen. Multipliziert man Zähler und Nenner mit $\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$, so verwandelt sich das Integral in

$$\frac{1}{2}\int\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)\frac{dx}{x^2}$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Von diesen vier Integralen transformieren sich das erste und das zweite mit Hilfe der Substitution $x = 1/t$ in

$$-\int\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+1}}=-\sqrt{t^2+1}+c', \qquad -\int\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2-1}}=-\sqrt{t^2-1}+c'';$$

das dritte ist bereits früher berechnet worden, und das vierte hat den Wert $\arcsin x + c'''$. Also ist

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$$
$$=-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\frac{1}{2}\arcsin x + C.$$

d) Um $\int\frac{dx}{x^2+px+q}$ zu berechnen, nehmen wir zunächst an $q > \frac{1}{4}p^2$ und setzen $x+\frac{1}{2}p = t\sqrt{q-\frac{1}{4}p^2}$, sodaß $dx = \sqrt{q-\frac{1}{4}p^2}\cdot dt$ und

$$x^2+px+q=(x+\tfrac{1}{2}p)^2+(q-\tfrac{1}{4}p^2)=(q-\tfrac{1}{4}p^2)(1+t^2)$$

wird. Man erhält dann sofort

$$\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{1}{\sqrt{q-\frac{1}{4}p^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+\frac{1}{2}p}{\sqrt{q-\frac{1}{4}p^2}}+C.$$

Wenn dagegen $q < \frac{1}{4}p^2$ ist, so setze man $x+\frac{1}{2}p = t\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$. Das gegebene Integral transformiert sich in

$$\int\frac{dt}{t^2-1}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t+1}=\frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C,$$

geteilt durch $\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$. Also ist

$$\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}}\log\left|\frac{x+\frac{1}{2}p-\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}}{x+\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}}\right|+C.$$

Übrigens sind die beiden Formen des Integrals äquivalent auf Grund der Relationen

$$\operatorname{arc\,tg} x=\frac{1}{2i}\log\frac{1+ix}{1-ix}, \qquad \log x = 2i\operatorname{arc\,tg}\left(i\frac{1-x}{1+x}\right),$$

die sich leicht aus einer bekannten Formel von Euler herleiten lassen (§§ 406, 411).

e) Gewissermaßen ohne Rechnung lassen sich die Werte der Integrale

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx, \qquad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx$$

bestimmen, indem man beachtet, daß sich jedes von ihnen in das andere verwandelt, wenn man x durch $\frac{\pi}{2} - x$ ersetzt, und daß ihre Summe $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$ ist. Der gemeinsame Wert der beiden Integrale ist also $\frac{\pi}{4}$. Ebenso erhält man, indem man x in $\pi - x$ verwandelt, sofort

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx = \int\limits_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\operatorname{arc\,tg} \cos x\right)_{\pi}^{0} = \frac{\pi^2}{4}.$$

f) In ganz analoger Weise gelingt die Bestimmung des Integrals $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx$, welches wir schon früher berechnet haben (§ 721, d). Man hat

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x\, dx = \tfrac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x \cos x)\, dx,$$

d. h., wenn man in dem letzten Integral x in $\frac{1}{2}x$ verwandelt,

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi} \log\left(\frac{1}{2}\sin x\right) dx = -\frac{\pi}{4}\log 2 + \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi} \log \sin x\, dx.$$

Wenn man ferner x in $\pi - x$ verwandelnd bemerkt, daß

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log \sin x\, dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx$$

ist, so kann man auch schreiben

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx = -\frac{\pi}{4}\log 2 + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx,$$

woraus man entnimmt

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx = -\frac{\pi}{2}\log 2.$$

g) In ähnlicher Weise erhält man durch Verwandlung von x in $1 - x$

$$\int\limits_0^{1} \log \Gamma(x)\, dx = \int\limits_0^{1} \log \Gamma(1 - x)\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{1} \log \frac{\pi}{\sin \pi x}\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\log \pi - \tfrac{1}{2}\int\limits_0^{1} \log \sin \pi x\, dx.$$

Das letzte Integral wird, wenn man darin $\pi x = \theta$ setzt,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \log\sin\theta\, d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\theta\, d\theta = -\log 2.$$

Also ist (vgl. § 721, i)

$$\int_0^1 \log\Gamma(x)\, dx = \log\sqrt{2\pi}.$$

h) Es sei zur Berechnung vorgelegt $\int_0^{\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)} dx$. Dieses Integral reduziert sich für $a = 0$ auf das Poissonsche Integral (§ 721, e). Man nehme an $a > 0$ und verwandele x in a/x. Dann transformiert sich unser Integral in $-\int_0^{\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)} d\frac{a}{x}$ und ist folglich gleich

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)} d\left(x-\frac{a}{x}\right) = \frac{1}{2}e^{-2a}\int_0^{\infty} e^{-\left(x-\frac{a}{x}\right)^2} d\left(x-\frac{a}{x}\right).$$

Nun beachte man, daß, wenn $x - \frac{a}{x}$ in x verwandelt wird, die neue Veränderliche x offenbar beständig wachsend von $-\infty$ nach ∞ geht, wenn die alte von 0 nach ∞ geht, sodaß

$$\int_0^{\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)} dx = \frac{1}{2}e^{-2a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2e^{2a}}$$

ist.

i) Um $\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x\, dx}{1 - k\cos x}$ zu berechnen, wo k dem absoluten Betrage nach kleiner als 1 vorauszusetzen ist, halbiere man das Integrationsintervall und verwandele in der rechten Hälfte x in $\pi - x$. Das Integral wird

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x\, dx}{1 - k\cos x} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x\, dx}{1 + k\cos x} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x\, dx}{1 - k^2\cos^2 x}.$$

Setzt man $\operatorname{tg} x = t$, so verwandelt sich das letzte Integral in

$$\int_0^{\infty} \frac{t^2\, dt}{(1-k^2+t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{k^2}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1-k^2}{1-k^2+t^2}\right) dt$$

$$= \frac{1}{k^2}\left(\operatorname{arc\,tg} t - \sqrt{1-k^2}\,\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{1-k^2}}\right)_0^{\infty} = \frac{\pi}{2k^2}\left(1 - \sqrt{1-k^2}\right),$$

sodaß

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2 x\, dx}{1 - k\cos x} = \frac{\pi}{1 + \sqrt{1 - k^2}}$$

ist.

j) Um zu zeigen, wie vorsichtig man, wenn die Integrationsvariable geändert wird, bei der Fixierung der neuen Grenzen sein muß, bemerken wir folgendes. Beachtete man nur den Anfangs- und den Endwert der neuen Veränderlichen, so würde man Gefahr laufen absurde Resultate zu finden wie dieses:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-1}^{+1} \frac{d\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = -\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1+x^2} = 0.$$

Offenbar ist der Wert des Integrals $\operatorname{arc\,tg} 1 - \operatorname{arc\,tg}(-1) = \frac{\pi}{2}\cdot$ Der Irrtum liegt darin, daß das Intervall $(-1, 1)$, wenn man x in $1/x$ verwandelt, sich nicht in sich selbst transformiert, sondern vielmehr in $(-1, -\infty) + (\infty, 1)$, sodaß man hat

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-1}^{-\infty} \frac{d\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} + \int_{\infty}^{1} \frac{d\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}},$$

und wenn man noch in dem ersten der beiden Integrale rechts x in $-x$ verwandelt,

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = 2\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

k) Wenn sich ein Integral von der Form

$$(8) \qquad \int_a^b \frac{\varphi'(x)\, dx}{1+\varphi^2(x)}$$

bietet, so wird man naturgemäß dazu geführt, als neue Veränderliche $t = \varphi(x)$ einzuführen. Man erhält auf diese Weise, unter der Voraussetzung, daß $\varphi(x)$ in (a, b) endlich und stetig bleibt, sofort als Wert des Integrals

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arc\,tg} \varphi(b) - \operatorname{arc\,tg} \varphi(a).$$

Wenn aber $\varphi(x)$ zwischen den Integrationsgrenzen Unstetigkeiten erleidet, so muß man sich an die am Schlusse des vorigen Paragraphen gemachten Bemerkungen erinnern. Wenn z. B. die Funktion φ nur in einem einzigen Punkte c zwischen a und b ihr Zeichen wechselt, indem sie durch Unendlich hindurchgeht, so spaltet sich das vorgelegte Integral in

$$\int_{\varphi(a)}^{\pm\infty} d\operatorname{arc\,tg} t + \int_{\mp\infty}^{\varphi(b)} d\operatorname{arc\,tg} t = \left(\pm\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\varphi(a)\right) + \left(\operatorname{arc\,tg}\varphi(b) \pm \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \operatorname{arc\,tg}\varphi(b) - \operatorname{arc\,tg}\varphi(a) \pm \pi.$$

Wenn daher allgemeiner beim stetigen Wachsen der Veränderlichen x von a bis b die Funktion $\varphi(x)$ gerade k-mal unendlich wird, indem sie vom Positiven zum Negativen übergeht, und k'-mal, indem sie vom Negativen zum Positiven übergeht, so hat man

$$\int_a^b \frac{\varphi'(x)\,dx}{1+\varphi^2(x)} = \operatorname{arc\,tg}\varphi(b) - \operatorname{arc\,tg}\varphi(a) + (k-k')\pi.$$

l) Demselben Typus (8) kann man das Integral $\int_0^x \frac{dx}{1+(x-[x])^2}$ unterordnen, da die Funktion $\varphi(x) = x - [x]$ die Derivierte $\varphi'(x) = 1$ hat, außer links von jedem ganzzahligen Wert von x, wo die Stetigkeit von φ aufhört. An diesen Unstetigkeiten liegt es, daß für $x \geqq 1$ der Wert des Integrals nicht $\operatorname{arc\,tg}(x-[x])$ ist, wie man leicht konstatiert, indem man schreibt

$$\int_0^x \frac{dx}{1+(x-[x])^2} = \sum_{\nu=0}^{\nu=[x]-1} \int_\nu^{\nu+1} \frac{dx}{1+(x-\nu)^2} + \int_{[x]}^x \frac{dx}{1+(x-[x])^2}$$
$$= \sum_{\nu=0}^{\nu=[x]-1} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{x-[x]} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg}(x-[x]) + \frac{1}{4}\pi[x].$$

Allgemeiner ist

$$\int_0^x f(x-[x])\,dx = [x]\int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^{x-[x]} f(x)\,dx.$$

m) Das Integral $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}$ läßt sich unmittelbar berechnen mit Hilfe der Substitution $x^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta$, welche es in $\int d\theta$ überführt, sodaß

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}} = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{x^2-a^2}{b^2-x^2}} + C$$

ist. Ebenso setze man, um $\int \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,x\,dx$ zu berechnen,

$$x = a\cos^2\frac{\theta}{2} + b\sin^2\frac{\theta}{2},$$

woraus folgt

$$x-a=(b-a)\sin^2\frac{\theta}{2}, \quad b-x=(b-a)\cos^2\frac{\theta}{2}, \quad dx=\frac{1}{2}(b-a)\sin\theta\,d\theta.$$

Das vorgelegte Integral wird

$$\frac{b-a}{8}\int\left(a+3b-4b\cos\theta+(b-a)\cos 2\theta\right)d\theta$$

$$=\frac{b-a}{8}\left((a+3b)\theta-4b\sin\theta+(b-a)\sin\theta\cos\theta\right)+C,$$

mithin

$$\int\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,x\,dx=\frac{1}{4}(b-a)(a+3b)\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}$$

$$+\tfrac{1}{4}(a-3b-2x)\sqrt{(x-a)(b-x)}+C.$$

Insbesondere ist

$$\int_a^b\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,x\,dx=\frac{\pi}{8}(b-a)(a+3b).$$

n) Dieselbe Substitution kann zur Berechnung des Integrals

$$\mathfrak{J}=\int_a^b\left[(x-a)(b-x)\right]^{-\frac{3}{2}}e^{-\left(\frac{\alpha^2}{x-a}+\frac{\beta^2}{b-x}\right)}dx$$

dienen, auf welches Beltrami bei der Behandlung eines Problems der Wärmeausbreitung[1]) geführt wurde. Wir wollen hier aber den Weg einschlagen, der von Beltrami selbst angegeben worden ist, indem wir als Integrationsvariable

$$t=\frac{1}{2}\log\left(\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{x-a}{b-x}\right)$$

mit positiven α und β annehmen. Da

$$\frac{x-a}{\alpha e^t}=\frac{b-x}{\beta e^{-t}}=\frac{b-a}{\alpha e^t+\beta e^{-t}}$$

ist, so findet man sofort

$$2\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x-a}+\frac{1}{b-x}=\frac{(\alpha e^t+\beta e^{-t})^2}{\alpha\beta(b-a)},$$

mithin

$$\mathfrak{J}=\frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}}(b-a)^{-2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta\left(e^{2t}+e^{-2t}\right)}{b-a}}\cdot(\alpha e^t+\beta e^{-t})\,dt.$$

Man braucht nur t in $-t$ zu verwandeln und das arithmetische Mittel der beiden Ausdrücke zu nehmen, um zu finden

$$\mathfrak{J}=\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}(b-a)^{-2}e^{-\frac{(\alpha+\beta)^2}{b-a}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\alpha\beta}{b-a}\left(e^t-e^{-t}\right)^2}d\left(e^t-e^{-t}\right).$$

Es ist natürlich als neue Integrationsvariable $\theta=\sqrt{\frac{\alpha\beta}{b-a}}(e^t-e^{-t})$ anzunehmen, die offenbar beständig wachsend von $-\infty$ nach $+\infty$ variiert,

1) „Memorie dell' Accademia di Bologna" (4ª serie, t. VIII).

sodaß man unter Erinnerung an den Wert des Poissonschen Integrals (§ 721, e) erhält

$$\mathfrak{J} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}(b-a)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{(\alpha+\beta)^2}{b-a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta^2}\, d\theta = \sqrt{\pi}\, \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}(b-a)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{(\alpha+\beta)^2}{b-a}}.$$

o) Es ist leicht die Kroneckersche Funktion (§ 254, e) auf die Form eines bestimmten Integrals zu bringen. Verwandelt man in dem Dirichletschen Integral (§ 721, f) x in $\pm kx$, je nachdem k positiv oder negativ ist, so erhält man

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \pm \int_0^\infty \frac{\sin kx}{x}\, dx,$$

und da für $k = 0$ das zweite Integral null ist, so sieht man, daß

$$\operatorname{sgn} k = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin kx}{x}\, dx. \tag{9}$$

In analoger Weise zeigt man, daß

$$|k| = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin^2 kx}{x^2}\, dx \tag{10}$$

ist. Aus diesen Resultaten lassen sich leicht andere, etwas allgemeinere ableiten. Wir wollen uns z. B. die Aufgabe stellen die Integrale

$$\int_0^\infty \sin\alpha x \cdot \cos\beta x \cdot \frac{dx}{x}, \qquad \int_0^\infty \sin\alpha x \cdot \sin\beta x \cdot \frac{dx}{x^2} \tag{11}$$

zu berechnen, die sich für $\beta = 0$ bezw. $\beta = \alpha$ auf die Integrale (9) und (10) reduzieren. Das erste spaltet sich sofort in

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin(\alpha+\beta)x}{x}\, dx + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin(\alpha-\beta)x}{x}\, dx,$$

und es ist daher nach (9)

$$\int_0^\infty \sin\alpha x \cdot \cos\beta x \cdot \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{4}\{\operatorname{sgn}(\alpha+\beta) + \operatorname{sgn}(\alpha-\beta)\}.$$

Mit andern Worten, das betrachtete Integral hat bezüglich die Werte $\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha$, $\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}\alpha$, 0, je nachdem der absolute Betrag von β kleiner, gleich oder größer als der von α ist. Ebenso spaltet sich das zweite Integral (11) in

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 \frac{\alpha+\beta}{2} x}{x^2}\, dx - \int_0^\infty \frac{\sin^2 \frac{\alpha-\beta}{2} x}{x^2}\, dx$$

und hat daher nach (10) den Wert $\frac{\pi}{4}\{|\alpha+\beta|-|\alpha-\beta|\}$. Mit andern Worten, wenn mit α die dem absoluten Betrage nach kleinste der Zahlen α, β bezeichnet wird, so hat man

$$\int_0^\infty \sin\alpha x \cdot \sin\beta x \cdot \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2}\pi\alpha \operatorname{sgn}\beta.$$

Unzählige andere Integrale lassen sich aus den obigen mit Hilfe der Trigonometrie gewinnen. Erhebt man z. B. (§ 407) $2i\sin x = e^{ix} - e^{-ix}$ zur n-ten Potenz, so findet man für ungerades n

$$\sin^n x = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}}\left\{\sin nx - \frac{n}{1}\sin(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\sin(n-4)x - \cdots \pm \cdots \sin x\right\}.$$

Multipliziert man beide Seiten mit $\sin x \frac{dx}{x^2}$ und integriert, so erhält man unter Zuhilfenahme der am Schluß von § 332 angegebenen Identität

$$1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{2} - \cdots \pm \frac{n(n-1)\cdots(n-\nu+1)}{1\cdot 2\cdots \nu} = \pm\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-\nu)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots \nu},$$

wenn man noch n in $2n-1$ und x in $1/x$ verwandelt,

$$\int_0^\infty \left(\sin\frac{1}{x}\right)^{2n} dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

In dem Maße als n wächst, konvergiert das Integral nach Null, und zwar asymptotisch zu $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$.

726. Partielle Integration. Es seien u und v zwei Funktionen von x. Aus der Formel $duv = udv + vdu$ leitet man durch Integration ab

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{12}$$

Diese Formel gestattet $\int u\,dv$ zu berechnen, wenn $\int v\,du$ bekannt ist. Das nennt man partiell integrieren. Ist eine Integration vorgelegt, so kann man auf unendlich viele Arten der zu integrierenden Funktion die Form $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$ geben derart, daß $\psi(x)dx$ das Differential einer bekannten Funktion v ist; man muß aber darauf achten $\psi(x)$ so zu wählen, daß die Integration von $v\varphi'(x)dx$ leichter ist als die von $f(x)dx$. Man sieht also, daß die partielle Integration (ebenso wie die Integration durch Substitution) nur als ein Verfahren zu betrachten ist, welches dazu dienen kann, die Berechnung eines Integrals zu erleichtern, indem es dasselbe für die unmittelbare Integration vorbereitet. Nicht selten kommt jedoch der Fall vor, daß auf der rechten Seite von (12) das Integral, welches man berechnen will, selbst erscheint, mit einem von der Einheit verschiedenen Koeffizienten. In solchen Fällen wird die partielle Integration zu einer wahren und eigentlichen Integrationsmethode, da man alsdann aus der Relation (12) ohne weitere Rechnungen den Wert des vorgelegten Integrals gewinnt.

727. Beispiele. a) Man berechnet sofort das Integral von $\sqrt{1-x^2}\cdot dx$, indem man schreibt

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} + \int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Das zweite Integral spaltet sich in

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x - \int\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Also ist (vgl. § 725, b)

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right) + C.$$

b) Um die Integrale von $\sin\log x\cdot dx$ und $\cos\log x\cdot dx$ zu berechnen, bemerke man, daß die partielle Integration, angewandt auf beide, ergibt

$$\int\sin\log x\cdot dx = x\sin\log x - \int\cos\log x\cdot dx,$$

$$\int\cos\log x\cdot dx = x\cos\log x + \int\sin\log x\cdot dx.$$

Daraus entnimmt man

$$\int\sin\log x\cdot dx = \frac{x}{2}(\sin\log x - \cos\log x) + C,$$

$$\int\cos\log x\cdot dx = \frac{x}{2}(\sin\log x + \cos\log x) + C.$$

Ebenso erhält man bei Anwendung der partiellen Integration auf die Integrale von $e^x\sin x\,dx$, $e^x\cos x\,dx$

$$\int e^x\sin x\,dx = -e^x\cos x + \int e^x\cos x\,dx,$$

$$\int e^x\cos x\,dx = e^x\sin x - \int e^x\sin x\,dx,$$

mithin

$$\int e^x\sin x\,dx = \tfrac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C,$$

$$\int e^x\cos x\,dx = \tfrac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C.$$

Übrigens sind diese Integrale nicht wesentlich verschieden von den vorigen, auf die sie sich in der Tat durch die Substitution $x = \log t$ reduzieren.

c) Analog hat man

$$\int\cos^2 x\,dx = \int\cos x\,d\sin x = \sin x\cos x + x - \int\cos^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}(x + \sin x\cos x) + C.$$

$$\int x\cos x\,dx = \int x\,d\sin x = x\sin x - \int\sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C.$$

$$\int x^2 \sin x\, dx = \int x^2\, d(-\cos x) = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\, dx$$
$$= 2x \sin x + (2 - x^2)\cos x + C,$$

$$\int x^n \cos x\, dx = x^n \sin x - n\int x^{n-1} \sin x\, dx$$
$$= x^n \sin x + n x^{n-1} \cos x - n(n-1)\int x^{n-2} \cos x\, dx$$
$$= (x^n - n(n-1)x^{n-2} + \cdots)\sin x + (n x^{n-1} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} + \cdots)\cos x + C,$$

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\, dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x\, dx}{1+x^2} = x \operatorname{arc\,tg} x - \log\sqrt{1+x^2} + C,$$

$$\int \log(x + \sqrt{1+x^2})\, dx = x \log(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C,$$

$$\int \log(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})\, dx = x \log(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) + \tfrac{1}{2}(\arcsin x - x) + C.$$

$$\int \frac{e^{2x}\, dx}{\sqrt{e^x - 1}} = 2\int e^x\, d\sqrt{e^x - 1} = 2e^x\sqrt{e^x-1} - 2\int e^x \sqrt{e^x - 1}\, dx$$
$$= 2e^x\sqrt{e^x - 1} - 2\int \frac{e^{2x}\, dx}{\sqrt{e^x - 1}} + 2\int \frac{e^x\, dx}{\sqrt{e^x - 1}} = \frac{2}{3}(e^x + 2)\sqrt{e^x - 1} + C.$$

d) Um das Integral von $\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} e^x\, dx$ zu berechnen[1]), wende man die partielle Integration an

$$\int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} e^x\, dx = \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} e^x - \int \frac{1 + \cos x + \sin x}{(1 + \cos x)^2} e^x\, dx$$

und gebe dem letzten Differentialausdruck die Form

$$\frac{e^x\, dx}{1 + \cos x} + \frac{e^x \sin x\, dx}{(1 + \cos x)^2} = \frac{d e^x}{1 + \cos x} + e^x d\frac{1}{1 + \cos x} = d\frac{e^x}{1 + \cos x}.$$

Daraus folgt

$$\int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} e^x\, dx = e^x \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$$

Man könnte auch die partielle Integration vermeiden, indem man Zähler und Nenner mit $1 - \cos x$ multipliziert und den zu integrierenden Ausdruck in

$$\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) e^x\, dx + \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x}\right) e^x\, dx = -d(e^x \cot x) + d\frac{e^x}{\sin x}$$

spaltet.

e) Ist das Integral von $x^m \log^n x\, dx$ für $m > -1$ zu berechnen und n eine positive ganze Zahl, so findet man durch partielle Integration und durch wiederholte Anwendung des ersten Resultates, welches man erhält,

$$\int x^m \log^n x \cdot dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\log^n x - \frac{n}{m+1}\int x^m \log^{n-1} x \cdot dx$$
$$= \frac{x^{m+1}}{m+1}\left(\log^n x - \frac{n}{m+1}\log^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{(m+1)^2}\log^{n-2} x - \cdots \pm \frac{n!}{(m+1)^n}\right) + C.$$

1) Das Beispiel stammt aus dem „Glasgow University Calendar" (1901—02), wo der Leser noch andere nützliche Exempel finden kann.

Da für jedes $\nu > 0$ und für $m > -1$ die Funktion $x^{m+1}\log^\nu x$, die für $x = 1$ null ist, rechts von 0 dem Grenzwert Null zustrebt (§ 312, a), so hat man insbesondere

$$(13)\qquad \int_0^1 x^m \log^n x \cdot dx = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

Analog erhält man

$$\int x^n e^{-x}\,dx = -x^n e^{-x} + n\int x^{n-1}e^{-x}\,dx$$
$$= -(x^n + nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + \cdots + n!)e^{-x} + C,$$

und insbesondere, wenn man bemerkt (§ 312, a), daß für jedes $\nu > 0$ $(x^\nu e^{-x})_0^\infty = 0$ ist,

$$(14)\qquad \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n!\,(e^{-x})_\infty^0 = n!$$

Wenn dieses Resultat bekannt ist, so kann man sich seiner leicht bedienen, um das Integral (13) zu berechnen. Man macht zu dem Zweck die Substitution $x = e^{-\frac{t}{m+1}}$. In der Tat wird dann

$$\int_0^1 x^m \log^n x\,dx = \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}}\int_0^\infty t^n e^{-t}\,dt = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

Übrigens ist die Formel (14) in einer andern, früher bewiesenen (§ 721, h) enthalten, da $n!$ der Wert $\Gamma(n+1)$ für ganzzahliges n ist.

f) Die partielle Integration liefert, angewandt auf die Integrale

$$a_n = \int_0^\infty x^n e^{-x}\cos x\,dx, \qquad b_n = \int_0^\infty x^n e^{-x}\sin x\,dx,$$

folgendes:

$$a_n = (x^n e^{-x}\sin x)_0^\infty - \int_0^\infty (nx^{n-1} - x^n)\,e^{-x}\sin x\,dx,$$

$$b_n = (x^n e^{-x}\cos x)_\infty^0 + \int_0^\infty (nx^{n-1} - x^n)\,e^{-x}\cos x\,dx,$$

d. h.

$$a_n = b_n - nb_{n-1}, \qquad b_n = -a_n + na_{n-1}.$$

Diese Relationen lassen sich in die eine $c_n = \frac{1}{2}(1+i)\,nc_{n-1}$ zusammenfassen, wenn man setzt $c_n = a_n + ib_n$ mit $i^2 = -1$. Daraus folgt, wenn man bemerkt, daß $c_0 = \frac{1}{2}(1+i)$ ist,

$$c_n = n!\left(\frac{1+i}{2}\right)^{n+1} = n!\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)^{n+1} = \frac{n!}{2^{\frac{n+1}{2}}}e^{(n+1)\frac{i\pi}{4}}.$$

Also ist

$$a_n = \frac{n!}{2^{\frac{n+1}{2}}} \cos(n+1)\frac{\pi}{4}, \qquad b_n = \frac{n!}{2^{\frac{n+1}{2}}} \sin(n+1)\frac{\pi}{4} \cdot$$

Allgemeiner hat man, wenn $\cos\alpha > 0$ ist,

$$\int_0^\infty x^n e^{-x\cos\alpha} \cos(x\sin\alpha)\, dx = n!\cos(n+1)\alpha,$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-x\cos\alpha} \sin(x\sin\alpha)\, dx = n!\sin(n+1)\alpha.$$

Aus diesen Formeln ergeben sich die vorigen, indem man $\alpha = \frac{\pi}{4}$ nimmt und x in $x\sqrt{2}$ verwandelt.

g) Es sei zur Berechnung vorgelegt das Integral von $\sin^n x \cdot dx$ (für ganzzahliges positives n) zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$. Die partielle Integration gibt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \cdot d(-\cos x) = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x\, dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\, dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx,$$

woraus man entnimmt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\, dx = \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-4} x\, dx = \cdots,$$

sodaß man schließlich eins der folgenden Integrale findet

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = 1,$$

je nachdem n gerade oder ungerade ist. Man hat also

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = \left| \begin{array}{ll} \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots n}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{wenn } n \text{ gerade,} \\[2ex] \dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(n-1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots n}, & \text{wenn } n \text{ ungerade ist.} \end{array} \right.$$

Hieraus ist leicht die Formel von Wallis (§ 464, a) abzuleiten, wenn man von den evidenten Ungleichungen ausgeht

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \cdot dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \cdot dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x \cdot dx,$$

welche sich jetzt in folgende andern verwandeln lassen:

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}.$$

Daraus folgt

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1}.$$

Bemerkt man also, daß für unendliches n der Quotient $2n/(2n+1)$ nach der Einheit konvergiert, so erkennt man, daß

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdots$$

ist. Hiernach ist leicht zu konstatieren (§ 337, c), daß mit wachsendem n die beiden Ausdrücke (15) die Tendenz haben, beide die Form $\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ anzunehmen, d. h. daß man hat

$$\lim_{n=\infty} \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cdot dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

h) Das Integral $\mathfrak{J}_n = \int_0^\infty x^n e^{-x^2} dx$ ist uns für $n = 0$ bekannt (§ 721, e) und läßt sich für $n = 1$ leicht berechnen, da man hat

$$\mathfrak{J}_1 = \tfrac{1}{2} \int_0^\infty e^{-x^2} d(x^2) = \tfrac{1}{2} (e^{-x^2})_\infty^0 = \tfrac{1}{2}.$$

Übrigens gibt die Verwandlung von x in $\sqrt{x}$, was auch n sein mag, $\mathfrak{J}_n = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$. Nimmt man aber an, daß diese Relation unbekannt ist, so läßt sich der Wert von $\mathfrak{J}_n$ für ganzzahliges n in folgender Weise durch partielle Integration berechnen:

$$\mathfrak{J}_n = \frac{1}{2} \int_0^\infty x^{n-1} d(-e^{-x^2}) = \frac{1}{2} (x^{n-1} e^{-x^2})_\infty^0 + \frac{n-1}{2} \int_0^\infty x^{n-2} e^{-x^2} dx = \frac{n-1}{2} \mathfrak{J}_{n-2},$$

$$(16) \qquad \mathfrak{J}_n = \begin{cases} \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)}{2^{\frac{n}{2}}} \mathfrak{J}_0, & \text{wenn } n \text{ gerade,} \\[2ex] \dfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (n-1)}{2^{\frac{n+1}{2}}}, & \text{wenn } n \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Um nunmehr $\mathfrak{J}_0$ zu berechnen, bemerke man[1], daß der Ausdruck

$$\mathfrak{J}_{n+1} + 2\alpha \mathfrak{J}_n + \alpha^2 \mathfrak{J}_{n-1} = \int_0^\infty x^{n-1} (x+\alpha)^2 e^{-x^2} dx$$

---

1) Stieltjes: „Nouv. Annales de Mathématiques" (1890, p. 479).

für alle reellen Werte von α positiv ist, und daß hierzu nötig ist $\mathfrak{J}_{n-1}\mathfrak{J}_{n+1} > \mathfrak{J}_n^2$, d. h.

$$\frac{\mathfrak{J}_{n-1}}{\mathfrak{J}_n} > \frac{\mathfrak{J}_n}{\mathfrak{J}_{n+1}}, \quad \text{während} \quad \frac{\mathfrak{J}_{n-1}}{\mathfrak{J}_{n+1}} = \frac{\mathfrak{J}_{n-1}}{\mathfrak{J}_n} \cdot \frac{\mathfrak{J}_n}{\mathfrak{J}_{n+1}} = \frac{2}{n}.$$

Man hat also

$$\frac{\mathfrak{J}_{n-1}}{\mathfrak{J}_n} > \sqrt{\frac{2}{n}} > \frac{\mathfrak{J}_n}{\mathfrak{J}_{n+1}}$$

und infolgedessen successiv

$$\sqrt{\frac{2}{n}} > \frac{\mathfrak{J}_n}{\mathfrak{J}_{n+1}} > \sqrt{\frac{2}{n+1}}, \quad \lim_{n=\infty} \frac{\mathfrak{J}_n \sqrt{n}}{\mathfrak{J}_{n+1}} = \sqrt{2}, \quad \lim_{n=\infty} \frac{\mathfrak{J}_{2n}\sqrt{n}}{\mathfrak{J}_{2n+1}} = 1.$$

Es genügt jetzt die Ausdrücke (16) in die letzte Gleichung einzusetzen, um zu erhalten (§ 337, c)

$$\mathfrak{J}_0 = \frac{1}{2} \lim \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Ferner ist leicht zu konstatieren, daß die Ausdrücke (16) für unendliches n beide die asymptotische Form

$$\mathfrak{J}_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}\left(\frac{n}{2e}\right)^n}$$

anzunehmen streben.

i) Wir wollen zum Schluß zeigen, daß sich aus dem ersten Integral (11) durch partielle Integration leicht das zweite ableiten läßt. Da

$$\left(\frac{\sin\alpha x \cdot \sin\beta x}{x}\right)_\infty^0 = \lim_{x=0} \frac{\sin\alpha x}{x} \sin\beta x = \alpha \lim_{x=0} \sin\beta x = 0$$

ist, so hat man

$$\int_0^\infty \sin\alpha x \cdot \sin\beta x \cdot \frac{dx}{x^2} = \int_0^\infty \sin\alpha x \cdot \sin\beta x \cdot d\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$= \int_0^\infty (\beta\sin\alpha x\cos\beta x + \alpha\sin\beta x\cos\alpha x)\frac{dx}{x}$$

$$= \tfrac{1}{4}\pi\beta\{\operatorname{sgn}(\alpha+\beta) + \operatorname{sgn}(\alpha-\beta)\} + \tfrac{1}{4}\pi\alpha\{\operatorname{sgn}(\beta+\alpha) + \operatorname{sgn}(\beta-\alpha)\}$$
$$= \tfrac{1}{4}\pi(\alpha+\beta)\operatorname{sgn}(\alpha+\beta) - \tfrac{1}{4}\pi(\alpha-\beta)\operatorname{sgn}(\alpha-\beta) = \tfrac{1}{4}\pi\{|\alpha+\beta| - |\alpha-\beta|\}.$$

728. Integration durch Reihen. Wenn in einem gegebenen Intervalle (a, b) die Reihe

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots,$$

deren Glieder stetige Funktionen sind, gleichmäßig konvergiert, so hat man

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \int_a^b u_3(x)\,dx + \cdots.$$

Wir wissen in der Tat (§ 322), daß unter den angegebenen Bedingungen $f(x)$ wie die $u(x)$ eine stetige und infolgedessen (§ 719) integrierbare Funktion ist. Nennt man also $\varphi_n(x)$ den **Rest** der gegebenen Reihe, so kann man schreiben

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \cdots + \int_a^b u_n(x)\,dx + \int_a^b \varphi_n(x)\,dx.$$

Ist nun ε positiv und beliebig klein gegeben, so läßt sich, wie wir wissen, eine Zahl finden derart, daß man für alle Werte von n, die größer sind als diese Zahl, und für beliebiges x hat $|\varphi_n(x)| < \varepsilon$. Es wird also sein

$$\left|\int_a^b \varphi_n(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |\varphi_n(x)|\,dx < (b-a)\,\varepsilon$$

und infolgedessen

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx = 0, \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \cdots.$$

Man bemerke, daß insbesondere auf Potenzreihen die gliedweise Integration stets anwendbar ist.

729. Beispiele. a) Die Integration durch Reihen kann man benutzen, um eine Funktion in eine Potenzreihe zu entwickeln, wenn die Entwickelung ihrer Derivierten bekannt ist. Z. B. ist (§ 233, e)

$$\operatorname{arc\,sin} x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots,$$

$$\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots,$$

vorausgesetzt, daß auf der rechten Seite nicht $x^2 > 1$ ist. Auf Grund gewisser Formeln, die oben angegeben worden sind (§ 725, d), sind die beiden Entwickelungen äquivalent, da

$$\operatorname{arc\,sin} ix = \operatorname{arc\,tg} \frac{ix}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2i}\log\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}+x} = i\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

ist.

b) Um gewisse bestimmte Integrale zu berechnen, ist die Integration durch Reihen oft von Nutzen. So berechnet man z. B. das Integral von $x^x dx$ zwischen den Grenzen 0 und 1 rasch, indem man von der Entwickelung

$$x^x = e^{x\log x} = 1 + \frac{x\log x}{1} + \frac{x^2\log^2 x}{1\cdot 2} + \frac{x^3\log^3 x}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$

Gebrauch macht. Integriert man in der Tat und erinnert sich an das Resultat (13), so erhält man sofort

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_0^\infty \frac{1}{n!}\int_0^1 x^n \log^n x\,dx = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}},$$

d. h.

$$\int_0^1 x^x dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \cdots = 0{,}783 \ldots .$$

Allgemeiner ist

$$\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 x^{\alpha x+\beta}\log^n x\,dx = \frac{1}{(\beta+1)^{n+1}} - \frac{(n+1)\alpha}{1!(\beta+2)^{n+2}} + \frac{(n+1)(n+2)\alpha^2}{2!(\beta+3)^{n+3}} - \cdots .$$

Insbesondere bemerke man, daß

$$-\int_0^1 x^x \log x\,dx = \int_0^1 x^x\,dx$$

ist.

c) Ebenso kann man, wenn das Integral von $\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 \cdot \frac{dx}{x}$ zwischen den Grenzen 0 und ∞ zu bestimmen ist, die zu integrierende Funktion in eine Potenzreihe entwickeln. Man bemerke, daß, während diese Entwickelung in dem Intervall (0, 1) nach den Potenzen von x fortschreitet, in dem Intervall $(1, \infty)$ die Funktion nach Potenzen von $1/x$ entwickelt werden muß. Man kann nichtsdestoweniger diese zweite Entwickelung vermeiden, indem man die Integration auf das Intervall (0, 1) beschränkt. Es genügt das Integral in

$$2\int_0^1 \log\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{dx}{x} + 2\int_1^\infty \log\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{dx}{x}$$

zu spalten und zu beachten, daß das zweite Integral, wenn man x durch $1/x$ ersetzt, in

$$\int_1^0 \log\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1}\cdot x\,d\frac{1}{x} = \int_0^1 \log\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{dx}{x}$$

übergeht. Also hat das vorgelegte Integral den Wert (§ 219)

$$4\int_0^1 \log\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{dx}{x} = 8\int_0^1\left(1+\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+\cdots\right)dx,$$

d. h. es ist gleich dem Achtfachen der Summe der Reihe (§ 365, a)

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} - \sum_1^\infty \frac{1}{4n^2} = \frac{3}{4}\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{1}{8}\pi^2,$$

sodaß man hat

$$\int_0^{\infty} \log \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 \frac{dx}{x} = \pi^2.$$

d) Umgekehrt kann man sich der Integration durch Reihen zur Summierung mancher Reihen bedienen, indem man ihnen die Form bestimmter Integrale gibt. Will man z. B. die Summe der Reihe $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$ kennen lernen, so wird die Bemerkung genügen, daß ihr Wert der des Integrals (§ 725, d)

$$\int_0^1 (1 + x - x^3 - x^4 + x^6 + \cdots)\, dx = \int_0^1 \frac{dx}{1 - x + x^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{1-2x}{\sqrt{3}}\right)_1^0 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

ist. Also hat man

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \cdots = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Ebenso ist die Summe der Reihe $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \cdots$ gegeben durch das Integral

$$\int_0^1 (x - x^2 + x^4 - x^5 + \cdots)\, dx = \int_0^1 \frac{x\, dx}{1 + x + x^2}$$

$$= \left(\log \sqrt{1 + x + x^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{1 + 2x}{\sqrt{3}}\right)_0^1,$$

und man hat folglich

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \cdots = \log \sqrt{3} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

e) Das erste der beiden soeben erhaltenen Resultate ist für $\alpha = \frac{\pi}{3}$ in der bekannten Formel (§ 363)

$$(17) \qquad \sin \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \frac{1}{3} \sin 3\alpha + \cdots = \frac{\pi - \alpha}{2} + \left[\frac{\alpha}{2\pi}\right]\pi$$

enthalten, die man in derselben Weise herleiten kann, d. h. indem man die Summe der Reihe

$$\sin \alpha + x \sin 2\alpha + x^2 \sin 3\alpha + x^3 \sin 4\alpha + \cdots$$

zwischen den Grenzen 0 und 1 integriert. Da $\sin(n-1)\alpha + \sin(n+1)\alpha = 2 \sin n\alpha \cos \alpha$ ist, so hat man identisch

$$(1 + x^2) \sum_1^{\infty} x^{n-1} \sin n\alpha = \sin \alpha + 2x \cos \alpha \sum_1^{\infty} x^{n-1} \sin n\alpha,$$

woraus man entnimmt

$$(18) \qquad \sum_1^{\infty} x^{n-1} \sin n\alpha = \frac{\sin \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2}.$$

Also läßt sich die Summe der Reihe (17), vorausgesetzt, daß man diejenigen Werte von α ausschließt, welche $\sin\alpha$ zum Verschwinden bringen, in folgender Weise ausdrücken:

$$\int_0^1 \frac{\sin\alpha\, dx}{1-2x\cos\alpha+x^2} = \left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)_0^1 = \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right) + \operatorname{arc\,tg}(\cot\alpha).$$

Sie ist mithin (§ 254, d) gleich $\operatorname{arc\,tg}\left(\cot\frac{\alpha}{2}\right)$, da $\cot\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} < 1$ ist. Der so erhaltene Ausdruck ist nicht verschieden von dem Ausdruck (17) und stellt die Summe der Reihe auch dar, wenn α ein ungerades Vielfaches von π ist. Er hat aber keine Bedeutung, wenn α ein gerades Vielfaches von π ist, in welchem Falle, wie wir wissen, auch (17) zu gelten aufhört.

f) Zu andern bemerkenswerten Resultaten führt die Integration von (18) in Bezug auf α zwischen 0 und einem beliebigen Wert von α, wobei x konstant gelassen wird und zwischen 0 und 1 eingeschlossen bleibt. Unter dieser Voraussetzung ist bekanntlich (§ 320, b) die Reihe gleichmäßig konvergent. Man findet durch jene Integration sofort

$$\sum_1^\infty \frac{x^n}{n}(1-\cos n\alpha) = \int_0^\alpha \frac{d(-x\cos\alpha)}{1-2x\cos\alpha+x^2} = \frac{1}{2}\log\frac{1-2x\cos\alpha+x^2}{(1-x)^2},$$

d. h., wenn man α in 2α verwandelt,

$$x\sin^2\alpha + \frac{1}{2}x^2\sin^2 2\alpha + \frac{1}{3}x^3\sin^2 3\alpha + \cdots = \frac{1}{4}\log\frac{1-2x\cos 2\alpha+x^2}{(1-x)^2}.$$

Bemerkt man ferner, daß $\sin\alpha\sin\beta = \sin^2\frac{\alpha+\beta}{2} - \sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$ ist, so erhält man noch

$$x\sin\alpha\sin\beta + \tfrac{1}{2}x^2\sin 2\alpha\sin 2\beta + \tfrac{1}{3}x^3\sin 3\alpha\sin 3\beta + \cdots$$
$$= \frac{1}{4}\log\frac{1-2x\cos(\alpha+\beta)+x^2}{1-2x\cos(\alpha-\beta)+x^2}.$$

Daraus folgt, wenn man sich an das Theorem von Abel (§ 340) erinnert,

$$\sin\alpha\sin\beta + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\sin 2\beta + \frac{1}{3}\sin 3\alpha\sin 3\beta + \cdots = \frac{1}{2}\log\left|\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}\right|.$$

Diese Formel setzt uns in den Stand, ein anderes Integral zu berechnen, welches zu den Integralen (11) analog ist. Durch ein nicht strenges Verfahren, welches wir schon in andern Fällen angewandt haben (§ 721, e, f, h), findet man leicht

$$\int_0^\infty \sin\alpha x\sin\beta x\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\log\left|\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right|.$$

g) Wir wollen endlich noch das Dirichletsche Integral (§ 721, f) berechnen, indem wir alle Elemente zusammenfassen, die einem und demselben absoluten Betrage von $\sin x$ entsprechen. Man wird dabei, wenn x

zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ gewählt ist, für die Bogen x, $\pi - x$, $2\pi + x$, $3\pi - x$, $4\pi + x$, ... einen einzigen Wert des Sinus haben und für die Bogen $\pi + x$, $2\pi - x$, $3\pi + x$, $4\pi - x$, ... denselben Wert mit umgekehrtem Vorzeichen. Daraus folgt, daß das vorgelegte Integral sich in folgender Weise schreiben läßt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\pi - x} - \frac{1}{\pi + x} - \frac{1}{2\pi - x} + \frac{1}{2\pi + x} + \frac{1}{3\pi - x} - \cdots\right) \sin x \, dx.$$

Inzwischen (§ 464, c) hat die Reihe in Klammern den Wert

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x - n\pi} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - 2n\pi} - \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - (2n+1)\pi}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{2}x - n\pi} + \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{2}(\pi - x) - n\pi} = \frac{1}{2}\left(\cot \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sin x}.$$

Also ist

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{1}{2}\pi$$

Es ist leicht[1]) diese Rechnung ganz einwandsfrei zu machen.

Vielfache Integration.

730. Unbestimmte Integration. Nach unsern bisherigen Auseinandersetzungen ist klar, daß das Problem der einfachen Integration im Grunde darin besteht, daß die Funktion y bestimmt werden soll, wenn die Funktion $dy/dx = f(x)$ bekannt ist. Man hat kein wesentlich neues Problem, wenn die unbekannte Funktion von mehreren Veränderlichen abhängt. Will man z. B. eine Funktion z der Veränderlichen x und y bestimmen, wenn man $\partial z/\partial x = f(x, y)$ kennt, so ist beim Bilden der partiellen Derivierten nach x das z nur als Funktion von x zu betrachten, und dieselbe Auffassung wird folglich auch bei der Integration herrschen müssen, d. h. man wird haben $z = \int f(x, y)\, dx$. Hier ist also bei der Integration y als eine Konstante zu behandeln, und man hat daher wohl zu beachten, daß bei dieser Integration unter einer willkürlichen Konstanten eine von x unabhängige Größe verstanden werden muß. Sie kann daher von y abhängen und ist in Wirklichkeit eine willkürliche Funktion von y. Ebensowenig ist die Bestimmung von y, wenn man $d^2y/dx^2 = f(x)$

1) Siehe den „Calcolo integrale" von d'Arcais, p. 198.

kennt, oder die Bestimmung von z, wenn $\partial^2 z/\partial x^2 = f(x, y)$ oder irgend eine andere Derivierte, immer nach einer einzigen Veränderlichen, gegeben ist, ein wesentlich neues Problem. Zwei oder mehr einfache Integrationen, nacheinander ausgeführt, werden in jedem Falle zum Ziele führen, ohne daß zu dem bereits Gesagten irgend etwas hinzuzufügen wäre. Das erste wirklich neue Problem, welches sich uns bietet, ist die Bestimmung von z, wenn die Funktion

$$(19)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y)$$

gegeben ist. Da die linke Seite die Derivierte von $\partial z/\partial y$ nach x ist, bei deren Bildung y als konstant vorausgesetzt wird, so hat man $\partial z/\partial y = \int f(x, y)\,dx$. Integriert man darauf noch einmal, unter der Voraussetzung, daß x konstant bleibt, so kommt

$$z = \int dy \int f(x, y)\,dx.$$

Betrachtet man dagegen die linke Seite von (19) als die Derivierte von $\partial z/\partial x$ nach y, so erhält man $z = \int dx \int f(x, y)\,dy$. Das gemeinsame Resultat dieser Paare von aufeinanderfolgenden einfachen Integrationen, die in Bezug auf verschiedene, voneinander unabhängige Veränderliche ausgeführt sind, nennt man ein *Doppelintegral* und stellt es folgendermaßen dar:

$$(20)\qquad z = \iint f(x, y)\,dx\,dy.$$

Wenn man bei jeder einfachen Integration den willkürlichen Teil in Evidenz setzt, so erkennt man folgendes: Ist eine spezielle Funktion $z = F(x, y)$ bekannt, welche der Gleichung (19) genügt, so sind alle Funktionen, die dieselbe Gleichung erfüllen, durch die Formel $z = F(x, y) + \varphi(x) + \psi(y)$ gegeben, wo φ und ψ Symbole willkürlicher Funktionen, die voneinander unabhängig sind, darstellen. Das, was bei der doppelten Integration an die Stelle der willkürlichen Konstanten der einfachen Integration tritt, ist also die Summe von zwei willkürlichen Funktionen, deren eine nur von x, die andere nur von y abhängt.

731. Bestimmte Integration. Bei der einfachen bestimmten Integration läßt sich die der Veränderlichen auferlegte Beschränkung durch die Ungleichung $(x - a)(x - b) \leq 0$ ausdrücken, welche gerade das Intervall (a, b) definiert. Allgemeiner kann jede Ungleichung $L(x) < 0$ eins oder mehr Intervalle darstellen, die das Integrationsgebiet bilden. Wird die Berechnung des Integrals (20) in der Weise ausgeführt, daß die Veränderlichen x und y, obwohl sie voneinander unabhängig bleiben, beständig eine gewisse Ungleichung

$$(21)\qquad L(x, y) \leq 0$$

erfüllen, so heißt das Resultat (20) der doppelten Integration bestimmt, und die Ungleichung (21) definiert das Integrationsgebiet. Es werde, um einen bestimmten Fall zu haben, vorausgesetzt, daß sich für einen gegebenen Wert von x aus (21) $a(x) < y < b(x)$ entnehmen läßt, und daß diese Einschränkung die Existenz von y zuläßt, so lange x zwischen gewissen Grenzen α und β bleibt, die für gewöhnlich Wurzeln der Gleichung $a(x) = b(x)$ sind. Alsdann wird das Integral (20), erstreckt über das Gebiet (21) in folgender Weise berechnet:

$$z = \int_{\alpha}^{\beta} dx \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y)\, dy. \tag{22}$$

Mit andern Worten, wenn man findet, daß, x als konstant vorausgesetzt, $F(x, y)$ eine primitive Funktion von $f(x, y)$ ist, so erhält man für z den (konstanten) Wert

$$z = \int_{\alpha}^{\beta} \{F(x, b(x)) - F(x, a(x))\}\, dx.$$

732. Beispiele. Wenn das Integrationsgebiet durch die Ungleichung $x^2 + y^2 < 2x$ definiert ist, so muß man haben $-\sqrt{2x - x^2} < y < \sqrt{2x - x^2}$, und dies ist nur möglich, wenn x zwischen 0 und 2 enthalten ist. Also hat das Integral (20), erstreckt über das genannte Gebiet, den Wert

$$z = \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x - x^2}}^{\sqrt{2x - x^2}} f(x, y)\, dy.$$

Man kann aber auch, indem man die Reihenfolge der Integrationen umkehrt, bemerken, daß bei festgehaltenem y sein muß

$$1 - \sqrt{1 - y^2} \leq x \leq 1 + \sqrt{1 - y^2},$$

sodaß y nicht außerhalb des Intervalles $(-1, 1)$ liegen kann. Es ist mithin

$$z = \int_{-1}^{1} dy \int_{1 - \sqrt{1 - y^2}}^{1 + \sqrt{1 - y^2}} f(x, y)\, dx.$$

Daraus ergibt sich folgendes: Wenn $\varphi(x, y)$ eine primitive Funktion von $f(x, y)$ ist, die man unter konstant gedachtem x erhalten hat, und $\psi(x, y)$ eine andere primitive Funktion, die unter konstant gedachtem y erhalten ist, so läßt sich der Wert des über das Gebiet $x^2 + y^2 < 2x$ erstreckten Integrals $\int\int f(x, y)\, dx\, dy$ auf eine der beiden folgenden Formen bringen:

$$\int_0^2 \{\varphi(t, \sqrt{2t - t^2}) - \varphi(t, -\sqrt{2t - t^2})\}\, dt,$$

$$\int_{-1}^{1} \{\psi(1 + \sqrt{1 - t^2}, t) - \psi(1 - \sqrt{1 - t^2}, t)\}\, dt.$$

733. Da ein Doppelintegral sich als das Resultat der *Integration eines Integrals* betrachten läßt, so liegt es nahe sich zu fragen, wie man *die Derivation eines Integrals* nach einer Veränderlichen auszuführen hat, die von der Integrationsvariablen unabhängig ist. Das Zuwachsverhältnis der Funktion $\varphi(x) = \int_a^b f(x, y)\,dy$ ist

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \int_a^b \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}\,dy = \int_a^b f_x'(x+\theta h, y)\,dy,$$

wo θ zwischen 0 und 1 liegt. Kann man nun jeder noch so kleinen positiven Zahl ε eine Zahl δ entsprechen lassen derart, daß für $|h| < \delta$ immer $|f_x'(x+h, y) - f_x'(x, y)| < \varepsilon$ ist, was auch y in (a, b) sein mag, so ist klar, daß man haben wird

$$\left|\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} - \int_a^b f_x'(x, y)\,dy\right| < (b-a)\,\varepsilon$$

und infolgedessen

$$\varphi'(x) = \lim_{h=0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \int_a^b f_x'(x, y)\,dy.$$

Es ist nützlich zu bemerken, daß die obige Bedingung für f_x' immer erfüllt ist, wenn die Derivierte f_{xx}'' von f_x' existiert und endlich ist. Wenn nämlich f_{xx}'' seinem absoluten Betrage nach kleiner bleibt als eine feste Zahl l, so wird es genügen $|h| < \varepsilon\, l$ zu nehmen, damit man hat

$$|f_x'(x+h, y) - f_x'(x, y)| < \frac{\varepsilon}{l}\, |f_{xx}''(x+\theta h, y)| < \varepsilon.$$

Um also ein Integral nach einer Veränderlichen zu derivieren, die von der Integrationsvariablen unabhängig ist, genügt es die der Integration unterworfene Funktion zu derivieren. Wenn ferner a und b Funktionen von x sind, so erhält man die Derivierte, indem man φ als eine zusammengesetzte Funktion (§ 369) betrachtet und bemerkt, daß die Derivierte eines Integrals nach einer seiner Grenzen die zu integrierende Funktion ist (§ 713), berechnet für die genannte Grenze und mit dem eignen oder dem entgegengesetzten Zeichen (§ 711, a) genommen, je nachdem es sich um die obere oder die untere Grenze handelt. Man erhält auf solche Weise sofort

$$\varphi'(x) = b' f(x, b) - a' f(x, a) + \int_a^b f_x'(x, y)\,dy.$$

734. Dies vorausgeschickt wollen wir wieder zur Integration zurückkehren und wieder a und b als konstant voraussetzen. Wir stellen uns die Aufgabe, das Integral $\varphi(x) = \int_a^b f(x, y)\, dy$ zwischen den Grenzen α und β zu integrieren. Wenn man setzt

$$\psi(x, y) = \int_\alpha^x f(x, y)\, dx, \quad F(x) = \int_a^b \psi(x, y)\, dy,$$

so hat man offenbar

$$F'(x) = \int_a^b \psi_x'(x, y)\, dy = \int_a^b f(x, y)\, dy = \varphi(x),$$

mithin

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\, dx = F(\beta) - F(\alpha) = \int_a^b \psi(\beta, y)\, dy = \int_a^b dy \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dx.$$

Um also ein gegebenes bestimmtes Integral in Bezug auf eine von der Integrationsvariablen unabhängige Veränderliche zu integrieren, genügt es, die der gegebenen Integration unterworfene Funktion zu integrieren. Es ist mit andern Worten, wenn man $\varphi(x)$ durch seinen Ausdruck ersetzt,

$$\int_\alpha^\beta dx \int_a^b f(x, y)\, dy = \int_a^b dy \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dx.$$

Wenn ferner die Grenzen der vorgelegten Integration selbst Funktionen von x sind, so ist es immer möglich durch Einführung einer neuen Integrationsvariablen an ihre Stelle Grenzen zu bringen, die konstant sind. Es genügt zu setzen $y = a + (b - a)t$.

735. Neue Definition. Die obige Definition des Doppelintegrals hat dieselben Nachteile wie die am Anfang der Integralrechnung gegebene Definition des einfachen Integrals. Man muß sie daher derart umformen, daß sie die Bedingungen für die Existenz des Integrals zu finden gestattet und uns überdies den Weg zur Berechnung seines Wertes zeigt. Wir wollen das Integrationsgebiet als endlich voraussetzen, d. h. es soll möglich sein, zwei endliche Intervalle (α, β) und (γ, δ) anzugeben, in denen die Veränderlichen x und y bezüglich bleiben müssen, wenn man wünscht, daß die Einschränkung (21) erfüllt ist. Wir teilen das (α, β) in Intervalle $h_1, h_2, \ldots, h_n$ und (γ, δ) in Intervalle $k_1, k_2, \ldots, k_m$. Alle diese Teilintervalle sollen der Null zustreben (wobei m und n notwendig ins Unendliche zunehmen), ohne daß irgend eine Beziehung zwischen ihnen besteht. Wir wollen auch die Funktion als endlich voraussetzen und die Vereinbarung treffen. sie außerhalb des Integrationsgebietes als verschwindend zu betrachten. Wenn x und y bezüglich in den Intervallen h_i und k_j variieren, indem sie immer voneinander unabhängig bleiben, so liegen die Werte der Funktion zwischen einer oberen und einer unteren Grenze: zwischen diesen Grenzen wähle man eine Zahl f_{ij} und betrachte die Doppelsumme

$$\sum_{i,j} h_i k_j f_{ij} = h_1 k_1 f_{11} + h_1 k_2 f_{12} + h_2 k_1 f_{21} + \cdots + h_n k_m f_{nm}.$$

Wenn dieselbe beim unendlichen Zunehmen von m und von n nach einem Grenzwert konvergiert, der unabhängig ist von dem Gesetz, welches man bei der Konstruktion der Intervalle h_i und der Intervalle k_j befolgt, und ebenso unabhängig von der Wahl der Zahlen f_{ij}, so bezeichnet man diesen Grenzwert als **bestimmtes Integral** in dem angegebenen Gebiete. Legt man diese Definition zu Grunde, so ist es nicht schwer daraus analoge Folgerungen zu ziehen, wie wir sie bei der einfachen Integration gehabt haben, und insbesondere läßt sich daraus die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz des Integrals ableiten. Wir wollen uns hier aber auf die Definition beschränken und verweisen den Leser auf die ausführlichen Lehrbücher der Infinitesimalrechnung.

736. Es bleibt uns aber noch zu zeigen übrig, daß, falls das Integral existiert, sein Wert sich in der in § 731 angegebenen Weise erhalten läßt. Wird die Existenz des Integrals a priori zugelassen, so ist es erlaubt zuerst m und dann n unendlich werden zu lassen und den Wert f_{ij} zwischen der unteren und der oberen Grenze der Werte zu wählen, die $f(x, y)$ annimmt, wenn x im Anfangspunkt des Intervalles h_i fest bleibt und y in k_j variiert. Alsdann zerlegt sich die vorhin betrachtete Doppelsumme in n einfache Summen, deren eine $h_i(k_1 f_{i1} + k_2 f_{i2} + \cdots + k_r f_{in})$ ist und den Grenzwert

$$h_i \int_\gamma^\delta f(x, y)\, dy = h_i \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y)\, dy = h_i F_i$$

hat, wenn mit F_i der Wert bezeichnet wird, den eine gewisse Funktion von x im Anfangspunkt des Intervalles h_i annimmt. Lassen wir jetzt auch n (welches bisher zusammen mit den h_i konstant war) ins Unendliche wachsen, so finden wir als Grenzwert der Doppelsumme

$$\lim_{n=\infty} (h_1 F_1 + h_2 F_2 + \cdots + h_n F_n) = \int_\alpha^\beta dx \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y)\, dy,$$

d. h. gerade das Doppelintegral (22). Hiernach ist klar, daß die Umkehrung der Integrationenfolge darauf hinauskommt, daß man zuerst n und dann m ins Unendliche wachsen läßt; es lassen sich aber unendlich viele andere Arten denken, m und n unendlich werden zu lassen, und sie müssen alle denselben Wert für das Integral liefern, wenn es erlaubt sein soll zu sagen, daß es existiert. Wenn wir an die mannigfachen Formen denken, die eine Doppelsumme annehmen kann (§ 243), wenn man versucht sie auf eine Summe einfacher Summen zu reduzieren, so wird es klar, weshalb die Möglichkeit, die Reihenfolge der Integrationen umzukehren, so beschränkt ist. Diese Umkehrung ist trotzdem ein wertvolles Forschungsmittel, welches sich häufig mit großem Nutzen anwenden läßt. Bei seinem Gebrauch darf man aber nie vergessen, daß sich dabei falsche Resultate ergeben können, wenn die Funktion oder eine ihrer ersten Derivierten unendlich wird, oder wenn das Integrationsgebiet selbst unendlich ist.

737. Einführung neuer Veränderlicher. Wir wollen annehmen, daß bei dem Integral $\iint f(x, y)\,dx\,dy$ die Substitution $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ ausgeführt werden soll, wo u und v die neuen (unabhängigen) Integrationsvariablen sind. Für die Abhängigkeit der Funktionen x und y voneinander wird erfordert (§ 579), daß die Determinante

$$\mathfrak{D} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist. Dies vorausgeschickt sei $g(u, v)$ das, was aus $f(x, y)$ durch die genannte Substitution wird, und das Integral werde in folgender Weise geschrieben: $\int dy \int f(x, y)\,dx$. Wir wollen außerdem, um einen bestimmten Fall vor uns zu haben, vereinbaren, daß die einzelnen Integrationen immer in dem Sinne auszuführen sind, in welchem die zugehörige Veränderliche wächst, sodaß die Differentiale der vier Veränderlichen stets als positiv betrachtet werden können. Bei der auf x bezüglichen Integration muß y konstant bleiben, d. h. es muß

$$\frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv = 0$$

sein, mithin

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv = \left(\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\dfrac{\partial y}{\partial u}}{\dfrac{\partial y}{\partial v}}\right)du = \frac{\mathfrak{D}}{\dfrac{\partial y}{\partial v}}\,du.$$

Das Integral wird folglich (wenn man erforderlichen Falles die auf u bezüglichen Integrationsgrenzen vertauscht)

$$\int dy \int g(u, v) \left|\frac{\mathfrak{D}}{\dfrac{\partial y}{\partial v}}\right| du = \int du \int g(u, v) \left|\frac{\mathfrak{D}}{\dfrac{\partial y}{\partial v}}\right| dy.$$

Dabei stellt v diejenige Funktion von y und u dar, welche unter der Voraussetzung (§ 572) $\partial y:\partial v \gtrless 0$ durch $y = \psi(u, v)$ definiert wird. Bei der Integration nach y muß u konstant bleiben, sodaß

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv = \frac{\partial y}{\partial v}\,dv$$

ist. Das letzte Doppelintegral verwandelt sich daher (indem man, wenn nötig, die auf v bezüglichen Integrationsgrenzen vertauscht) in $\int du \int g(u, v)\,\mathfrak{D}\,dv$. Man hat also

$$(23)\qquad \iint f(x, y)\,dx\,dy = \iint g(u, v)\,\mathfrak{D}\,du\,dv.$$

Allgemeiner kann man beweisen, daß

$$\iint\ldots\int f(x,y,z,\ldots)\,dx\,dy\,dz\ldots = \iint\ldots\int g(u,v,w,\ldots)\,\frac{\partial(x, y, z, \ldots)}{\partial(u, v, w, \ldots)}\,du\,dv\,dw\ldots$$

ist.

738. Legt man den Veränderlichen x, y die Bedeutung rechtwinkliger cartesischer Koordinaten bei, so läßt sich der Übergang zu den neuen Veränderlichen geometrisch interpretieren als ein Übergang zu krummlinigen Koordinaten (§ 413), wobei das Integrationsgebiet durch die Kurven u und die Kurven v in anderer Weise in infinitesimale Elemente zerlegt wird. Die Formel (23) sagt uns in der Tat, daß wir, anstatt das Integrationsgebiet in rechteckige Elemente $dx\,dy$ zu zerlegen, wie es die Definition will, das Gebiet durch die genannten Kurven in andre Elemente teilen können. Jedes dieser Elemente läßt sich (unter Vernachlässigung infinitesimaler Teile von höherer Ordnung) als ein Parallelogramm mit den Seiten $d\sigma$ und $d\tau$ betrachten, dessen Winkel ω einen Sinus hat, welcher nach einer bekannten Formel (§ 571, d), durch den Quotienten von $\mathfrak{D}$ durch $\frac{d\sigma}{du}\cdot\frac{d\tau}{dv}$ gemessen wird, sodaß der Flächeninhalt des Parallelogramms durch den absoluten Betrag von $\sin\omega\cdot d\sigma\,d\tau = \mathfrak{D}\,du\,dv$ ausgedrückt wird. Also liefert die Formel (23) das Integral als Summe unendlich vieler infinitesimaler Elemente, die man erhält durch Multiplikation des Inhalts jedes Parallelogramms mit einer zwischen den Werten der zu integrierenden Funktion in dem Parallelogramm liegenden Zahl g. Man gelangt so zu einer allgemeineren Auffassung der in § 735 gegebenen Definition.

739. Beispiele. a) Die geometrische Darstellung des Integrationsgebietes erleichtert sehr die Diskussion der Grenzen, die den einzelnen Integrationen aufzuerlegen sind, sei es, daß es sich um die Umkehrung der Integrationenfolge handelt, sei es, daß man zu neuen Veränderlichen übergehen will. So wird in dem Beispiel des § 732 alles evident, wenn man bemerkt, daß das Integrationsgebiet ein Kreis vom Radius 1 ist, der Oy im Anfangspunkt berührt. Um ein anderes Beispiel zu haben, sei

$f\,dx\,dy$ zu integrieren in dem Dreieck, welches von den Geraden $x=1$, $y=\alpha x$, $y=\beta x$ eingeschlossen wird. Man sieht sofort, daß

$$\int_0^1 dx\int_{\alpha x}^{\beta x} f(x,y)\,dy = \int_0^\alpha dy\int_{y:\beta}^{y:\alpha} f(x,y)\,dx + \int_\alpha^\beta dy\int_{y:\beta}^{1} f(x,y)\,dx$$

ist. Ebenso hat man

$$\int_0^x dx\int_0^x f(x,y)\,dy = \int_0^x dy\int_y^x f(x,y)\,dx.$$

b) Die geometrische Interpretation der Formel (23) vermag uns auch in vielen Fällen die Berechnung von $\mathfrak{D}$ zu ersparen. Geht man z. B. in der Ebene von den cartesischen Koordinaten zu Polarkoordinaten über, so hat man $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ und

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Also ist

$$\int\!\!\int f(x,y)\,dx\,dy = \int\!\!\int f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta. \tag{24}$$

Zu demselben Resultat gelangt man geometrisch durch die Bemerkung, daß die Kurven r und die Kurven θ die Ebene in infinitesimale Elemente zerlegen. Jedes dieser Elemente läßt sich als ein Rechteck ansehen, dessen Seiten folgende sind: erstens der Abschnitt dr, welchen die Kreise von den Radien r und $r+dr$ auf jeder durch den Anfangspunkt hindurchgehenden Geraden bestimmen, zweitens der Bogen $r\,d\theta$, welchen die durch die Winkel θ und $\theta+d\theta$ definierten Geraden auf dem Kreise vom Radius r ausschneiden. Der Flächeninhalt des Rechtecks ist also $r\,d\theta\cdot dr$.

c) Ähnlich hat man im Raume, wenn man mit φ die Länge, mit ψ die Breite bezeichnet,

$$x=r\cos\varphi\cos\psi,\quad y=r\sin\varphi\cos\psi,\quad z=r\sin\psi$$

und infolgedessen

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\psi)} = r^2\begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi\cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi\cos\psi & 0 \\ -\cos\varphi\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi & \cos\psi \end{vmatrix} = r^2\cos\psi.$$

Mithin ist

$$\int\!\!\int\!\!\int f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\!\!\int\!\!\int f(r\cos\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\cos\psi, r\sin\psi)\,r^2\,|\cos\psi|\,dr\,d\varphi\,d\psi.$$

Zu demselben Resultat gelangt man durch folgende Bemerkung: Wenn nur r allein unendlich wenig zunimmt, so beschreibt der Punkt $M(x,y,z)$ ein geradliniges Element $MM'=dr$; wenn nur φ wächst, so beschreibt er in einer zu Oz senkrechten Ebene ein Kreiselement $MM''=r\cos\psi\,d\varphi$; und wenn nur ψ wächst, so beschreibt der Punkt M in der durch den Winkel φ definierten Ebene ein Kreiselement $MM'''=r\,d\psi$. Die drei Elemente lassen sich als Kanten eines rechtwinkligen Parallelepipedons $MM'M''M'''$ ansehen, durch welches der zwischen den Kugeln r, $r+dr$, den Ebenen φ, $\varphi + d\varphi$ und den Kegeln ψ, $\psi + d\psi$ enthaltene Körper ersetzt werden kann. Das Volumen dieses Körpers wird also, abgesehen von Infinitesimalen höherer Ordnung, durch das Produkt $r\cos\psi\, d\varphi \cdot r d\psi \cdot dr$ gemessen.

740. Übungen. a) Um zu sehen, wie die Reihenfolge der Integrationen das Resultat beeinflussen kann, berechne man die folgenden Integrale:

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2} = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx = -\int_0^1 \frac{dy}{(1+y)^2} = -\frac{1}{2};$$

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx = -\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = -\frac{\pi}{4}.$$

Man beachte, daß in beiden Fällen die der Integration unterworfene Funktion im Punkte (0, 0) unendlich wird. Nichtsdestoweniger existieren die unbestimmten Integrale

$$\frac{1}{2}\,\frac{x-y}{x+y} + \varphi(x) + \psi(y), \qquad \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y} + \varphi(x) + \psi(y),$$

aber sie sind in dem genannten Punkte unstetig, insofern sie in seiner Umgebung jeden beliebig vorgeschriebenen Wert annehmen können.

b) Findet man es bei der Berechnung eines Integrals zweckmäßig $z = xy$ als neue Veränderliche anzunehmen, die z. B. an die Stelle von y treten soll, so muß man, um die Formel (23) anzuwenden, bemerken, daß

$$\frac{\partial(x, z)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial z}{\partial y} = x, \quad \mathfrak{D} = \frac{1}{x}$$

ist. Z. B. hat man (§ 729, b)

$$\int_0^1\int_0^1 (xy)^{xy}\,dx\,dy = \int_0^1 z^z dz \int_z^1 \frac{dx}{x} = -\int_0^1 z^z \log z\, dz = \int_0^1 z^z dz = 0{,}783\ldots.$$

Dies kommt darauf hinaus, die Ebene mit Hilfe der gleichseitigen Hyperbeln $xy =$ Const. in Streifen von infinitesimaler Breite zu zerlegen.

c) Es kann vorkommen, daß die Kurven u und die Kurven v eine einzige Kurvenschar bilden. So kann man z. B., um die Punkte darzustellen, die in dem Winkelraum zwischen Ox und der Halbierenden des Winkels xOy liegen, dazu geführt werden, x und y gleich dem arithmetischen Mittel und dem geometrischen Mittel von zwei neuen Veränderlichen zu setzen: $x = \frac{1}{2}(u+v)$, $y = \sqrt{uv}$. Offenbar ist dann

$$\mathfrak{D} = (u-v)/4\sqrt{uv}\,.$$

Damit eine der neuen Veränderlichen einen konstanten Wert a bewahre, muß notwendig zwischen x und y die Relation bestehen, die man durch Elimination der andern Veränderlichen erhält, also die folgende: $y^2 = 2ax - a^2$. Das ist die eine und einzige Schar von u-Kurven und v-Kurven. Sie besteht, wie man sieht, aus allen Parabeln, welche die Achse Ox und die Direktrix Oy gemein haben. Die Werte von u und v sind in jedem Punkte gegeben durch den Ausdruck $x \pm \sqrt{x^2 - y^2}$. Kommt man überein zu setzen $u = x + \sqrt{x^2 - y^2}$ und infolgedessen $v = x - \sqrt{x^2 - y^2}$, so hat man längs der Parabel vom Parameter a

$$u = x + |x - a|, \quad v = x - |x - a|$$

und daher $u = a$ für $x < a$ und $v = a$ für $x > a$. Wenn man also in dem genannten Winkelraum die Parabel in einen endlichen Bogen, der vom Scheitel bis zum Berührungspunkt mit $y = x$ geht, und in einen unendlichen Bogen teilt, so ist längs des ersten u konstant, während $v = 2x - a$ von 0 bis a variiert; längs des zweiten ist v konstant, während $u = 2x - a$ von a bis Unendlich variiert. Erstreckt man z. B. die Integration über das Gebiet, welches zwischen der Achse Ox und den Parabeln mit den Parametern a und b enthalten ist, so läßt sich das Integral von $f\,dx\,dy$ in der einen oder der andern der beiden folgenden Weisen schreiben:

$$\int_0^{\sqrt{ab}} dy \int_{\frac{y^2+a^2}{2a}}^{\frac{y^2+b^2}{2b}} f(x, y)\,dx = \int_{\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}b} dx \int_0^{\sqrt{2ax - a^2}} f(x, y)\,dy + \int_{\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}(a+b)} dx \int_{\sqrt{2bx - b^2}}^{\sqrt{2ax - a^2}} f(x, y)\,dy.$$

Wenn man dagegen die Veränderlichen u und v anwendet, so nimmt das Integral die einfachere Form an

$$\int_a^b \int_0^a f\left(\tfrac{1}{2}(u + v), \sqrt{uv}\right)(u - v)\,d\sqrt{u}\,d\sqrt{v}.$$

d) Durch ein sehr gebräuchliches Verfahren, welches zwar nicht streng ist, sich aber streng machen läßt[1]), gelingt es das Dirichletsche Integral (§ 729, g) zu berechnen, indem man bemerkt, daß für positives x

$$\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xy}\,dy$$

ist und infolgedessen

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-xy} \sin x\,dx\,dy = \int_0^\infty dy \int_0^\infty e^{-xy} \sin x\,dx.$$

Da nun (für $y > 0$)

$$(e^{-xy} \cos x)_0^\infty = -1, \qquad (e^{-xy} \sin x)_0^\infty = 0$$

ist, so gibt die partielle Integration

$$\int_0^\infty e^{-xy} \sin x\,dx = 1 - y \int_0^\infty e^{-xy} \cos x\,dx = 1 - y^2 \int_0^\infty e^{-xy} \sin x\,dx.$$

1) Siehe z. B. den „Calculo integral" von Gomes-Teixeira (Primeira parte, p. 94) oder den „Traité d'Analyse" von Picard (t. I, p. 34).

woraus man entnimmt

$$(1+y^2)\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dx = 1\,.$$

Mithin ist

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} = (\operatorname{arc\,tg} y)_0^\infty = \frac{\pi}{2}\,.$$

e) Ähnlich kann man, um das Integral $\mathfrak{J} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \log \sin x\,dx$ zu berechnen, schreiben

$$\mathfrak{J} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx \int_x^{\frac{\pi}{2}} \cot y\,dy = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cot y\,dy \int_0^y \sin x\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg}\frac{y}{2} - \sin y\right) dy = \left(\cos y - \log \cos^2 \frac{y}{2}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = -1 + \log 2\,.$$

Übrigens läßt sich das vorgelegte Integral leicht durch partielle Integration, auch in unbestimmter Form, berechnen:

$$\int \sin x \cdot \log \sin x\,dx = -\cos x \log \sin x + \log \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \cos x + C.$$

Daraus folgt (§ 312, b)

$$\mathfrak{J} = -1 + \lim_{x=0}\left(\cos x \cdot \log \sin x - \log \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) = -1 + \log 2\,.$$

f) Um den Wert $\mathfrak{J}$ des Poissonschen Integrals (§ 721, e) zu berechnen, betrachte man das Doppelintegral

$$(25)\qquad \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^\infty \mathfrak{J} e^{-x^2}\,dx = \mathfrak{J}^2$$

und suche es auf andre Weise zu berechnen. Man schreibe

$$\mathfrak{J}^2 = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \int_0^\infty e^{-y^2}\,dy$$

und ersetze bei der ersten Integration (nach y) y durch eine andere Veränderliche, die so definiert ist: $y = tx$. Man erhält dann

$$\mathfrak{J}^2 = \int_0^\infty e^{-x^2}x\,dx \int_0^\infty e^{-t^2x^2}\,dt = \int_0^\infty dt \int_0^\infty e^{-(1+t^2)x^2}\cdot x\,dx.$$

Nun hat man sofort

$$\int e^{-(1+t^2)x^2}\cdot x\,dx = -\frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{2(1+t^2)} + C,\qquad \int_0^\infty e^{-(1+t^2)x^2}\cdot x\,dx = \frac{1}{2(1+t^2)}\,.$$

Also ist successiv, wenn man beachtet, daß $\mathfrak{J}$ positiv sein muß,

$$\mathfrak{J}^2 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}, \quad \mathfrak{J} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

g) Zu dem vorstehenden Resultat gelangt man auch, indem man das Integral (25) nach der Formel (24) transformiert und dann berechnet. Beachtet man, daß r von 0 nach ∞ und θ von 0 nach $\frac{\pi}{2}$ geht, wenn x und y unabhängig voneinander alle positiven Werte annehmen, so erhält man sofort

$$\mathfrak{J}^2 = \int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty e^{-r^2} r\,dr = \frac{\pi}{4}\left(-e^{-r^2}\right)_0^\infty = \frac{\pi}{4}, \quad \mathfrak{J} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Übrigens ist dieses der Strenge entbehrende Verfahren[1]) nicht wesentlich verschieden von dem vorigen, wie leicht zu erkennen ist, wenn man bemerkt, daß $t = \operatorname{tg}\theta$ ist. Bei beiden ist noch erforderlich der Nachweis der **Existenz** von $\mathfrak{J}$; dieser ergibt sich aber sofort (§ 717, b) aus dem Umstand, daß für unendliches x die Funktion $x^n e^{-x^2}$ nach Null konvergiert, was auch n sein mag.

h) Auch die Derivation (§ 733) nach einer von der Integrationsvariablen unabhängigen Veränderlichen läßt sich mit Nutzen auf die Berechnung zahlreicher Integrale anwenden. So z. B. leitet man aus dem zweiten Integral (11) unmittelbar das erste ab durch Derivation nach β, wenn man beachtet, daß die Derivierte von $|x|$ gleich $\operatorname{sgn} x$ ist. Ebenso leitet man aus dem bekannten Integral $\Gamma(\alpha)$ durch Derivation nach α sofort ab (§ 314, j)

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\log x\,dx = \left(-C + 1 - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha+1} + \cdots\right)\Gamma(\alpha).$$

Insbesondere ist

$$\int_0^\infty e^{-x}\log x\,dx = -C, \quad \int_0^\infty e^{-x^2}\log x\,dx = -\tfrac{1}{4}\sqrt{\pi}\,(C + \log 4).$$

Wenn man in dem ersten Integral x in $-\log x$ verwandelt, so findet man das Integral von Mascheroni (§ 721, g) wieder. Nach einer nochmaligen Derivation findet man für $\alpha = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$ u. s. w.

$$\int_0^\infty e^{-x}\log^2 x\,dx = C^2 + \tfrac{1}{6}\pi^2, \quad \int_0^\infty e^{-x^2}\log^2 x\,dx = \tfrac{1}{8}\sqrt{\pi}\left\{(C+\log 4)^2 + \tfrac{1}{2}\pi^2\right\} \text{ u.s.w.}$$

---

1) Es wurde von Poisson angegeben und von Cayley verbessert im „Quarterly Journal of Mathematics" (1872, p. 120). Siehe die „Mélanges mathématiques" von Mansion (p. 15) und den „Traité d'Analyse" von Picard (t. I, p. 103).

i) Man berechnet leicht das Integral

(26)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \frac{\pi}{2ab}$$

mit Hilfe der Substitution $\operatorname{tg} x = \frac{b}{a} t$, wenn man vereinbart mit a und b die positiven Wurzeln von a^2 und b^2 zu bezeichnen. Deriviert man das eine Mal nach a, das andere Mal nach b, so erhält man die Integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x\, dx}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^2} = \frac{\pi}{4a^3 b}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x\, dx}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^2} = \frac{\pi}{4ab^3},$$

deren Summe

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^2} = \pi \frac{a^2 + b^2}{4a^3 b^3}$$

ist. Fährt man so fort und setzt zur Abkürzung $k_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$, so findet man endlich

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^{n+1}}$$
$$= \pi \frac{k_n a^{2n} + k_1 k_{n-1} a^{2n-2} b^2 + k_2 k_{n-2} a^{2n-4} b^4 + \cdots + k_n b^{2n}}{2(ab)^{2n+1}}.$$

Durch das umgekehrte Verfahren fließen aus dem Integral (26) unendlich viele andere. Zunächst bemerke man, von der Identität $(a^2 - b^2)\sin^2 x = (a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) - b^2$ ausgehend, daß

$$(a^2 - b^2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x\, dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi b}{2a}$$

ist, woraus sich ergibt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a \sin^2 x\, dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \frac{\pi}{a+b}.$$

Daraus folgt durch Integration in Bezug auf a zwischen den Grenzen b und a und Ersetzung von a durch $b\sqrt{1-k^2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}\, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \log \frac{1 + \sqrt{1-k^2}}{2}.$$

Als Verifikation bemerke man, daß das letzte Integral für $k=0$ verschwindet, während es sich für $k=1$ auf $-\frac{1}{2}\pi\log 2$ reduziert, einen Wert, den wir bereits auf andern Wegen erhalten haben (§§ 721, d; 725, f.).

j) Durch partielle Integration lassen sich die beiden Integrale

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\cdot dx,\quad \int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\cdot dx\qquad (a>0)$$

aufeinander reduzieren. Man hat in der Tat

$$b\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\cdot dx=(e^{-ax}\sin bx)_0^\infty+a\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\cdot dx=a\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\cdot dx,$$

$$b\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\cdot dx=(e^{-ax}\cos bx)_\infty^0-a\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\cdot dx=1-a\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\cdot dx,$$

woraus folgt

$$(27)\qquad \int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\cdot dx=\frac{a}{a^2+b^2},\quad \int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\cdot dx=\frac{b}{a^2+b^2}\cdot$$

Integriert man das erste in Bezug auf b, zwischen den Grenzen 0 und b, oder das zweite in Bezug auf a, zwischen den Grenzen a und ∞, so erhält man

$$\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}\,dx=\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\cdot$$

Für infinitesimales a gelangt man zu der Formel (9) zurück, da die rechte Seite nach $\frac{1}{2}\pi\operatorname{sgn} b$ konvergiert.

k) Zum Zwecke der Verifikation gewisser früherer Resultate wollen wir einen andern Weg angeben, der zu dem Dirichletschen Integral führt. Vorher ist es aber nötig, die Existenz dieses Integrals direkt nachzuweisen. Das läßt sich sehr schnell machen, wenn man sich auf ein früheres Resultat (§ 717, c) stützt und bemerkt, daß

$$\left|\int_\alpha^\beta \sin x\,dx\right|=|\cos\alpha-\cos\beta|\leqq 2$$

ist. Wir wollen hier aber zur Übung in anderer Weise vorgehen. Offenbar existiert das Integral

$$\mathfrak{J}_n=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx=\int_0^\pi\frac{\sin x\,dx}{x+(n-1)\pi}$$

und hat einen Wert, der zwischen $2/n\pi$ und $2/(n-1)\pi$ enthalten ist, weil $\int_0^\pi \sin x\,dx=2$. Daraus folgt

$$\mathfrak{J}_n>\frac{2}{n\pi}>\mathfrak{J}_{n+1},\quad \lim_{n=\infty}\mathfrak{J}_n=0,$$

und es ist daher (§ 195) die Reihe $\mathfrak{J}_1 - \mathfrak{J}_2 + \mathfrak{J}_3 - \cdots$ konvergent. Inzwischen hat man, wenn n das größte in a/π enthaltene Ganze ist,

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = \mathfrak{J}_1 - \mathfrak{J}_2 + \mathfrak{J}_3 - \cdots \pm \mathfrak{J}_n \mp \theta \mathfrak{J}_{n+1},$$

wo θ zwischen 0 und 1 liegt. Läßt man also a und infolgedessen n unendlich wachsen, so existiert

$$\mathfrak{J} = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \mathfrak{J}_1 - \mathfrak{J}_2 + \mathfrak{J}_3 - \cdots > 0.$$

Dies vorausgeschickt hat man (§ 729, f, c)

$$\mathfrak{J}^2 = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx \int_0^\infty \frac{\sin y}{y} dy = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx \int_0^\infty \frac{\sin tx}{t} dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{dt}{t} \int_0^\infty \sin x \sin tx \frac{dx}{x} = \frac{1}{4} \int_0^\infty \log \left(\frac{1+t}{1-t}\right)^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{4} \pi^2.$$

Mithin hat man, weil $\mathfrak{J}$ positiv ist, $\mathfrak{J} = \frac{1}{2}\pi$.

l) Es sei zur Berechnung vorgelegt das Integral $\mathfrak{J} = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2\alpha x \cdot dx$, welches sich für $\alpha = 0$ auf das bekannte Poissonsche Integral $\mathfrak{J}_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ reduziert. Wir wollen es nach α derivieren und das Resultat partiell integrieren:

$$\mathfrak{J}' = \int_0^\infty \sin 2\alpha x \cdot d\left(e^{-x^2}\right) = -2\alpha \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2\alpha x \cdot dx = -2\alpha \mathfrak{J}.$$

Daraus folgt $\log \mathfrak{J} = -\alpha^2 + \log \mathfrak{J}_0$, mithin $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_0 e^{-\alpha^2}$, d. h.

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2\alpha x \, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-\alpha^2}.$$

m) Wir stellen uns die Aufgabe[1]), das Integral $\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx$ zu berechnen, indem wir es als die Derivierte der Funktion

$$f(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x(1+x^2)} dx$$

betrachten und bemerken, daß

$$f(\alpha) - f''(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \frac{1}{2} \pi \operatorname{sgn} \alpha$$

---

1) Dies Übungsbeispiel ist dem „Trattato di Calcolo“ von Todhunter entnommen, der die „Transactions of the Royal Irish Academy“ (vol. XIX, p. 227) zitiert.

ist. Da $-e^{-\alpha}(f-f'')$ die Derivierte der Funktion $e^{-\alpha}(f+f')$ ist, welche sich für $\alpha = 0$ auf $f'(0) = \operatorname{arc\,tg} \infty = \frac{\pi}{2}$ reduziert, so hat man

$$e^{-\alpha}(f+f') - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}\int_0^{\alpha} e^{-\alpha} \operatorname{sgn}\alpha\, d\alpha = \frac{\pi}{2}(e^{-\alpha}-1)\operatorname{sgn}\alpha,$$

woraus sich ergibt

$$f(\alpha) + f'(\alpha) = \frac{\pi}{2}e^{\alpha} + \frac{\pi}{2}(1-e^{\alpha})\operatorname{sgn}\alpha,$$

ferner, wenn man α in $-\alpha$ verwandelt,

$$-f(\alpha) + f'(\alpha) = \frac{\pi}{2}e^{-\alpha} - \frac{\pi}{2}(1-e^{-\alpha})\operatorname{sgn}\alpha.$$

Daraus folgt durch Addition

$$f'(\alpha) = \frac{\pi}{4}\left\{(1-\operatorname{sgn}\alpha)e^{\alpha} + (1+\operatorname{sgn}\alpha)e^{-\alpha}\right\}.$$

Der Ausdruck in Klammern reduziert sich für $\alpha > 0$ auf $2e^{-\alpha}$, auf $2e^{\alpha}$ für $\alpha < 0$ und auf 2 für $\alpha = 0$, sodaß er in jedem Falle den Wert $2e^{-|\alpha|}$ hat. Also ist

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi e^{-|\alpha|}.$$

n) Das letzte Resultat ist mit unendlich vielen andern in einer wichtigen Formel von Fourier[1]) enthalten, welche es erlaubt eine beliebige differentiierbare[2]) Funktion $f(\alpha)$, die für alle Werte von α gegeben ist und für $\alpha = \pm\infty$ nach Null konvergiert, durch ein bestimmtes Integral auszudrücken. Zunächst bemerke man, daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(\theta)\operatorname{sgn}(\alpha-\theta)\,d\theta = \int_{-\infty}^{\alpha} f'(\theta)\,d\theta - \int_{\alpha}^{\infty} f'(\theta)\,d\theta = 2f(\alpha)$$

ist. Daraus folgt nach der Formel (9)

$$f(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f'(\theta)\,d\theta \int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha-\theta)x}{x}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{dx}{x}\int_{-\infty}^{\infty} f'(\theta)\sin(\alpha-\theta)x\cdot d\theta.$$

Inzwischen liefert die partielle Integration

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(\theta)\sin(\alpha-\theta)x\cdot d\theta = x\int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\cos(\alpha-\theta)x\cdot d\theta.$$

Also ist

$$f(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\cos(\alpha-\theta)x\cdot d\theta.$$

---

1) „Théorie analytique de la chaleur“ (Oeuvres, t. I, p. 408).

2) Die Bedingung ist zu eng. Siehe z. B. Poincaré „Théorie analytique de la propagation de la chaleur“, p. 102.

Wenn man daher setzt

$$(28)\qquad \varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\cos\theta x\cdot d\theta,\quad \psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\sin\theta x\cdot d\theta,$$

so hat man

$$(29)\qquad f(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\{\varphi(x)\cos\alpha x + \psi(x)\sin\alpha x\}\,dx.$$

Dies ist die Formel von Fourier. Z. B. liefern, so oft $f(-\alpha) = f(\alpha)$ ist, die Formeln (28)

$$\varphi(x) = 2\int_0^{\infty} f(\theta)\cos\theta x\cdot d\theta,\qquad \psi(x) = 0,$$

und infolgedessen wird die Gleichung (29) $f(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\varphi(x)\cos\alpha x\cdot dx.$

Insbesondere hat man für $f(\alpha) = e^{-|\alpha|}$, wenn man sich an das erste Integral (27) erinnert, $\varphi(x) = 2/(1+x^2)$ und findet so das Resultat des vorigen Übungsbeispiels wieder[1]. Man bemerke schließlich, daß der obige Beweis der Fourierschen Formel unverändert bestehen bleibt, wenn man den Integralen (28) als Grenzen zwei Wurzeln von $f(\theta)$ gibt. Die rechte Seite von (29) stellt alsdann $f(\alpha)$ dar, wenn α zwischen die beiden Wurzeln fällt, reduziert sich aber auf Null im entgegengesetzten Falle. So findet man für $f(\theta) = \cos\theta$, wenn man mit β eine Wurzel dieser Funktion bezeichnet, daß das Integral

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos\alpha x\cdot\cos\beta x}{1-x^2}\,dx$$

(welches offenbar bedeutungslos ist, wenn $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ beide von Null verschieden sind) für $|\alpha| \leqq |\beta|$ den Wert $\frac{1}{2}\pi\cos\alpha\cos\beta$ hat und im entgegengesetzten Falle null ist. Zu demselben Resultat gelangt man übrigens, indem man (durch eine einfache Transformation) das vorgelegte Integral auf das erste der Integrale (11) reduziert.

741. Integration der totalen Differentiale. Das Problem der vielfachen Integration bietet sich in der natürlichsten Weise als die Ausdehnung des am Anfang (§ 708) behandelten Problems dar, wenn man sich die Aufgabe stellt, eine Funktion von zwei oder mehr unabhängigen Veränderlichen zu bestimmen, deren totales Differential bekannt ist. Wir behandeln zunächst den einfachsten Fall, wo ein Differentialausdruck

$$u(x,y)\,dx + v(x,y)\,dy$$

vorliegt, und stellen uns zunächst die Frage, ob er, wie man zu sagen pflegt, ein vollständiges Differential ist, d. h. ob er das Diffe-

1) Fourier, a. a. O., p. 395.

rential einer Funktion z der unabhängigen Veränderlichen x und y darstellen kann. Dies kommt darauf hinaus, zu fragen, ob es eine Funktion z gibt, für welche man hat

(30) $$\frac{\partial z}{\partial x} = u(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = v(x, y),$$

und man sieht sofort, daß für die Existenz einer solchen Funktion die Bedingung

(31) $$\frac{\partial}{\partial y} u(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} v(x, y)$$

notwendig ist (§ 368), wenigstens in dem Falle, auf welchen wir uns beschränken wollen, wo die Funktionen u und v und ihre ersten Derivierten stetig sind. Wir werden nun, indem wir die wirkliche Bestimmung von z versuchen, auf die notwendige Bedingung (31) geführt werden, aber wir werden auch finden, daß sie für die Existenz von z hinreichend ist. Integriert man (§ 730) in der Tat die zweite der Gleichungen (30), so erhält man $z = \int v\, dy + \varphi(x)$. Deriviert man dann diese Gleichung nach x und beachtet die erste der Gleichungen (30), so sieht man, daß außerdem sein muß

$$\varphi'(x) = u(x, y) - \int \frac{\partial v}{\partial x} dy.$$

Soll die rechte Seite wie die linke von y unabhängig sein, so ist notwendig und hinreichend, daß die Derivierte

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(u - \int \frac{\partial v}{\partial x} dy\right) = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

verschwindet, d. h. daß $\partial u / \partial y$ und $\partial v / \partial x$ durch eine und dieselbe Funktion $f(x, y)$ ausgedrückt werden. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so hat man

$$z = \int v\, dy + \int\left(u - \int \frac{\partial v}{\partial x} dy\right) dx = \int u\, dx + \int v\, dy - \int\int f\, dx\, dy,$$

ein Resultat, welches leicht auf die Form (20) reduzierbar ist. Also gilt der Satz: Damit $u\,dx + v\,dy$ ein vollständiges Differential sei, ist notwendig und hinreichend, daß man hat $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$.

Ebenso sind für die Existenz einer Funktion Φ der unabhängigen Veränderlichen x, y, z, die das totale Differential

$$d\Phi = u\, dx + v\, dy + w\, dz$$

hat, notwendig und hinreichend die Bedingungen

(32) $$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Geht man in der Tat davon aus $\partial \Phi / \partial z = w$ zu integrieren (bei konstant gedachten x, y), so erhält man $\Phi = \int w\, dz + \varphi(x, y)$. Mithin ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u - \int \frac{\partial w}{\partial x} dz, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v - \int \frac{\partial w}{\partial y} dz.$$

Da $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ frei von z sind, so sieht man sofort, daß

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(u - \int \frac{\partial w}{\partial x} dz\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(v - \int \frac{\partial w}{\partial y} dz\right) = 0$$

sein muß, d. h. daß die beiden ersten Bedingungen (32) erfüllt sein müssen. Damit ferner φ existiere, ist nach dem, was wir im Falle zweier Veränderlicher gesagt haben, die Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(u - \int \frac{\partial w}{\partial x} dz\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(v - \int \frac{\partial w}{\partial y} dz\right)$$

notwendig und hinreichend, d. h. gerade die dritte Bedingung (32). In analoger Weise beweist man allgemeiner folgendes: Sind n Funktionen $u_1, u_2, \ldots$ der n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots$ gegeben, so sind die $\frac{1}{2}n(n-1)$ Bedingungen

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

notwendig und hinreichend dafür, daß $u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + \cdots$ ein vollständiges Differential ist.

Anwendungen auf die Berechnung einiger bemerkenswerter Klassen von Integralen.

Integration der rationalen Differentiale.

742. Wenn die zu integrierende Funktion rational ist, so läßt sie sich immer auf die Form $f(x)/g(x)$ reduzieren, wo $f(x)$ und $g(x)$ ganze Funktionen von x sind, die keinen gemeinsamen Teiler haben. Sind $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die Wurzeln von $g(x)$ und die Ordnungen ihrer Vielfachheit bezüglich $r, s, t, \ldots$, ist ferner $\varphi(x)$ die ganze Funktion, welche man den Quotienten von $f(x)$ durch $g(x)$ nennt, so läßt sich bekanntlich (§ 460) der Bruch $f(x)/g(x)$ in folgender Weise in Partialbrüche zerlegen:

$$\varphi(x) + \frac{a_1}{x-\alpha} + \frac{a_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{a_r}{(x-\alpha)^r} + \frac{b_1}{x-\beta} + \cdots + \frac{b_s}{(x-\beta)^s} + \cdots.$$

Mithin ist

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int \varphi(x) dx + a_1 \log|x-\alpha| + b_1 \log|x-\beta| + c_1 \log|x-\gamma| + \cdots$$
$$- \frac{a_2}{x-\alpha} - \frac{a_3}{2(x-\alpha)^2} - \cdots - \frac{b_2}{x-\beta} - \frac{b_3}{2(x-\beta)^2} - \cdots,$$

und das erste Integral auf der rechten Seite zerlegt sich sofort in andere, die sich unmittelbar berechnen lassen. Die Integrale der rationalen Differentiale sind also immer in algebraisch-logarithmischer Form ausdrückbar, d. h. durch algebraische und logarithmische Symbole in endlicher Anzahl.

743. Wenn die Wurzeln nicht alle reell sind, so bietet sich die rechte Seite in imaginärer Form dar, obwohl sie doch reell ist, wenn in dem Differential die Koeffizienten reell sind. Man könnte von der imaginären zu der reellen Form übergehen, indem man die bekannten Relationen zwischen den Symbolen arc tg und log (§ 725, d) anwendet; man zieht es aber vor die imaginären Größen direkt zu vermeiden, indem man sich erinnert (§ 461), daß die zu einem Paar konjugiert imaginärer Wurzeln von $g(x)$ gehörigen Partialbrüche in der Entwickelung von $f(x)/g(x)$ zu einer Summe von folgender Form Veranlassung geben:

$$\frac{a_1 x + b_1}{x^2 + px + q} + \frac{a_2 x + b_2}{(x^2 + px + q)^2} + \cdots + \frac{a_r x + b_r}{(x^2 + px + q)^r}.$$

Die Aufgabe ist also reduziert auf die Berechnung des Integrals

$$\int \frac{(ax + b)\,dx}{(x^2 + px + q)^n},$$

welches uns für $n = 1$ bekannt ist, weil es sich alsdann in

$$a\int \frac{(x + \frac{1}{2}p)\,dx}{x^2 + px + q} + \left(b - \frac{1}{2}ap\right)\int \frac{dx}{x^2 + px + q}$$

zerlegt, sodaß man hat (§ 725, d)

$$\int \frac{(ax + b)\,dx}{x^2 + px + q} = a \log \sqrt{x^2 + px + q} + \frac{b - \frac{1}{2}ap}{\sqrt{q - \frac{1}{4}p^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x - \frac{1}{2}p}{\sqrt{q - \frac{1}{4}p^2}} + C.$$

Für $n > 1$ kann man analog schreiben

$$\int \frac{(ax + b)\,dx}{(x^2 + px + q)^n} = -\frac{a}{2(n-1)(x^2 + px + q)^{n-1}} + \left(b - \frac{1}{2}ap\right)\mathfrak{J}_n,$$

sodaß das Integral

$$\mathfrak{J}_n = \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^n}$$

zu berechnen bleibt. Jetzt liefert die partielle Integration, angewandt auf $\mathfrak{J}_{n-1}$,

$$\mathfrak{J}_{n-1} = \int \frac{d(x + \frac{1}{2}p)}{(x^2 + px + q)^{n-1}}$$

$$= \frac{x + \frac{1}{2}p}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + 2(n-1)\{\mathfrak{J}_{n-1} - (q - \tfrac{1}{4}p^2)\mathfrak{J}_n\},$$

wenn man die Identität $(x + \frac{1}{2}p)^2 = x^2 + px + q - (q - \frac{1}{4}p^2)$ beachtet. Daraus folgt

$$\mathfrak{J}_n = \frac{1}{2(n-1)(q-\frac{1}{4}p^2)}\left\{(2n-3)\mathfrak{J}_{n-1} + \frac{x+\frac{1}{2}p}{(x^2+px+q)^{n-1}}\right\}.$$

Auf diese Weise läßt sich aus $\mathfrak{J}_1$ ableiten $\mathfrak{J}_2$, hieraus $\mathfrak{J}_3$ u. s. w.

744. Übungen. a) Um das Integral von $\frac{dx}{x^3+1}$ zu berechnen, beginne man damit zu setzen

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{c}{x+1} + \frac{ax+b}{x^2-x+1},$$

sodaß identisch $c(x^2-x+1)+(ax+b)(x+1)=1$ sein muß. Es genügt $x=-1$ zu setzen, um $c=\frac{1}{3}$ zu erhalten. Ersetzt man ferner c durch seinen Wert, so ergibt sich $ax+b=-\frac{1}{3}(x-2)$. Das vorgelegte Integral zerlegt sich also in

$$\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1} - \frac{1}{6}\int\frac{(2x-1)\,dx}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}.$$

Mithin ist

$$\int\frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\log\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

b) Das Integral von $\frac{x^5\,dx}{x^4-1}$ zerlegt sich sofort in $\int x\,dx + \int\frac{x\,dx}{x^4-1}$. Das erste hat den Wert $\frac{1}{2}x^2 +$ Const., und bei dem zweiten ist es zweckmäßig $x^2=t$ als Integrationsvariable anzunehmen:

$$\int\frac{x\,dx}{x^4-1} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt = \frac{1}{4}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C.$$

Es ist also

$$\int\frac{x^5\,dx}{x^4-1} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}\log\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2 + C.$$

c) Leicht ausführen läßt sich die Berechnung des Integrals

$$\int\frac{x^2-x+1}{(x^2+x+1)^2}dx = \int\frac{dx}{x^2+x+1} + \int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2} - \int\frac{(2x+1)\,dx}{(x^2+x+1)^2}.$$

Das dritte Integral auf der rechten Seite ist unmittelbar zu berechnen, und das zweite reduziert sich auf das erste durch partielle Integration des letzteren:

$$\int\frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} + 2\int\frac{(x+\frac{1}{2})^2}{(x^2+x+1)^2}dx$$
$$= \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} + 2\int\frac{dx}{x^2+x+1} - \frac{3}{2}\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}.$$

Daraus folgt

$$\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^2+x+1},$$

und das vorgelegte Integral wird

$$\frac{2(x+2)}{3(x^2+x+1)} + \frac{5}{3}\int\frac{dx}{x^2+x+1},$$

sodaß schließlich

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{(x^2 + x + 1)^2} dx = \frac{2(x+2)}{3(x^2 + x + 1)} + \frac{10}{3\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

ist. Man gelangt rascher zum Ziele, wenn man die angegebene partielle Integration in folgender Weise ausführt:

$$\int \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \frac{x + c}{x^2 + x + 1} + \int \frac{(x + c)(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} dx.$$

Man bestimme jetzt c in der Weise, daß für passende Werte von a und von b

$$(x + c)(2x + 1) = a(x^2 + x + 1) + b(x^2 - x + 1)$$

ist. Man sieht, daß $2 = c = a + b$, $2c + 1 = a - b$ sein muß, d. h. $c = 2$ und $a = 7/2$, $b = -3/2$. Also ist

$$\int \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \frac{x + 2}{x^2 + x + 1} + \frac{7}{2}\int \frac{dx}{x^2 + x + 1} - \frac{3}{2}\int \frac{x^2 - x + 1}{(x^2 + x + 1)^2} dx,$$

woraus man wie vorhin den Wert des vorgelegten Integrals ableitet.

d) Wenn das Integral von $\frac{dx}{(x+1)(x^2+1)^2}$ zu berechnen ist, muß man vor allen Dingen die Konstanten c, a, b, a', b' derart zu bestimmen suchen, daß man identisch hat

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{c}{x+1} + \frac{ax + b}{x^2 + 1} + \frac{a'x + b'}{(x^2 + 1)^2},$$

d. h. $c(x^2 + 1)^2 + (ax + b)(x^2 + 1)(x + 1) + (a'x + b')(x + 1) = 1$. Für $x^2 = -1$ findet man

$$a'x + b' = \frac{1}{x+1} = \frac{x-1}{x^2-1} = -\frac{1}{2}(x - 1),$$

und die Gleichheit zwischen dem ersten und dem letzten Gliede, die für einen imaginären Wert gilt, besteht für jeden Wert von x, da a' und b' reell sind. Hiernach reduziert sich die obige Identität auf

$$c(x^2 + 1) + (ax + b)(x + 1) = \tfrac{1}{2},$$

und für $x^2 = -1$ gibt sie $ax + b = \frac{1}{2}(a'x + b')$. Man findet mithin, wenn man einsetzt, $c = \frac{1}{4}$, was sich übrigens unmittelbar aus der ursprünglichen Identität ergibt, wenn man darin $x = -1$ setzt. Dies vorausgeschickt sieht man sofort, daß das vorgelegte Integral gleichwertig ist mit

$$\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{4}\int \frac{x-1}{x^2+1} dx - \frac{1}{2}\int \frac{x-1}{(x^2+1)^2} dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x^2+1} + \log \frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}} + \operatorname{arc\,tg} x\right) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Inzwischen hat man

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} + \int \frac{2x^2}{(x^2+1)^2} dx = \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{dx}{x^2+1} - 2\int \frac{dx}{(x^2+1)^2},$$

woraus folgt

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1}\right).$$

Also ist

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{x+1}{x^2+1} + \log\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}} + 2\operatorname{arc\,tg} x\right) + C.$$

e) Um das Integral von $\frac{dx}{x^4+1}$ zu berechnen, bemerke man in erster Linie, daß

$$x^4+1 = (x^2+1)^2 - \left(x\sqrt{2}\right)^2 = \left(x^2+x\sqrt{2}+1\right)\left(x^2-x\sqrt{2}+1\right)$$

ist, und setze

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{ax+b}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{a'x+b'}{x^2-x\sqrt{2}+1}.$$

Da die Verwandlung von x in $-x$ die linke Seite nicht ändert, während sie auf der rechten Seite die Nenner der beiden Brüche vertauscht, so muß dasselbe bei den Zählern eintreten, weil die Zerlegung in Partialbrüche nur in einer Weise möglich ist. Daraus folgt $a'x+b' = -ax+b$, sodaß identisch sein muß

$$1 = (ax+b)\left(x^2-x\sqrt{2}+1\right) - (ax-b)\left(x^2+x\sqrt{2}+1\right) = 2\left(b-a\sqrt{2}\right)x^2 + 2b,$$

mithin $b = a\sqrt{2} = \frac{1}{2}$. Also ist

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{\left(x+\sqrt{2}\right)dx}{x^2+x\sqrt{2}+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{\left(x-\sqrt{2}\right)dx}{x^2-x\sqrt{2}+1}.$$

Setzt man nun $p = \pm\sqrt{2}$, so sieht man, daß es genügt das eine Integral

$$\int \frac{(x+p)\,dx}{x^2+px+1} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+p)\,dx}{x^2+px+1} + \frac{1}{2}p\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2}p)^2+\frac{1}{2}}$$

$$= \log\sqrt{x^2+px+1} + \frac{p}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(x\sqrt{2}+\frac{p}{\sqrt{2}}\right) + C$$

zu berechnen und zu bemerken (§ 254, d), daß

$$\operatorname{arc\,tg}\left(x\sqrt{2}+1\right) + \operatorname{arc\,tg}\left(x\sqrt{2}-1\right) = -\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1} + \text{Const.}$$

ist, um zu erhalten

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\log\sqrt{\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}} - \operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}\right) + C.$$

f) Noch leichter ist die Berechnung des folgenden Integrals:

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x\sqrt{2}+1}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1} + C.$$

Wenn die Integration von 0 bis 1 erstreckt wird, so erhält man, da

$$\lim_{x=1-0}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1} = -\frac{1}{2}\pi$$

ist, $\pi/2\sqrt{2}$ als Wert des bestimmten Integrals; und man gelangt daher, wenn man die zu integrierende Funktion in eine Potenzreihe entwickelt, zu der Formel

$$1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} - \cdots = \pi/2\sqrt{2},$$

welche man auch aus der Formel (17) des vorigen Kapitels (§ 729, e) für $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ableiten kann.

g) Ist das Integral von $\frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx$ zur Berechnung vorgelegt, so gehen wir von der Bemerkung aus, daß

$$\frac{x^2+1}{x^3+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x+1} + \frac{x+1}{x^2-x+1}\right)$$

ist. Verwandelt man x in x^2 und bemerkt, daß

$$x^4 - x^2 + 1 = (x^2+1)^2 - \left(x\sqrt{3}\right)^2 = \left(x^2 + x\sqrt{3} + 1\right)\left(x^2 - x\sqrt{3} + 1\right)$$

ist, so findet man

$$\frac{x^4+1}{x^6+1} = \frac{2}{3(x^2+1)} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{x^2 + x\sqrt{3}+1} + \frac{1}{x^2 - x\sqrt{3}+1}\right).$$

Inzwischen ist für $p = \pm\sqrt{3}$

$$\int \frac{dx}{x^2+px+1} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} = 2\,\mathrm{arc\,tg}\,(2x+p) + C.$$

Also hat das vorgelegte Integral den Wert

$$\tfrac{2}{3}\,\mathrm{arc\,tg}\,x + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{arc\,tg}\left(2x+\sqrt{3}\right) + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{arc\,tg}\left(2x-\sqrt{3}\right) + C,$$

und es ist schließlich

$$\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx = -\frac{1}{3}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1} + C.$$

Die Entwickelung der zu integrierenden Funktion in eine Potenzreihe zeigt, daß das bestimmte Integral zwischen 0 und 1 denselben Wert hat wie die Summe der Reihe $1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \cdots$, die wir andererseits mit Hilfe der beim vorigen Übungsbeispiel zitierten Formel berechnen können. In der Tat gibt jene Formel für $\alpha = \frac{\pi}{6}$

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\cdots\right) + \frac{1}{4}\sqrt{3}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots\right) + \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\right) = \frac{5}{12}\pi.$$

woraus man gewinnt (§ 729, d)

$$1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \cdots = \frac{5\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{3}\pi.$$

Dagegen scheint es, als ob der von uns gefundene Ausdruck des unbestimmten Integrals als Wert des bestimmten Integrals 0 lieferte (ein absurdes Resultat); aber es ist zu beachten (§ 725, k), daß in dem Intervall (0, 1) die Funktion $3x(x^2-1)/(x^4-4x^2+1)$ für

$$x = c = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

unendlich wird und links von c negativ, rechts von c positiv ist, sodaß man hat

$$\int_0^1 \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx = -\frac{1}{3}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1}\right)_0^{c-0} - \frac{1}{3}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1}\right)_{c+0}^1$$
$$= \frac{1}{3}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1}\right)_{c-0}^{c+0} = \frac{1}{3}\pi.$$

Ebenso müßte man, wenn die Integration von 0 bis ∞ ausgedehnt werden sollte, auch auf die andere positive Wurzel $c' = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ von $x^4 - 4x^2 + 1$ Rücksicht nehmen. Man würde als Wert des Integrals finden

$$\frac{1}{3}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1}\right)_{c-0}^{c+0} + \frac{1}{3}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1}\right)_{c'-0}^{c'+0} = \frac{2}{3}\pi.$$

Zum Zwecke der Verifikation bemerke man folgendes: Zerlegt man das Intervall $(0, \infty)$ in $(0, 1) + (1, \infty)$ und verwandelt in dem auf das Intervall $(1, \infty)$ bezüglichen Integral x in $1/x$, so findet man gerade

$$\int_0^\infty \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx = 2\int_0^1 \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx = \frac{2}{3}\pi.$$

Integration der irrationalen Differentiale.

745. Wenn die Irrationalität des Integranden einzig daran liegt, daß in ihm Potenzen der Integrationsvariablen x mit gebrochenen Exponenten vorkommen, so wird durch die Substitution $x = t^n$, wo n das kleinste gemeinsame Multiplum der Nenner der Exponenten ist, die Irrationalität beseitigt, und das Integral läßt sich in der neuen Form so berechnen, wie wir gesehen haben. Sobald jedoch in der zu integrierenden Funktion kompliziertere Irrationalitäten auftreten, ist die Integration praktisch fast immer unmöglich in dem Sinne, daß es keine Kombination algebraischer und logarithmischer Symbole in endlicher Anzahl gibt, die geeignet ist das vorgelegte Integral darzustellen. Es gibt jedoch einige Klassen von Integralen, die Ausnahmen bilden und sich durch leichte Kunstgriffe berechnen lassen. Wir wollen hier einige wichtige Fälle dieser Art betrachten.

a) Um das Integral von $\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$ zu berechnen, setzen wir das Radikal gleich $t - x$, sodaß

$$(1) \qquad x = \frac{t^2-q}{2t+p}, \quad t - x = \frac{t^2+pt+q}{2t+p}, \quad dx = 2\frac{t^2+pt+q}{(2t+p)^2}\,dt$$

ist. Das Integral verwandelt sich in

$$\int \frac{dt}{t+\frac{p}{2}} = \log \left| t + \frac{p}{2} \right| + C.$$

Mithin ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}} = \log \left| x + \frac{p}{2} + \sqrt{x^2+px+q} \right| + C.$$

b) Um das Integral von $\dfrac{dx}{\sqrt{-x^2+px+q}}$ zu berechnen, bemerken wir, daß

$$-x^2+px+q = -\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + q + \frac{1}{4}p^2$$

ist (wo $q+\frac{1}{4}p^2$ positiv sein muß, wenn man in dem Gebiet der reellen Zahlen bleiben will), und setzen

$$x-\frac{p}{2} = t\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}, \text{ sodaß } -x^2+px+q = \left(q+\frac{1}{4}p^2\right)(1-t^2).$$

Das vorgelegte Integral wird dann $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, und man hat daher

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+px+q}} = \arcsin \frac{x-\frac{p}{2}}{\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}} + C.$$

c) Die partielle Integration liefert (vgl. § 727, a)

$$\int \sqrt{\pm x^2+px+q}\,dx = \left(x \pm \frac{1}{2}p\right)\sqrt{\pm x^2+px+q} \mp \int \frac{\left(x\pm\frac{p}{2}\right)^2 dx}{\sqrt{\pm x^2+px+q}}.$$

Nun transformiert sich die rechte Seite auf Grund der Identität

$$\pm\left(x\pm\frac{p}{2}\right)^2 = \pm x^2+px+q-\left(q\mp\frac{1}{4}p^2\right)$$

in

$$\left(x\pm\frac{p}{2}\right)\sqrt{\pm x^2+px+q} - \int\sqrt{\pm x^2+px+q}\,dx + \left(q\mp\frac{1}{4}p^2\right)\int\frac{dx}{\sqrt{\pm x^2+px+q}}.$$

Also ist

$$2\int\sqrt{\pm x^2+px+q}\,dx = \left(x\pm\frac{p}{2}\right)\sqrt{\pm x^2+px+q} + \left(q\mp\frac{1}{4}p^2\right)\int\frac{dx}{\sqrt{\pm x^2+px+q}}$$

und daher

$$\int\sqrt{x^2+px+q}\,dx = \frac{1}{2}\left(x+\frac{p}{2}\right)\sqrt{x^2+px+q}$$
$$+\frac{1}{2}\left(q-\frac{1}{4}p^2\right)\log\left|x+\frac{p}{2}+\sqrt{x^2+px+q}\right| + C,$$

$$\int\sqrt{-x^2+px+q}\,dx = \frac{1}{2}\left(x-\frac{p}{2}\right)\sqrt{-x^2+px+q}$$
$$+\frac{1}{2}\left(q+\frac{1}{4}p^2\right)\arcsin\frac{x-\frac{p}{2}}{\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}} + C.$$

746. Allgemeiner sei $f(x, y)$ eine rationale Funktion von x und von y, und man betrachte das Integral von $f(x, \sqrt{\pm x^2 + px + q})\,dx$. Wie kompliziert auch der zu integrierende Ausdruck sein mag, so kann man sich doch leicht überzeugen, daß es durch passende Substitutionen immer gelingt ihn rational zu machen, und daß folglich das Integral immer in algebraisch-logarithmischer Form ausdrückbar ist. Es genügt in der Tat $t = x + \sqrt{x^2 + px + q}$ als Integrationsvariable anzunehmen, um auf Grund von (1) jede Irrationalität in $f(x, y)$ verschwinden zu sehen, wenn $y = \sqrt{x^2 + px + q}$ ist. Dies gilt nicht für $y = \sqrt{-x^2 + px + q}$; aber es gibt in diesem Falle eine andere Substitution, die auch im vorigen Falle anwendbar ist, so oft die Wurzeln von y reell sind; und dieser letztere Umstand findet sicher im zweiten Falle statt, sonst wäre y für alle Werte von x imaginär. Sind α und β die Wurzeln von $\pm x^2 + px + q$, so genügt es

$$x = \frac{\beta \mp \alpha t^2}{1 \mp t^2} \tag{2}$$

zu setzen, um zu finden (indem man t ein passendes Zeichen beilegt)

$$y = \sqrt{\pm(x - \alpha)(x - \beta)} = \frac{(\beta - \alpha)t}{1 \mp t^2}, \quad dx = \pm \frac{2(\beta - \alpha)t\,dt}{(1 \mp t^2)^2}$$

und sich zu überzeugen, daß $f(x, y)\,dx$ auf solche Weise die Form $\varphi(t)\,dt$ annimmt mit rationalem reellem $\varphi(t)$.

747. Übrigens dienen die obigen Substitutionen nur dazu, die ausnahmslose Möglichkeit zu zeigen, den zu integrierenden Ausdruck unter Vermeidung imaginärer Größen auf rationale Form zu reduzieren. In der Praxis ist es aber besser zunächst den vorgelegten Ausdruck in folgender Weise zu vereinfachen. Die rationale Funktion $f(x, y)$ läßt sich immer auf die Form eines Quotienten aus zwei ganzen Funktionen bringen. Ersetzt man in jeder dieser ganzen Funktionen, die nach Potenzen von y geordnet sind, jedes y^{2n} durch $(\pm x^2 + px + q)^n$ und jedes y^{2n+1} durch $(\pm x^2 + px + q)^n y$, so erhält man

$$f(x, y) = \frac{\varphi_1(x) + y\psi_1(x)}{\varphi_2(x) + y\psi_2(x)},$$

wo $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ ganze Funktionen von x sind. Multipliziert man Zähler und Nenner mit $\varphi_2 - y\psi_2$ und setzt wieder

$$y^2 = \pm x^2 + px + q, \qquad y = \frac{\pm x^2 + px + q}{y},$$

so findet man

$$f(x, y) = \varphi(x) + \frac{\psi(x)}{y},$$

wo φ und ψ rationale Funktionen von x sind. Zerlegt man ferner (vgl. § 742) $\psi(x)$ in Partialbrüche, so sieht man, daß abgesehen von

Integralen rationaler Differentiale die Berechnung des vorgelegten Integrals sich auf die Berechnung eines oder mehrerer Integrale der folgenden Typen reduziert:

$$\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{\pm x^2 + px + q}}, \quad \int \frac{dx}{(x-a)^n \sqrt{\pm x^2 + px + q}},$$

wo n ganz und positiv und a reell oder imaginär ist. Durch die Substitution $x = a + \frac{1}{z}$ sind die Integrale des zweiten Typus immer reduzierbar auf diejenigen des ersten, und es ist leicht zu sehen, daß diese letzten sich leicht auf das einzige Integral $\int \frac{dx}{y}$ reduzieren, welches wir in § 745 berechnet haben. In der Tat ist

$$\int x^n \frac{dx}{y} = \pm \int x^{n-1} \left(\pm x + \frac{p}{2}\right) \frac{dx}{y} \mp \frac{p}{2} \int x^{n-1} \frac{dx}{y},$$

wo man wegen $y\,dy = \left(\pm x + \frac{p}{2}\right) dx$ hat

$$\int x^{n-1} \left(\pm x + \frac{p}{2}\right) \frac{dx}{y} = \int x^{n-1}\,dy$$

$$= x^{n-1} y - (n-1) \int x^{n-2} (\pm x^2 + px + q) \frac{dx}{y}$$

und infolgedessen, wenn man in die vorige Gleichung einsetzt,

$$n \int x^n \frac{dx}{y} = \pm x^{n-1} y \mp \left(n - \frac{1}{2}\right) p \int x^{n-1} \frac{dx}{y} \mp (n-1)\, q \int x^{n-2} \frac{dx}{y}.$$

Aus dieser Rekursionsformel leitet man successiv für $n = 1, 2, 3, \ldots$ ab

$$\int x \frac{dx}{y} = \pm y \mp \frac{p}{2} \int \frac{dx}{y}, \quad \int x^2 \frac{dx}{y} = \frac{1}{2} \left(\pm x - \frac{3}{2} p\right) y \mp \frac{1}{2} \left(q \mp \frac{3}{4} p^2\right) \int \frac{dx}{y},$$

$$\int x^3 \frac{dx}{y} = \frac{1}{3} y^3 - \left(\frac{3}{4} px + q \mp \frac{5}{8} p^2\right) y + \frac{p}{4} \left(3q \mp \frac{5}{4} p^2\right) \int \frac{dx}{y}, \quad \ldots .$$

748. Durch ein analoges Verfahren kann man allgemeiner die Integration jedes Differentials $f(x, y)\,dx$ vereinfachen, dessen Irrationalität einzig von der Quadratwurzel

$$y = \sqrt{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \cdots + a_m}$$

herrührt. Zunächst bemerke man, daß sich, wenn m gerade ist, der Grad des Polynoms unter dem Wurzelzeichen in dem zu integrierenden Ausdruck immer auf $m - 1$ erniedrigen läßt: dies erkennt man leicht mit Hilfe der Substitution $x = \alpha + \frac{1}{z}$, in welcher α eine Wurzel von y ist. Kehren wir z. B. zu dem Fall $y = \sqrt{\pm x^2 + px + q}$ zurück und bezeichnen wir mit β die andere Wurzel von y, so ergibt sich $yz = \sqrt{\mp (\beta - \alpha) z \pm 1}$. Nimmt man nun das neue Radikal als Integrationsvariable an, so wird man gerade zu der Substitution (2) geführt. Ebenso ist der Fall $m = 4$ auf $m = 3$ reduzierbar; aber man würde vergebens versuchen diesen auf den Fall $m = 2$ zurückzuführen. Man beweist nämlich bei einem tieferen Studium dieser Integrale, welche elliptische heißen, daß es unmöglich ist sie in algebraisch-logarithmischer Form auszudrücken, und daß der Versuch sie in Integrale rationaler Differentiale zu transformieren soviel bedeutet wie das Bemühen, durch stetige Deformation die Fläche eines Ringes auf sphärische Form zu reduzieren[1]). Durch eine ähnliche Rechnung wie die des vorigen Paragraphen gelingt es nur zu beweisen, daß die elliptischen Integrale alle auf die folgenden reduzierbar sind

$$\int \frac{dx}{y}, \quad \int \frac{x\,dx}{y}, \quad \int \frac{dx}{(x-a)y},$$

welche Integrale erster, zweiter und dritter Gattung heißen; und man wird weiter durch geeignete Substitutionen dazu geführt, bei den beiden ersten Gattungen als typisch die Integrale

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad \int \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

anzunehmen. Das erste, genommen zwischen den Grenzen 0 und φ, bezeichnet man mit $F(k, \varphi)$, und das zweite, genommen zwischen denselben Grenzen, kann man schreiben

$$\frac{1}{k^2}\int_0^\varphi \frac{1-(1-k^2\sin^2\varphi)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi = \frac{1}{k^2}\left\{F(k,\varphi) - E(k,\varphi)\right\},$$

wenn man übereinkommt mit $E(k, \varphi)$ das Integral $\int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$ zu bezeichnen. Der Wert φ der oberen Grenze heißt die Amplitude und k der Modul der Integrale. Bei den mechanischen und geometrischen Anwendungen sind besonders wichtig die Integrale F und E, die der Amplitude $\frac{\pi}{2}$ entsprechen. Sie heißen vollständige elliptische Integrale und werden folgendermaßen bezeichnet:

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

749. Wir wollen uns nunmehr mit den Substitutionen beschäftigen, welche wir im vorigen Paragraphen nur erwähnt haben, und sie in der Weise auszuführen suchen, daß wir die imaginären Größen vermeiden. Zunächst wollen wir die Wurzeln α, β, γ von

---

1 Siehe, für $m > 4$, den „Cours d'Analyse de l'École polytechnique" von Hermite (pp. 291—297).

$$y = \sqrt{\pm x^3 + ax^2 + bx + c}$$

als reell voraussetzen: α sei die kleinste oder die größte von ihnen, je nachdem vor x^3 das Zeichen $+$ oder das Zeichen $-$ steht, β sei die mittelste Wurzel, und man bezeichne mit k^2 das Verhältnis von $\beta - \alpha$ zu $\gamma - \alpha$, welches immer zwischen 0 und 1 liegt. Die Substitution $x = \alpha + (\beta - \alpha)\sin^2\varphi$ liefert

$$\pm x^3 + ax^2 + bx + c = |\gamma - \alpha|\,(\beta - \alpha)^2 (1 - k^2\sin^2\varphi)\sin^2\varphi\cos^2\varphi;$$

mithin transformiert sich, abgesehen von einem reellen konstanten Faktor, das Radikal y in das Produkt aus $\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}$ und $\sin\varphi\cos\varphi$, und es ist daher

$$\frac{dx}{y} \quad \text{proportional zu} \quad \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}.$$

Zu demselben Resultat gelangt man, wenn die Wurzeln nicht alle reell sind. Man kann unter dieser Voraussetzung, wenn man immer die Koeffizienten als reell annimmt, y^2 die Form $\pm(x - \alpha)(x^2 + px + q)$ mit reellen α, p, q geben. Man setze alsdann $x = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + p\alpha + q}\,\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}$. Eine leichte Rechnung gibt

$$\pm(x - \alpha)(x^2 + px + q) = (\alpha^2 + p\alpha + q)^{\frac{3}{2}}(1 - k^2\sin^2\varphi)\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{\cos^4\frac{\varphi}{2}},$$

wo die Zahl

$$k^2 = \frac{1}{2}\left(1 \mp \frac{\alpha + \frac{p}{2}}{\sqrt{\alpha^2 + p\alpha + q}}\right)$$

immer zwischen 0 und 1 liegt, da

$$\alpha^2 + p\alpha + q = \left(\alpha + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{1}{4}p^2\right) > \left(\alpha + \frac{p}{2}\right)^2$$

ist. Es verwandelt sich also in beiden Fällen $\int\frac{dx}{y}$ in $F(k, \varphi)$; dagegen reduziert sich die Berechnung von $\int\frac{x\,dx}{y}$ auf die Berechnung des einen oder des andern der Integrale

$$\int\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}, \quad \int\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\,d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}},$$

je nachdem die Wurzeln von y alle reell sind oder nicht. Wir haben gesehen, daß das erste auf die Integrale F und E reduzierbar ist; und um zu zeigen, daß sich dasselbe von dem zweiten behaupten läßt, bemerken wir, daß

$$d\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\cdot\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\right) = \left(\frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right) - k^2\sin^2\varphi\right)\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}$$

ist, woraus durch Integration folgt

$$\int_0^{\varphi} \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}\, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = F(k, \varphi) - 2\, E(k, \varphi) + 2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \cdot \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}.$$

Ist ferner y^2 ein Polynom vierten Grades, so haben wir bereits gesagt, daß, wenn α eine seiner Wurzeln ist, die Substitution $x = \alpha + \frac{1}{z}$ genügt, um wieder zu dem früheren Fall zurückgeführt zu werden. Wenn aber das Polynom keine reellen Wurzeln hat, so ist es zweckmäßig zu einer andern Substitution zu greifen, die wir hier nur angeben wollen, indem wir die dazu führende Diskussion[1]) beiseite lassen. Es sei also $y^2 = (x^2 + px + q)(x^2 + p'x + q')$ und man setze jeden Faktor auf der rechten Seite als wesentlich positiv voraus. Setzt man

$$(p - p')\lambda = q - q' - \sqrt{(q - q')^2 + (p - p')(pq' - qp')},$$

$$(p - p')\mu = q - q' + \sqrt{(q - q')^2 + (p - p')(pq' - qp')},$$

so ist die anzuwendende Substitution

$$x = \frac{\lambda + \mu m \operatorname{tg} \varphi}{1 + m \operatorname{tg} \varphi},$$

wo m die kleinste der Zahlen

$$\sqrt{\frac{\lambda^2 - p\lambda + q}{\mu^2 - p\mu + q}}, \quad \sqrt{\frac{\lambda^2 - p'\lambda + q'}{\mu^2 - p'\mu + q'}}$$

darstellt.

750. Die Möglichkeit $f(x, y)\,dx$ in algebraisch-logarithmischer Form zu integrieren, wenn $y^2 = \pm x^2 + px + q$ ist, beruht einzig und allein auf dem Umstand, daß diese Gleichung einen Kegelschnitt darstellt, welcher eine unikursale (§ 611) Kurve oder eine Kurve vom Geschlecht Null ist. Wenn man allgemeiner annimmt, daß in $f(x, y)$ die Veränderliche y mit x durch die Gleichung $F(x, y) = 0$ einer beliebigen unikursalen Kurve verbunden ist, so wird sich offenbar $f(x, y)\,dx$ rational machen lassen, indem man als neue Integrationsvariable denjenigen Parameter t annimmt, durch welchen sich x und y rational ausdrücken lassen. Auf diese Weise kommt es, daß unzählige Differentiale, deren Irrationalität scheinbar viel komplizierter ist als die der elliptischen Differentiale, sich leicht auf rationale Form bringen und daher integrieren lassen. Weit schwieriger ist der Beweis des umgekehrten Satzes: Wenn die Kurve $F(x, y) = 0$ *nicht* unikursal ist, so läßt sich das Integral von $f(x, y)\,dx$ *nicht* in algebraisch-logarithmischer Form ausdrücken. Hiermit ist

---

1) Schloemilch: „Compendium der höheren Analysis", 3. Aufl., Bd. II, Seite 290 ff.

der innere Grund der bei den elliptischen Integralen bereits angegebenen Unmöglichkeit aufgedeckt, da die Kurve dritter Ordnung

$$y^2 = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3,$$

die im allgemeinen keinen Doppelpunkt hat, vom Geschlecht 1 ist: sie ist nur dann unikursal, wenn sie einen Doppelpunkt hat, wozu erforderlich ist, daß zwei von den drei Wurzeln von y in eine zusammenfallen $(\alpha = \beta)$, und man braucht dann nur $x = \gamma + t^2$ zu setzen, um den zu integrierenden Ausdruck rational zu machen. Etwas allgemeiner gilt folgendes: So oft y mit x durch eine Gleichung von der Form

$$ay^n + bxy^{n-1} + cx^2y^{n-2} + \cdots = a'y^{n-1} + b'xy^{n-2} + c'x^2y^{n-3} + \cdots$$

zusammenhängt, genügt es $y = tz$ zu setzen, um zu finden

$$x = \frac{a't^{n-1} + b't^{n-2} + \cdots}{at^n + bt^{n-1} + \cdots}, \quad y = \frac{a't^n + b't^{n-1} + \cdots}{at^n + bt^{n-1} + \cdots},$$

und auf diese Weise $f(x, y)\,dx$ in $\varphi(t)\,dt$ zu transformieren mit rationalem $\varphi(t)$.

751. Binomische Differentiale. Man nennt so die Differentiale, welche die Form $x^p(a + bx^m)^q\,dx$ haben. Wir wollen das Integral mit $\vartheta(p, q)$ bezeichnen und bemerken, daß die Substitution $a + bx^m = t$ liefert

$$\vartheta(p, q) = \frac{1}{mb}\int\left(\frac{t-a}{b}\right)^{\frac{p+1}{m}-1} t^q\,dt.$$

Die rechte Seite kann man berechnen, wenn $(p+1)/m$ eine ganze Zahl ist. Die Integration ist unmittelbar, wenn dieselbe ganz und positiv ist; im entgegengesetzten Falle wird es genügen die Substitution $t = \theta^n$ auszuführen und die ganze Zahl n so zu wählen, daß nq ganz ist, wodurch dann das Differential auf rationale Form reduziert wird. Bringt man ferner $x^p(a + bx^m)^q$ auf die Form $x^{p+mq}(b + ax^{-m})^q$, so sieht man unter Anwendung der obigen Bedingung, daß das vorgelegte Integral sich auch dann sofort berechnen läßt (mit Hilfe der Substitution $b + ax^{-m} = t$), wenn die Zahl $(p + mq + 1)/m$ ganz ist. Es ist also das gegebene Integral, wenn eine der Zahlen

$$\frac{p+1}{m}, \quad \frac{p+1}{m} + q$$

ganz ist, transformierbar in ein Integral eines rationalen Differentials. Tchebycheff[1]) hat überdies bewiesen, daß dies die einzigen Fälle sind, in welchen das binomische Differential in algebraisch-logarithmischer Form integrierbar ist. Es wird hier

1) „Liouvilles Journal" (1853, p. 108).

stillschweigend vorausgesetzt, daß das Differential nicht bereits rational ist (und daher, daß p, q, m nicht sämtlich ganz sind), und daß es sich nicht durch eine Substitution $x = t^n$ sofort auf rationale Form reduzieren läßt, was sich (vgl. § 745) machen läßt, wenn p und m gebrochen sind und q ganz ist. Unter Ausschluß dieser Fälle wird also vorausgesetzt, daß q gebrochen ist, während p und m ganz sind und außerdem $m > 0$ ist, was sich immer erreichen läßt, indem man eventuell $x = 1/t$ setzt.

752. Um ein Integral eines binomischen Differentials zu berechnen oder nur zu vereinfachen, sucht man es durch analoge, aber einfachere Integrale auszudrücken. Hierzu gelangt man, indem man in erster Linie bemerkt, daß es sich immer bewirken läßt, daß q zwischen 0 und 1 liegt. In der Tat liefert, wenn $p + 1 \gtrless 0$ angenommen wird, die partielle Integration

$$\mathfrak{J}(p,q) = \int (a + bx^m)^q \, d\frac{x^{p+1}}{p+1} = \frac{x^{p+1}}{p+1}(a + bx^m)^q - \frac{mqb}{p+1}\mathfrak{J}(p+m, q-1).$$

Andererseits hat man identisch

$$b\mathfrak{J}(p+m, q-1) = \mathfrak{J}(p,q) - a\mathfrak{J}(p, q-1).$$

Mithin ist

$$(3) \quad (p + mq + 1)\mathfrak{J}(p,q) = x^{p+1}(a + bx^m)^q + mqa\mathfrak{J}(p, q-1).$$

Aus dieser Formel gewinnt man $\mathfrak{J}(p,q)$ oder $\mathfrak{J}(p, q-1)$, je nachdem q positiv oder negativ ist. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens kann man von $q > 0$ so viele Einheiten als man will subtrahieren oder zu $q < 0$ addieren. Man beachte, daß, wenn einer der Koeffizienten von $\mathfrak{J}(p,q)$ und $\mathfrak{J}(p, q-1)$ null ist, ein integrierbarer Fall vorliegt und die Formel (3) den Wert von $\mathfrak{J}(p, q-1)$ oder von $\mathfrak{J}(p,q)$ liefert. Ebenso kann man immer bewirken, daß p zwischen 0 und m liegt. In der Tat liefert die partielle Integration, in anderer Weise angewandt, wenn $q + 1 \gtrless 0$ angenommen wird,

$$\mathfrak{J}(p,q) = \int x^{p-m+1} \, d\frac{(a + bx^m)^{q+1}}{(q+1)mb}$$

$$= x^{p-m+1}\frac{(a + bx^m)^{q+1}}{(q+1)mb} - \frac{p-m+1}{(q+1)mb}\mathfrak{J}(p-m, q+1).$$

Andererseits ist

$$\mathfrak{J}(p-m, q+1) = a\mathfrak{J}(p-m, q) + b\mathfrak{J}(p,q),$$

mithin

$$(4) \quad (p+mq+1)b\mathfrak{J}(p,q) = x^{p-m+1}(a+bx^m)^{q+1} - (p-m+1)a\mathfrak{J}(p-m, q).$$

Aus dieser Relation gewinnt man $\mathfrak{J}(p,q)$ oder $\mathfrak{J}(p-m, q)$, je nachdem p positiv oder negativ ist. Man sieht also, daß mit Hilfe der

Formeln (3) und (4) die Berechnung des Integrals jedes binomischen Differentials immer auf den Fall zu reduzieren ist, wo man hat

$$p \text{ und } m \text{ ganz}, \quad m > 0, \quad 0 < q < 1, \quad 0 < p < m.$$

753. Beispiele. a) Um $\int \sqrt{x^2 + 2x - 1}\,\frac{dx}{x}$ zu berechnen, setze man die Quadratwurzel gleich $t - x$, sodaß

$$x = \frac{t^2+1}{2(t+1)}, \quad \sqrt{x^2+2x-1} = t - x = \frac{t^2+2t-1}{2(t+1)}, \quad dx = \frac{t^2+2t-1}{2(t+1)^2}\,dt$$

ist. Das vorgelegte Integral verwandelt sich in

$$\frac{1}{2}\int \frac{(t^2+2t-1)^2\,dt}{(t+1)^2(t^2+1)} = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{2}{t^2+1}\right) dt.$$

Man erhält daher als Wert des Integrals durch eine leichte Rechnung

$$\sqrt{x^2+2x-1} + \log\left(x+1+\sqrt{x^2+2x-1}\right) - 2\,\mathrm{arc\,tg}\left(x+\sqrt{x^2+2x-1}\right) + C.$$

Rascher gelangt man zum Ziele, indem man das vorgelegte Integral in

$$\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+2x-1}} + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-1}} - \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$$

zerlegt und bemerkt, daß

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}} = \mp \int \frac{d\,\frac{1}{x}}{\sqrt{2-\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}} = \pm\,\mathrm{arc\,sin}\,\frac{x-1}{x\sqrt{2}} + C'$$

ist, wo man (vgl. § 725, a) die oberen Zeichen oder die unteren nehmen muß, je nachdem x positiv oder negativ ist. Die erste Form ist gerade deshalb vorzuziehen, weil man bei ihr keine Zweideutigkeit in den Zeichen hat. Übrigens ergibt sich die Äquivalenz der beiden Formen aus der Identität

$$\pm\,\mathrm{arc\,sin}\,\frac{x-1}{x\sqrt{2}} = 2\,\mathrm{arc\,tg}\left(x+\sqrt{x^2+2x-1}\right) - (1 \pm 2)\,\frac{\pi}{4}.$$

b) In analoger Weise berechnet man $\int \sqrt{x^2-1}\,\frac{dx}{x}$. Man kann dies Integral aber auch als das Integral eines binomischen Differentials betrachten, für welches man hat $p = -1$, $m = 2$, $q = \frac{1}{2}$. Es ist also $\frac{p+1}{m} = 0$ und daher die erste Bedingung für die Integrierbarkeit erfüllt (wie es immer der Fall ist, wenn $p = -1$, was auch $m \gtrless 0$ sein mag). Man wird also dazu geführt $x^2 - 1 = t^2$ zu setzen und erhält

$$\int \sqrt{x^2-1}\,\frac{dx}{x} = \int \frac{t^2\,dt}{t^2+1} = t - \mathrm{arc\,tg}\,t + C = \sqrt{x^2-1} \pm \mathrm{arc\,sin}\,\frac{1}{x} + C'.$$

c) Will man das Integral des Differentials $\frac{dx}{x^3\sqrt{x-1}}$ berechnen, indem man dasselbe als ein binomisches Differential ansieht, so bemerke man zunächst, daß $p = -3$, $m = 1$, $q = -\frac{1}{2}$ ist. Da die erste Bedingung für die Integrierbarkeit erfüllt ist (wie es immer der Fall ist für $m = \pm 1$, wenn p eine ganze Zahl ist), so genügt es $x - 1 = t^2$ zu setzen, um das Differential rational zu machen und durch eine leichte Integration zu finden

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x-1}} = \frac{3}{4}\arccos\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3x+2}{4x^2}\sqrt{x-1} + C.$$

d) Bei dem Integral von $\dfrac{x^4\,dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ hat man $p = 4$, $m = 2$, $q = -\frac{3}{2}$, und es ist die zweite Bedingung für Integrierbarkeit erfüllt, da $\dfrac{p+1}{m} + q = 1$ ist. Man muß also setzen $x^{-2} - 1 = t^{-2}$, d. h.

$$x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad dx = \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Man gelangt aber im vorliegenden Falle rascher zum Ziele, wenn man zuerst eine partielle Integration ausführt:

$$\int \frac{x^4\,dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int x^3\,d\,(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} - 3\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \frac{3x - x^3}{2\sqrt{1-x^2}} - \frac{3}{2}\arcsin x + C.$$

Dies kommt darauf hinaus die Formel (4) anzuwenden.

e) Bei dem Integral von $\dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ hat man $p = -\frac{1}{2}$, $m = \frac{1}{4}$, $q = \frac{1}{3}$; und da $\dfrac{p+1}{m} = 2$ ist, so ist die erste Bedingung für die Integrierbarkeit erfüllt. Man kann also sicher sein, daß man zum Ziele gelangt, wenn man $t = 1 + \sqrt[4]{x}$ als Veränderliche annimmt. Auf diese Weise verwandelt sich das vorgelegte Integral in

$$4\int (t-1)\,t^{\frac{1}{3}}\,dt = \tfrac{3}{7}(4t-7)\,t^{\frac{4}{3}} + C.$$

Mithin ist

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{3}{7}\left(4\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 3\right)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} + C.$$

f) Wenn das Integral $\displaystyle\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ zu berechnen ist, so gehe man von der Bemerkung aus, daß wegen

$$\frac{p+1}{m} = \frac{n+1}{2}, \quad \frac{p+1}{m} + q = \frac{n}{2}$$

die Reduktion auf ein Integral einer rationalen Funktion nur dann möglich ist, wenn n eine ganze Zahl ist. Je nachdem n ungerade oder gerade ist, läßt sich das Integral auf eine der folgenden Formen reduzieren

$$-\int (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dt, \quad \int \frac{t^n\,dt}{(1+t^2)^{\frac{n}{2}+1}},$$

indem man (bezüglich) $x = \sqrt{1-t^2}$ oder $x = t\sqrt{1+t^2}$ setzt. Übrigens gibt die partielle Integration die Formel

$$\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{n-1}}{n}\sqrt{1-x^2} + \frac{n-1}{n}\int \frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

welche es erlaubt, das vorgelegte Integral, je nachdem n ungerade oder gerade ist, auf eines der Integrale

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

zurückzuführen. Denkt man sich die Integration von 0 bis 1 erstreckt, so gelangt man zu bereits bekannten Resultaten (§ 727, g), wie man leicht durch die Substitution $x = \sin\theta$ erkennt.

g) Wenn man das Integral[1])

$$\int \left(\sqrt[3]{x^3+\sqrt{x^3+x^6}} + \sqrt[3]{x^3-\sqrt{x^3+x^6}}\right) dx$$

berechnen will, so braucht man nur zu bemerken, daß der Koeffizient von dx auf Grund der Formel von Tartaglia (§ 528) eine Wurzel der Gleichung $y^3 + 3xy - 2x^3 = 0$ ist, um sogleich unter Erinnerung an die Schlußbemerkung in § 750 zu der Substitution $x = 3t/(2-t^3)$ geführt zu werden, welche das gegebene Integral in $18\int \frac{(1+t^3)\,t^2\,dt}{(2-t^3)^3}$ verwandelt und dann für $2 - t^3 = 3\theta$ in

$$2\int \frac{\theta-1}{\theta^3}\,d\theta = \frac{1-2\theta}{\theta^2} + C = \frac{x^2}{y^2}(x^2-2y) + C.$$

Inzwischen hat man $xy^3 - 2y^2 = 2x^4 - 3x^2y - 2y^2 = (x^2-2y)(2x^2+y)$. Also hat das vorgelegte Integral den Wert

$$\frac{x^3\left(\sqrt[3]{x^3+\sqrt{x^3+x^6}} + \sqrt[3]{x^3-\sqrt{x^3+x^6}}\right) - 2x^2}{\sqrt[3]{x^3+\sqrt{x^3+x^6}} + \sqrt[3]{x^3-\sqrt{x^3+x^6}} + 2x^2} + C.$$

Die obige Rechnung läßt sich noch etwas abkürzen, wenn man bemerkt, daß $x^2\,dt = x\,dy - y\,dx$ ist, woraus folgt

$$\begin{aligned}\int y\,dx &= \int x\,dy - \int x^2\,dt = xy - \int y\,dx - \int x^2\,dt\\ &= \frac{1}{2}\left(xy - \int x^2\,dt\right) = \frac{1}{2}\left(xy + \int \frac{d\theta}{\theta^2}\right)\\ &= \frac{x}{2y}(y^2 - x) + C = x^2\,\frac{xy-2}{y+2x^2} + C \quad \text{u. s. w.}\end{aligned}$$

Integration der transzendenten Differentiale.

754. Ganz selten sind die Fälle von Integrierbarkeit (durch die bekannten Funktionszeichen) bei den transzendenten Differentialen;

---

1) Hermite: „Cours d'Analyse", p. 242.

und in den einfachsten Fällen nimmt man lieber zu besondern Kunstgriffen seine Zuflucht als zu allgemeinen Regeln. Es sind jedoch die folgenden allgemeinen Regeln zu merken: Wenn f das Symbol einer rationalen Funktion ist, so lassen sich immer die Integrale

$$\int f(e^x)\,dx, \quad \int f(\operatorname{tg} x)\,dx, \quad \int f(\sin x, \cos x)\,dx$$

berechnen, indem man als neue Integrationsvariable in den bezüglichen Fällen $t = e^x$, $t = \operatorname{tg} x$, $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ setzt. Man erhält auf diese Weise

$$\int f(e^x)\,dx = \int f(t)\frac{dt}{t}, \quad \int f(\operatorname{tg} x)\,dx = \int \frac{f(t)\,dt}{1+t^2},$$

$$\int f(\sin x, \cos x)\,dx = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2},$$

und die rechten Seiten lassen sich als Integrale rationaler Differentiale leicht berechnen. Dieselben Substitutionen sind oft auch dann von Nutzen, wenn das Symbol f keine rationale Funktion darstellt.

755. Übungen. a) Das Integral von $\frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ berechnet man sofort mit Hilfe der Substitution $t = e^x$:

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arc\,tg} t + C = \operatorname{arc\,tg} e^x + C.$$

b) Um das Integral von $\frac{dx}{a + b\cos x}$ zu berechnen, braucht man nur $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ als neue Integrationsvariable zu nehmen. Man erhält, je nachdem a^2 größer oder kleiner als b^2 ist,

$$\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \pm \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \log\left|\frac{b + a\cos x + \sqrt{b^2 - a^2}\cdot\sin x}{a + b\cos x}\right| + C,$$

wo $\pm$ für $\operatorname{sgn}(a+b)$ gesetzt ist. Von der einen zu der andern Form geht man leicht über mit Hilfe der bekannten Relationen zwischen den Symbolen arc tg und log.

c) Ebenso reduziert sich die Berechnung von $\int \operatorname{tg}^n x\,dx$ sofort auf die von $\int \frac{t^n\,dt}{1+t^2}$ mit Hilfe der Substitution $t = \operatorname{tg} x$. Man kann aber, wenn n eine positive ganze Zahl ist, auch so verfahren, daß man die folgende Formel wiederholt anwendet:

$$\int \operatorname{tg}^n x\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\operatorname{tg}^{n-2} x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx.$$

Auf solche Weise gelangt man schließlich, je nachdem n ungerade oder gerade ist, zu einem der folgenden Integrale:

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = -\log |\cos x| + C, \quad \int dx = x + C.$$

Dasselbe Verfahren kann benutzt werden, wenn n negativ ist; aber in diesem Falle ist es vorzuziehen zu bemerken, daß

$$\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^n x} = \int \cot^n x\, dx = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x\, dx$$

ist; u. s. w.

d) Um das Integral von $\dfrac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$ zu berechnen setze man $\operatorname{tg} x = t^2$. Das vorgelegte Integral verwandelt sich auf diese Weise in $2\displaystyle\int \frac{dt}{1+t^4}$, ein Integral, welches wir bereits berechnet haben (§ 744, e). Man erhält also

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \log \left| \sin x + \cos x + \sqrt{\sin 2x} \right| + \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin(\sin x - \cos x) + C$$

e) Man kann häufig bei den Integralen der dritten in § 754 angegebenen Form die Substitution $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ vermeiden, wenn man die partielle Integration benutzt und außerdem geeignete Kunstgriffe, zu denen (vgl. § 723, d) die Multiplikation des Differentials mit $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ gehört. Z. B. kann man unter Anwendung jener Substitution berechnen

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} = -\frac{\cot x}{4}\left(\frac{1}{\sin^3 x} + \frac{3}{2 \sin x}\right) + \frac{3}{8} \log \left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

Es ist aber zweckmäßiger, das Integral auf eins der folgenden (vgl. § 723, a) zu reduzieren

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C, \quad \int \frac{dx}{\sin x} = \log \left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C,$$

was immer möglich ist, wenn es sich um Integrale von der Form $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^n x}$ mit ganzem positiven n handelt. In der Tat hat man

$$\int \frac{dx}{\sin^n x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^n x}\, dx = \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x} - \frac{1}{n-1} \int \cos x\, d\, \frac{1}{\sin^{n-1} x},$$

mithin nach partieller Integration

$$\int \frac{dx}{\sin^n x} = \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x} - \frac{1}{n-1} \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x}.$$

In analoger Weise berechnet man $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^n x}$.

f) Die Substitution $t = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$ liefert

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} = \sqrt{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t(1+t^2)}}.$$

Wir haben hier also ein elliptisches Integral vor uns, welches sich auch als das Integral eines binomischen Differentials betrachten läßt, wobei

$$p = q = -\frac{1}{2}, \quad m = 2, \quad \frac{p+1}{m} = \frac{1}{4}, \quad \frac{p+1}{m} + q = -\frac{1}{4}$$

ist. Es ist daher (§§ 748, 751) vergeblich, zu hoffen, daß man auf irgend einem Wege dazu gelangen könnte $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ in algebraisch-logarithmischer Form auszudrücken.

g) Zur Berechnung von Integralen wie $\int \sin^3 x\, dx$, $\int \cos^4 x\, dx$ u. s. w. sind ebenfalls keine Substitutionen nötig. Die Trigonometrie (vgl. § 725, o) liefert die Relationen

$$\sin^3 x = \tfrac{3}{4} \sin x - \tfrac{1}{4} \sin 3x, \quad \cos^4 x = \tfrac{1}{8} \cos 4x + \tfrac{1}{2} \cos 2x + \tfrac{3}{8},$$

aus welchen sofort folgt

$$\int \sin^3 x\, dx = -\tfrac{3}{4} \cos x + \tfrac{1}{12} \cos 3x + C,$$

$$\int \cos^4 x\, dx = \tfrac{1}{32} \sin 4x + \tfrac{1}{4} \sin 2x + \tfrac{3}{8} x + C.$$

Ebenso wird man, wenn das Integral von $\sin^3 x \cos^4 x\, dx$ zu berechnen ist, davon ausgehen, die beiden obigen trigonometrischen Formeln aufzustellen, um daraus durch Multiplikation abzuleiten (vgl. § 723, d)

$$32 \sin^3 x \cos^4 x = \tfrac{1}{2} (3 \sin x + 3 \sin 3x - \sin 5x - \sin 7x),$$

ferner durch Integration

$$\int \sin^3 x \cos^4 x\, dx = \tfrac{1}{64} (-3 \cos x - \cos 3x + \tfrac{1}{5} \cos 5x + \tfrac{1}{7} \cos 7x) + C.$$

In analoger Weise berechnet man jedes Integral vom Typus $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$. Man kann aber auch eine Reduktionsformel anwenden, die man durch partielle Integration erhält:

$$(m+n) \int \sin^m x \cos^n x\, dx = \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \sin^m x \cos^{n-2} x\, dx \text{ u. s. w.}$$

h) Es genügt manchmal schon die partielle Integration, um gewisse Transzendenten unter dem Integralzeichen zu beseitigen. So hat man für jedes Paar von rationalen Funktionen f und g

$$\int g'(x) \log f(x)\, dx = g(x) \log f(x) - \int \frac{f'(x)}{f(x)} g(x)\, dx,$$

und das letzte Integral ist immer mit Hilfe der gewöhnlichen Funktionszeichen ausdrückbar. Z. B. ist (vgl. § 744, b)

$$\int x \log (x^4 - 1)\, dx = \frac{1}{2} x^2 \log (x^4 - 1) - 2 \int \frac{x^5\, dx}{x^4 - 1}$$

$$= (x^2 - 1) \log \sqrt{x^2 - 1} + (x^2 + 1) \log \sqrt{x^2 + 1} - x^2 + C.$$

Bemerkenswerte bestimmte Integrale.

756. Elliptische Integrale. Das vollständige elliptische Integral (§ 748) erster Gattung, $F(k)$, ist leicht durch eine Reihe berechenbar, da man hat (§ 233, e)

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2\varphi + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} k^4 \sin^4\varphi + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} k^6 \sin^6\varphi + \cdots\right) d\varphi.$$

Hieraus ergibt sich, wenn man die Formel (15) des § 727 benutzt,

$$(5) \qquad F(k) = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}k\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^2\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^3\right)^2 + \cdots\right\}.$$

Es ist leicht zu erkennen, wie $F(k)$ variiert, wenn k von 0 nach 1 geht. Offenbar wächst $F(k)$ beständig von $F(0) = \frac{\pi}{2}$ bis

$$F(1) = \lim_{\varphi = \frac{\pi}{2}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \lim_{\varphi = \frac{\pi}{2}} \log \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}} = \infty.$$

Rechts von $k = 0$ wächst die Funktion langsam, da die darstellende Kurve sich wie die Parabel $y = \frac{1}{8}\pi x^2$ rechts vom Scheitel verhält; schließlich wächst die Funktion aber so rasch, daß die genannte Kurve asymptotisch zu der Geraden $k = 1$ wird. Um zu sehen, wie sich die Funktion in der Umgebung dieses Wertes von k verhält, bemerken wir, daß der Koeffizient von k^{2n} in der Entwickelung von $F(k)$ asymptotisch zu $1/2n$ ist (§ 337, c), woraus folgt (§ 339), daß links von dem Werte $k = 1$ die Gleichung

$$(6) \qquad F(k) = \log \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}}$$

die Tendenz hat richtig zu sein.

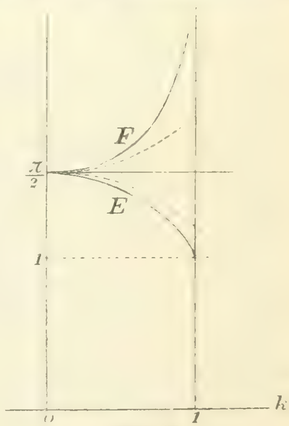

Fig. 90

757. Ebenso berechnet man das vollständige elliptische Integral zweiter Gattung, $E(k)$, indem man schreibt

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} k^2 \sin^2\varphi - \frac{1}{2\cdot 4} k^4 \sin^4\varphi - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6} k^6 \sin^6\varphi - \cdots\right) d\varphi$$

und gliedweise integriert:

$$(7) \qquad E(k) = \frac{\pi}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}k\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^3\right)^2 - \cdots\right\}.$$

Wenn k von 0 bis 1 wächst, so geht diese Funktion beständig abnehmend von $\frac{\pi}{2}$ bis

$$E(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, d\varphi = 1.$$

Rechts von $k = 0$ verhält sich die darstellende Kurve wie die Parabel $y = -\frac{1}{8}\pi x^2$, während sie für $k = 1$ die Gerade $k = 1$ berührt. Um sich hiervon zu überzeugen braucht man nur die Derivierte

$$E'(k) = -\frac{\pi}{k}\left\{\left(\frac{1}{2}k\right)^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^2\right)^2 + \frac{3}{5}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^3\right)^2 + \cdots\right\}$$

zu berechnen und zu bemerken, daß

$$kE'(k) = E(k) - F(k)$$

ist, woraus folgt $\lim\limits_{k=1-0} E'(k) = -\infty$. Um ferner genauer zu wissen, wie sich $E(k)$ links von der Einheit verhält, beachte man, daß für nach 1 konvergierendes k das Theorem von L'Hospital gibt

$$\lim \frac{1 - E(k)}{(1-k^2)\log\sqrt{1-k^2}} = \frac{1}{2}\lim \frac{E'(k)}{\log\sqrt{1-k^2}} = -\frac{1}{2}\lim \frac{F'(k)}{\log\sqrt{1-k^2}} = \frac{1}{2}.$$

Also ist asymptotisch

$$(8) \qquad E(k) - 1 + \frac{1-k^2}{2}\log\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}.$$

758. Die Formeln (5) und (7), die sehr nützlich zur Berechnung derjenigen Werte von F und von E sind, welche sehr kleinen Werten von k entsprechen, werden unbrauchbar, sobald k nicht genügend klein ist, weil die Reihen (5) und (7) langsam konvergieren. Liegt k sehr nahe an 1, so dienen die asymptotischen Formeln (6) und (8) nur dazu, den allgemeinen Verlauf von F und von E zu zeigen; will man aber die Werte dieser Funktionen berechnen, so muß man diese Formeln verbessern, um auf eine genügende Annäherung rechnen zu können. Wir wollen uns hier darauf beschränken zu zeigen, daß die Berechnung der Integrale F und E sich immer reduzieren läßt auf die Berechnung analoger Integrale, die so kleinen Werten des Moduls entsprechen als man will. Dieses Ziel erreicht man durch die Landensche Substitution

$$(9) \qquad \sin\varphi = \frac{(1+\mu)\sin\psi}{1+\mu\sin^2\psi},$$

wo die (zwischen 0 und 1 enthaltene) Konstante μ durch die Gleichung $k = \frac{2\sqrt{\mu}}{1+\mu}$ definiert ist. Eine leichte Rechnung gibt

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \frac{1-\mu\sin^2\psi}{1+\mu\sin^2\psi}, \quad \cos\varphi = \frac{\sqrt{1-\mu^2\sin^2\psi}}{1+\mu\sin^2\psi}\cos\psi.$$

Aus (9) gewinnt man alsdann durch Differentiation

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{(1+\mu)\,d\psi}{\sqrt{1-\mu^2\sin^2\psi}}$$

und endlich

$$(10) \qquad F(k) = (1+\mu)\,F(\mu),$$

wenn man beachtet, daß, während ψ beständig wachsend von 0 nach $\frac{\pi}{2}$ variiert, die ursprüngliche Veränderliche φ dasselbe tut. Eine analoge Rechnung, die wir der Kürze halber hier nicht vorbringen wollen, liefert eine zweite wichtige Formel, nämlich

$$(11) \qquad E(k) = \frac{2}{1+\mu}E(\mu) - (1-\mu)\,F(\mu).$$

Es ist klar, daß die beiden obigen Formeln auch dann gelten, wenn die Integrale nicht vollständig sind; aber die Amplituden φ und ψ haben in diesem Falle verschiedene Werte, die durch die Formel (9) voneinander abhängen. Die Gleichung (11) enthüllt folgende bemerkenswerte Tatsache: Jedes elliptische Integral erster Gattung läßt sich durch zwei elliptische Integrale von zweiter Gattung ausdrücken.

759. Wir wollen zu den vollständigen Integralen zurückkehren und zeigen, wie man die Formel (10) benutzen kann, um $F(k)$ auch dann zu berechnen, wenn k sehr nahe an 1 liegt. Von k ausgehend bilde man eine Folge von Zahlen, die so beschaffen sind, daß man hat

$$k = \frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1}, \quad k_1 = \frac{2\sqrt{k_2}}{1+k_2}, \quad k_2 = \frac{2\sqrt{k_3}}{1+k_3}, \quad \ldots.$$

Allgemein ist dann

$$k_{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-k_n^2}}{1+\sqrt{1-k_n^2}} < \frac{1-(1-k_n)}{1+(1-k_n)} < k_n.$$

Die Zahlen k_n, welche positiv sind und mit wachsendem n abnehmen, konvergieren nach einem Grenzwert. Dieser Grenzwert muß der Gleichung $l = \frac{2\sqrt{l}}{1+l}$ genügen. Befreit man dieselbe von der Wurzel $l=0$ und von der unzulässigen Wurzel $l=1$, so reduziert sie sich auf $2+\sqrt{l}+l=0$ und hat keine reellen Wurzeln mehr. Es ist also $l=0$. Die wiederholte Anwendung der Formel (10) liefert nun

$$F(k) = (1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)\cdots(1+k_n)\,F(k_n),$$

wo k_n so klein ist als man will; und man kann auf diese Weise für hinreichend großes n zunächst mit Hilfe von (5) $F(k_n)$ berechnen und dann $F(k)$. Wächst n ins Unendliche, so hat man $\lim F(k_n) = F(0) = \frac{\pi}{2}$ und infolgedessen

$$F(k) = \tfrac{1}{2}\pi(1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)\cdots.$$

Hat man eine Tafel für die Werte von F konstruiert, so gestattet die Formel (11) in analoger Weise die Werte von E zu berechnen. Solche für die Anwendungen sehr nützliche Tafeln sind von Legendre konstruiert worden (auch für die unvollständigen Integrale) und heißen elliptische Tafeln[1]). Wir beschränken uns hier darauf, einige Werte daraus zu entnehmen:

$$F\left(\frac{1}{3}\right) = 1{,}617\ldots,\ F\left(\frac{1}{2}\right) = 1{,}685\ldots,\ F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1{,}854\ldots,\ F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2{,}156\ldots,$$

$$E\left(\frac{1}{3}\right) = 1{,}526\ldots,\ E\left(\frac{1}{2}\right) = 1{,}467\ldots,\ E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1{,}350\ldots,\ E\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1{,}211\ldots.$$

760. Übungen. a) Bei dem Integral von $\frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$, welches wir bereits (§ 755, f) mit Hilfe der Substitution $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ behandelt haben, ist die einfachere Substitution $\sin x = t$ vorzuziehen. Man wird dann weiter durch die Substitution $t = \cos^2\varphi$ (welche durch die Betrachtungen des § 749 nahegelegt wird) zu folgendem Normalausdruck des vorgelegten Integrals geführt:

$$2\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}} = -\sqrt{2}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}.$$

Insbesondere ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\sin x}} = \sqrt{2}\,F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2{,}622\ldots.$$

b) In analoger Weise berechnet man die Integrale

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \quad \text{und} \quad \int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}},$$

indem man $x = \cos\varphi$ setzt. Sie transformieren sich dadurch bezüglich in

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}} - \sqrt{2}\int\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Insbesondere ist

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1{,}311\ldots,$$

$$\int_0^1\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \sqrt{2}\,E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0{,}599\ldots.$$

1) Legendre: „Traité des fonctions elliptiques", t. II.

c) Etwas weniger leicht ist die Berechnung der Integrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

Die Substitution $x = -1 + \sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}$ liefert, angewandt auf das erste,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 \sin^2\varphi}}.$$

Auf das zweite Integral muß man auf Grund des am Schluß von § 749 Gesagten die Substitution

$$x = \frac{\mathrm{tg}\,\varphi - (1+\sqrt{2})}{\mathrm{tg}\,\varphi + (1+\sqrt{2})}$$

anwenden. Dabei transformiert es sich in

$$\int \frac{(2+\sqrt{2})\,d\varphi}{\sqrt{\sin^4\varphi + 6(3+2\sqrt{2})\sin^2\varphi\cos^2\varphi + (3+2\sqrt{2})^2\cos^4\varphi}}.$$

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen entsteht durch Multiplikation von

$$\sin^2\varphi + (3+2\sqrt{2})^2\cos^2\varphi = (3+2\sqrt{2})^2\left(1 - \frac{4\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}\sin^2\varphi\right)$$

mit $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$. Also ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \int \frac{(2-\sqrt{2})\,d\varphi}{\sqrt{1-\frac{4\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}\sin^2\varphi}}.$$

Beachtet man ferner, daß man

$$\text{für } k^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} \quad \text{hat} \quad \mu = \frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

so erhält man bei Anwendung der Formel (10)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) F\left(\frac{2\sqrt[4]{2}}{1+\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0{,}927\ldots.$$

d) Wenn das Integral $\int_0^\pi \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k\cos\varphi}}$, welches uns an ein anderes, bereits berechnetes erinnert (§ 725, i), zu behandeln ist, so beginne man damit, die partielle Integration anzuwenden:

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k\cos\varphi}} = \frac{2}{k}\int_0^\pi \sin\varphi\, d\sqrt{1-k\cos\varphi} = -\frac{2}{k}\int_0^\pi \sqrt{1-k\cos\varphi}\cdot\cos\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{2}{k}\int_0^\pi \frac{k-\cos\varphi}{\sqrt{1-k\cos\varphi}}\, d\varphi - 2\int_0^\pi \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k\cos\varphi}} = \frac{2}{3k}\int_0^\pi \frac{k-\cos\varphi}{\sqrt{1-k\cos\varphi}}\, d\varphi.$$

Das letzte Integral wird, wenn man φ in $\pi - 2\varphi$ verwandelt,

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k+\cos 2\varphi}{\sqrt{1+k\cos 2\varphi}}\, d\varphi = \frac{2}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+k\cos 2\varphi}\, d\varphi - \frac{2}{k}(1-k^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1+k\cos 2\varphi}}$$

oder, wenn man noch $1 + k - 2k\sin^2\varphi$ für $1 + k\cos 2\varphi$ schreibt,

$$\frac{2}{k}\sqrt{1+k}\left\{E\left(\sqrt{\frac{2k}{1+k}}\right) - (1-k)\, F\left(\sqrt{\frac{2k}{1+k}}\right)\right\}.$$

Also ist

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k\cos\varphi}} = \frac{4\sqrt{1+k}}{3k^2}\left\{E\left(\sqrt{\frac{2k}{1+k}}\right) - (1-k)\, F\left(\sqrt{\frac{2k}{1+k}}\right)\right\}.$$

e) Ein elliptisches Integral kann auch mit einem Modul $k > 1$ vorkommen; es ist aber immer möglich dasselbe auf einen zwischen 0 und 1 enthaltenen Modul zu reduzieren. Man betrachte z. B. die Integrale

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

in welchen die obere Grenze den Wert $\frac{1}{2}\pi$ nicht erreichen, sondern nur bis zu einem Maximalwert α gehen kann, der durch die Gleichung $\sin\alpha = 1/k$ definiert ist. Wenn φ von 0 bis α geht, so wächst die Veränderliche ψ, welche mit φ durch die Relation $\sin\psi = k\sin\varphi$ verbunden ist, von 0 bis $\frac{\pi}{2}$; und da

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{d\psi}{\sqrt{k^2-\sin^2\psi}}$$

ist, so hat man

$$\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{k}\, F\left(\frac{1}{k}\right),$$

$$\int_0^\alpha \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \frac{1}{k}\, F\left(\frac{1}{k}\right) + k\left\{E\left(\frac{1}{k}\right) - F\left(\frac{1}{k}\right)\right\}.$$

Z. B. ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-2\sin^2\varphi}} = 1{,}311\ \ldots, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1-2\sin^2\varphi}\, d\varphi = 0{,}599\ \ldots.$$

f) Man beweist in der Mechanik, daß für ein einfaches Pendel von der Länge l die Dauer einer vollständigen Schwingung, von der Amplitude 2α, gemessen wird durch das Integral

$$T = \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}},$$

wo g die Beschleunigung durch die Schwere an dem Ort der Beobachtung bedeutet. Diese wichtige Formel dient gerade dazu, g in jedem Ort der Erdoberfläche zu berechnen und durch eine große Zahl von Beobachtungen die Gestalt dieser Fläche zu ermitteln. Setzt man $k = \sin\frac{\alpha}{2}$ und $\sin\frac{\theta}{2} = k\sin\varphi$, so hat man

$$\cos\theta - \cos\alpha = 2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) = 2k^2\cos^2\varphi.$$

Beachtet man ferner, daß, wenn θ von 0 bis α variiert, φ beständig wachsend von 0 nach $\frac{\pi}{2}$ geht, so findet man

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\, F(k) = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\alpha}{2} + \frac{25}{256}\sin^6\frac{\alpha}{2} + \cdots\right).$$

Ist α sehr klein, so darf man T auf das erste Glied reduzieren, welches von α unabhängig ist, und erhält so einen Beweis für den Isochronismus der kleinen Schwingungen. Will man eine größere Genauigkeit haben, so genügt es in der Entwickelung von T ein Glied mehr zu nehmen. Man kann auch die Formel (10) anwenden, nachdem man bemerkt hat, daß im vorliegenden Falle $\mu = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{4}$ ist, und schreiben

$$T = \frac{\pi}{\cos^2\frac{\alpha}{4}}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

g) Ein anderes merkwürdiges Integral, welches beim Studium der Wirbel vorkommt, ist folgendes:

$$\Phi = \frac{ab}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\theta}}.$$

Wir wollen zunächst das Integrationsintervall auf die untere Hälfte reduzieren, indem wir bemerken, daß der auf die obere Hälfte bezügliche Teil des Integrals sich in den andern transformiert, wenn man θ in $2\pi - \theta$ verwandelt. Man kann ferner annehmen $ab > 0$; denn wäre $ab < 0$, so brauchte man nur θ in $\pi - \theta$ zu verwandeln, um zu der ersten Annahme geführt zu werden. Andererseits bemerke man, daß

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\theta - (a+b)^2 + c^2 - 4ab\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{4ab}{k^2}\left(1 \quad k^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)$$

ist, wenn man setzt

$$k^2 = \frac{4ab}{(a+b)^2 + c^2}.$$

Man erhält folglich, wenn man als Integrationsvariable $\varphi = \frac{1}{2}(\pi - \theta)$ wählt,

$$\Phi = \frac{k}{2\pi}\sqrt{ab}\int_0^{\pi}\frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{1 - k^2\cos^2\frac{\theta}{2}}} = -\frac{k}{\pi}\sqrt{ab}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}.$$

Schreibt man $1 - 2\sin^2\varphi$ für $\cos 2\varphi$, so kommt

$$(12) \qquad -\frac{\pi}{\sqrt{ab}}\Phi = kF(k) + \frac{2}{k}\{E(k) - F(k)\}.$$

Die Formeln (5) und (7) führen ferner zu einem Ausdruck für Φ durch eine nach steigenden Potenzen von k fortschreitende Reihe:

$$\Phi = \frac{\sqrt{ab}}{16}\left(k^3 + \frac{3}{4}k^5 + \cdots\right).$$

Zu einem einfacheren Ausdruck gelangt man, wenn man von dem Modul k zu dem Modul

$$\mu = \frac{1 - \sqrt{1 - k^2}}{1 + \sqrt{1 - k^2}} = \frac{\sqrt{(a+b)^2 + c^2} - \sqrt{(a-b)^2 + c^2}}{\sqrt{(a+b)^2 + c^2} + \sqrt{(a-b)^2 + c^2}}$$

übergeht unter Benutzung der Formeln (10) und (11). Beachtet man in der Tat, daß

$$\frac{2}{k(1+\mu)} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}, \qquad \frac{1}{2}k(1+\mu) - \frac{2}{k} = \sqrt{\mu} - \left(\sqrt{\mu} + \frac{1}{\sqrt{\mu}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{\mu}}$$

ist, so verwandelt sich (12) in

$$(13) \qquad -\frac{\pi}{\sqrt{ab}}\Phi = \frac{2}{\sqrt{\mu}}\{E(\mu) - F(\mu)\}.$$

Mit andern Worten, das vorgelegte Integral ist hiermit reduziert auf die typische Form (§ 748) eines elliptischen Integrals zweiter Gattung:

$$\Phi = \frac{2\mu}{\pi}\sqrt{\mu ab}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - \mu^2\sin^2\varphi}}.$$

Entwickelt man die rechte Seite von (13) in eine Reihe, so erhält man

$$\Phi = \frac{1}{2}\sqrt{\mu ab}\left(\mu + \frac{3}{8}\mu^3 + \frac{15}{64}\mu^5 + \cdots\right).$$

Wenn k sehr klein ist, so ist diese Entwickelung zweckmäßiger als die vorhin aus (12) abgeleitete; dagegen ist es für ein sehr nahe an 1 liegendes k zu empfehlen, direkt auf (12) die asymptotische Formel (6) anzuwenden.

h) Durch eine etwas lange Rechnung, die aber keine wesentlichen Schwierigkeiten bietet[1]), gelangt man zu dem Resultat

---

1) Schlömilch, Comp. der höheren Analysis, Bd. 2, S. 322. Siehe auch das „Bulletin de Darboux" (1897, p. 109).

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log \sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = -\frac{1}{2} F(k)\log k - \frac{1}{4}\pi F(k'),$$

wo $k' = \sqrt{1-k^2}$ ist; und hieraus entspringen dann für sehr nahe an 1 liegendes k die Formeln, auf welche wir am Anfang von § 758 hingewiesen haben. Wir beschränken uns hier auf folgende Bemerkung: Bringt man die rechte Seite auf die Form

$$-\frac{1}{2}\left\{F(k) - \frac{\pi}{2}\right\}\log k - \frac{\pi}{4}\left\{F(k') + \log k\right\}$$

und läßt k nach 0 konvergieren, so erhält man, wenn man sich erinnert (§ 721, d), daß $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\varphi\, d\varphi$ den Wert $-\frac{\pi}{2}\log 2$ hat, und dann k mit k' vertauscht,

$$\lim_{k=1}\left\{F(k) + \log\sqrt{1-k^2}\right\} = \log 4.$$

Diese Formel schließt nicht nur die Formel (6) ein, sondern sie gestattet in ihr und in Formel (8) eine kleine Korrektion anzubringen, dadurch, daß man die Differenz zwischen der linken und der rechten Seite von (6) nicht gleich Null, sondern gleich $\log 4$ setzt:

$$F(k) = \log\frac{4}{\sqrt{1-k^2}}, \qquad E(k) = 1 + \frac{1-k^2}{2}\log\frac{4}{\sqrt{1-k^2}}.$$

i) Um den Lesern einen Begriff von den schwierigen Fragen zu geben, die sich mit Hilfe der elliptischen Integrale lösen lassen, wollen wir hier zwei interessante Formeln vorbringen, um aus ihnen einige Schlüsse zu ziehen. Wenn k von 0 nach 1 geht, so variieren die Integrale $F(k)$ und $F(k')$ derart, daß das Verhältnis des zweiten zu dem ersten von Null nach Unendlich geht, und zwar beständig wachsend. Wenn daher eine beliebige Zahl x zwischen 0 und 1 gegeben ist, so wird immer ein Wert k und auch nur einer existieren, für welchen man hat

$$\frac{1}{\pi}\log\frac{1}{x} = \frac{F(k')}{F(k)}.$$

Nun läßt sich beweisen, daß

$$1 + 2x + 2x^4 + 2x^9 + 2x^{16} + \cdots = \sqrt{\frac{2}{\pi}F(k)}$$

ist, wo k die Funktion von x ist, welche durch die vorige Gleichung definiert wird. Insbesondere wird, wenn x sich der 1 unbegrenzt nähert, mit immer größerer Annäherung $F(k) = \pi^2/2\log\frac{1}{x}$ sein, und es wird daher die Summe der Reihe die Form (vgl. § 342, c)

$$\sqrt{\frac{\pi}{\log\frac{1}{x}}} \quad \text{oder} \quad \sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$$

anzunehmen streben. Ebenso hat man

$$1 - 2x + 2x^4 - 2x^9 + 2x^{16} - \cdots = \sqrt{\frac{2}{\pi} k' F(k)}$$

und infolgedessen (vgl. § 342, d), wenn man sich an Formel (6) erinnert,

$$\lim_{x=1} (x - x^4 + x^9 - x^{16} + \cdots) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{k'=0} \sqrt{k' \log \frac{1}{k'}} = \frac{1}{2} \cdot$$

Dagegen ist für $k = 1/\sqrt{2}$, weil alsdann auch $k' = 1/\sqrt{2}$ ist, $x = e^{-\pi}$, mithin

$$1 + 2e^{-\pi} + 2e^{-4\pi} + 2e^{-9\pi} + \cdots = \sqrt{\frac{2}{\pi} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = 1{,}086 \ldots,$$

$$1 - 2e^{-\pi} + 2e^{-4\pi} - 2e^{-9\pi} + \cdots = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\pi} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = 0{,}913 \ldots.$$

Will man ferner k mit k' vertauschen, so muß man x durch eine andere Zahl x' ersetzen, die an x durch die Relation $\log \frac{1}{x} \log \frac{1}{x'} = \pi^2$ gebunden ist; und da man andererseits hat

$$(1 + 2x + 2x^4 + 2x^9 + \cdots)\left(\log \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{4}{\pi} F(k) F(k')},$$

so sieht man, daß die linke Seite, ebenso wie die rechte, ungeändert bleibt, wenn man x durch x' ersetzt. Man gewinnt dadurch einen Beweis für eine früher angegebene Relation (§ 342, c). Endlich bemerke man, daß, wenn man mit Hilfe der Landenschen Substitution von dem Modul k zu $\varkappa = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}$ übergeht, dieselbe auch, in umgekehrtem Sinne angewandt, von k' zu $\varkappa' = \sqrt{1 - \varkappa^2}$ führt. Auf Grund von (10) ist also

$$F(\varkappa) = (1 + k) F(k), \qquad F(\varkappa') = \tfrac{1}{2}(1 + k) F(k'),$$

während der $\varkappa$ entsprechende Wert ξ von x so beschaffen ist, daß man hat

$$\frac{1}{\pi} \log \frac{1}{\xi} = \frac{F(\varkappa')}{F(\varkappa)} = \frac{1}{2} \frac{F(k')}{F(k)} = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{x},$$

d. h. $\xi = \sqrt{x}$. Mithin wird

$$1 + 2\sqrt{x} + 2\sqrt{x^4} + 2\sqrt{x^9} + \cdots = \sqrt{\frac{2}{\pi}(1 + k) F(k)},$$

$$1 - 2\sqrt{x} + 2\sqrt{x^4} - 2\sqrt{x^9} + \cdots = \sqrt{\frac{2}{\pi}(1 - k) F(k)}.$$

Verwandelt man aufs Neue k in $\varkappa$, so erhält man

$$1 + 2\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[4]{x^4} + 2\sqrt[4]{x^9} + \cdots = (1 + \sqrt{k}) \sqrt{\frac{2}{\pi} F(k)},$$

$$1 - 2\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[4]{x^4} - 2\sqrt[4]{x^9} + \cdots = (1 - \sqrt{k}) \sqrt{\frac{2}{\pi} F(k)},$$

und daraus ergibt sich

$$\frac{2\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[4]{x^9} + 2\sqrt[4]{x^{25}} + \cdots}{1 + 2x + 2x^4 + 2x^9 + \cdots} = \sqrt{k}.$$

Andererseits ist

$$\frac{1 - 2x + 2x^4 - 2x^9 + \cdots}{1 + 2x + 2x^4 + 2x^9 + \cdots} = \sqrt{k'}.$$

Erhebt man jetzt zur vierten Potenz und addiert, so findet man die Identität

$$(2\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[4]{x^9} + 2\sqrt[4]{x^{25}} + \cdots)^4 + (1 - 2x + 2x^4 - 2x^9 + \cdots)^4$$
$$= (1 + 2x + 2x^4 + 2x^9 + \cdots)^4.$$

Hieraus kann man leicht, indem man die Koeffizienten gleicher Potenzen von x auf der linken und rechten Seite einander gleich setzt, folgenden arithmetischen Satz ableiten: Die Anzahl der möglichen Zerlegungen einer ungeraden Zahl in vier Quadrate ist achtmal so groß wie die Anzahl der möglichen Zerlegungen der vierfachen Zahl in die Quadrate von vier ungeraden ganzen Zahlen.

761. Eulersche Integrale. Man nennt so die Integrale

$$\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}dx, \quad \int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}dx.$$

Das erste heißt ein Eulersches Integral erster Gattung. Es ist eine Funktion der beiden positiven Veränderlichen μ und ν, eine Funktion, die offenbar symmetrisch ist (wie man durch Vertauschung von x in $1-x$ erkennt). Das zweite Integral, welches eine Funktion der einen positiven Veränderlichen μ ist, heißt von zweiter Gattung. Wir haben gesehen, daß das zweite Integral gleich $\Gamma(\mu)$ ist, und werden dieses Resultat jetzt wiederfinden, indem wir das erste Integral unter der Voraussetzung eines ganzzahligen positiven ν berechnen. Nimmt man außerdem an $\nu > 1$, so liefert die partielle Integration

$$\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}dx = \frac{\nu-1}{\mu}\int_0^1 x^{\mu}(1-x)^{\nu-2}dx$$
$$= \frac{\nu-1}{\mu}\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-2}dx - \frac{\nu-1}{\mu}\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}dx,$$

woraus man entnimmt

$$\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}dx = \frac{\nu-1}{\mu+\nu-1}\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-2}dx,$$

mithin bei successiver Anwendung dieser selben Formel

$$\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}dx = \frac{\nu-1}{\mu+\nu-1}\cdot\frac{\nu-2}{\mu+\nu-2}\cdots\frac{1}{\mu+1}\int_0^1 x^{\mu-1}dx = \frac{(\nu-1)!}{\mu(\mu+1)\cdots(\mu+\nu-1)}.$$

Verwandelt man nun x in x/ν, so findet man

$$\int_0^\nu x^{\mu-1}\left(1-\frac{x}{\nu}\right)^{\nu-1} dx = \frac{\nu!\,\nu^{\mu-1}}{\mu(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+\nu-1)}.$$

Läßt man ν über alle Grenzen wachsen und erinnert sich (§ 252, c) an die Definition der Funktion Γ, so kommt

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x}\,dx = \Gamma(\mu).$$

Man bemerke hier, daß die Verwandlung von x in nx zu der Formel

$$(14)\qquad \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-nx}\,dx = \frac{\Gamma(\mu)}{n^\mu}$$

führt, die wegen ihrer zahlreichen Anwendungen von Wichtigkeit ist.

762. Wir wollen jetzt beweisen, daß auch die Integrale erster Gattung durch die Gammafunktion ausdrückbar sind. Die Substitution $x = y/(1+y)$ gibt

$$\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}\,dx = \int_0^\infty \frac{y^{\mu-1}\,dy}{(1+y)^{\mu+\nu}},$$

und man kann der rechten Seite die Form eines Doppelintegrals geben, indem man die Formel (14) benutzt, in welcher μ in $\mu+\nu$ und n in $1+y$ zu verwandeln ist:

$$\frac{1}{\Gamma(\mu+\nu)}\int_0^\infty y^{\mu-1}dy\int_0^\infty x^{\mu+\nu-1}e^{-(1+y)x}\,dx = \frac{1}{\Gamma(\mu+\nu)}\int_0^\infty x^{\mu+\nu-1}e^{-x}\,dx\int_0^\infty y^{\mu-1}e^{-xy}\,dy.$$

Nun hat man auf Grund derselben Formel (14)

$$(15)\qquad \int_0^\infty y^{\mu-1} e^{-xy}\,dy = \frac{\Gamma(\mu)}{x^\mu}$$

folglich

$$\int_0^\infty x^{\mu+\nu-1}e^{-x}\,dx\int_0^\infty y^{\mu-1}e^{-xy}\,dy = \Gamma(\mu)\int_0^\infty x^{\nu-1}e^{-x}\,dx = \Gamma(\mu)\,\Gamma(\nu).$$

Also ist

$$(16)\qquad \int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}\,dx = \frac{\Gamma(\mu)\,\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)}.$$

Man kann somit jedes Eulersche Integral berechnen, indem man die auf Veranlassung von Gauß[1]) (bis auf 20 Dezimalen) berechneten Tafeln für $\log\Gamma(x)$ benutzt.

1) Gauß' Werke, Bd. III. Siehe auch den zitierten „Traité" von Legendre, t. II.

763. Die Formel (16), die in den Anwendungen sehr nützlich ist, bietet sich häufig unter der Form

$$(17)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\mu-1}\theta \cdot \cos^{2\nu-1}\theta \cdot d\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(\mu)\,\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)},$$

auf welche sie sich reduziert, wenn man $x = \sin^2\theta$ setzt. Insbesondere kann man für $\mu = \nu$ aus ihr einen Beweis für die Legendresche Formel (§ 252, d) gewinnen, wenn man sich erinnert, daß $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ ist. In der Tat hat man

$$\frac{\Gamma^2(\mu)}{\Gamma(2\mu)} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta\cos\theta)^{2\mu-1}\,d\theta = \frac{1}{2^{2\mu-2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\mu-1}2\theta \cdot d\theta$$

$$= \frac{1}{2^{2\mu-1}}\int_0^{\pi} \sin^{2\mu-1}\theta \cdot d\theta = \frac{1}{2^{2\mu-2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\mu-1}\theta \cdot d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\mu-1}}\,\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})},$$

woraus sich ergibt

$$\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\mu-1}}\,\frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\mu)}.$$

Hiernach folgt aus (17) für jeden positiven Wert von μ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\mu-1}\theta \cdot d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\mu-1}\theta \cdot d\theta = 2^{2\mu-2}\,\frac{\Gamma^2(\mu)}{\Gamma(2\mu)},$$

und es ist auf diese Weise eine Verallgemeinerung eines früheren Resultates (§ 727, g) gewonnen.

764. Übungen. a) Das Integral von $\operatorname{tg}^n x\,dx$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ läßt sich mit Hilfe von (17) berechnen, indem man $2\mu - 1 = n$, $2\nu - 1 = -n$ setzt, sodaß wegen $\mu + \nu = 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^{-n} x\,dx = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right).$$

Benutzt man die Formel (§ 464, e)

$$(19)\qquad \Gamma(\mu)\,\Gamma(1-\mu) = \frac{\pi}{\sin\mu\pi},$$

so sieht man, daß für $|n| < 1$

$$(20)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^n x\,dx = \frac{\pi}{2\cos\frac{n\pi}{2}}$$

ist. Insbesondere hat man $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$, wie sich auch aus einem früheren Übungsbeispiel herleiten läßt (§ 755, d). Die Einschränkung $|n| < 1$ ergibt sich, abgesehen von den Gültigkeitsgrenzen der Formel (17), auch aus früheren Bemerkungen (§ 717, a), da $\operatorname{tg}^n x$ für $x = \frac{\pi}{2}$ oder für $x = 0$ von der Ordnung n unendlich wird, je nachdem n positiv oder negativ ist. Man kann daher a priori behaupten, daß das Integral für $|n| \geqq 1$ nicht existiert.

b) Um das Integral von $\frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$ zwischen den Grenzen 0 und 1 zu berechnen, verwandle man x in $x^{\frac{1}{n}}$. Das Integral wird dann

$$\frac{1}{n}\int\limits_0^1 x^{\frac{1}{n}-1}(1-x)^{-\frac{1}{n}}\,dx = \frac{1}{n}\,\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Daraus folgt nach (19)

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} = \frac{\pi}{n \sin\frac{\pi}{n}},$$

vorausgesetzt, daß $n > 1$ ist. Übrigens läßt sich auch das unbestimmte Integral leicht in algebraisch-logarithmischer Form berechnen, da es sich um ein binomisches Differential handelt, welches der zweiten Integrabilitätsbedingung (§ 751) genügt. Um es auf rationale Form zu bringen, braucht man nur $x = 1/\sqrt[n]{1+t^n}$ zu setzen.

c) Wenn das Integral von $\frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ berechnet werden soll, so kann man die Formel (18) anwenden, welche sofort liefert

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} = \frac{\Gamma^2(\frac{1}{4})}{2\sqrt{2\pi}}.$$

Die Vergleichung dieses Resultates mit dem in § 760, a bereits erhaltenen führt zu folgendem Ausdruck eines Eulerschen Integrals durch ein elliptisches Integral:

$$\Gamma(\tfrac{1}{4}) = 2\sqrt{\sqrt{\pi}\,F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = 3{,}625\ldots.$$

Es folgt ferner aus (19)

$$\Gamma(\tfrac{3}{4}) = \pi\sqrt{2}/\Gamma(\tfrac{1}{4}) = 1{,}225\ldots.$$

d) Auch das Integral von $\frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$ zwischen 0 und 1 läßt sich leicht auf die Form eines Eulerschen Integrals erster Gattung bringen. Man braucht nur $t = x^4$ als Integrationsvariable zu wählen, um auf Grund von (16) zu erhalten

$$\int_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{4}\int_0^1 t^{\frac{n-3}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+3}{4}\right)},$$

oder nach der Formel von Legendre

$$\int_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = 2^{\frac{n-5}{2}}\,\frac{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}.$$

Z. B. ist

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}\,F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}.$$

Die Vergleichung des letzten Resultates mit einem früheren (§ 760, b) liefert folgende Relation zwischen den Werten von F und von E, welche dem Modul $1/\sqrt{2}$ entsprechen:

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\,F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi}{4\,F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}.$$

e) Ein anderes Integral, welches sich leicht auf die Gammafunktion reduzieren läßt, ist folgendes:

$$\mathfrak{J} = \int_0^{\pi} \frac{\sin^{n-1}\varphi\,d\varphi}{(1+k\cos\varphi)^n}.$$

Man kann immer annehmen $k \geqq 0$; denn wäre $k < 0$, so brauchte man nur φ in $\pi - \varphi$ zu verwandeln, um wieder auf den Fall $k > 0$ geführt zu werden. Man bemerke ferner, daß für $n < 0$ die Funktion an den Grenzen des Integrationsintervalles von der Ordnung $1 - n \geqq 1$ unendlich wird. Daraus folgt (§ 717, a), daß das Integral nur für $n > 0$ existieren kann; und in der Tat existiert es, wenn $k < 1$ ist, weil dann die Funktion im Innern des Integrationsintervalls endlich und stetig ist. Das Integral existiert dagegen nicht für $k = 1$, weil in diesem Falle die Funktion an der oberen Grenze des Intervalls von der Ordnung $n + 1 > 1$ unendlich wird. Ist ferner $k > 1$, so wird die Funktion für $\varphi = \alpha$, wobei $\cos\alpha = -1/k$ ist, unendlich von der Ordnung n. Das Integral existiert also auch für $k > 1$, vorausgesetzt, daß $n < 1$ ist. Um es im ersten Falle ($0 \leqq k < 1$, $n > 0$) zu berechnen, braucht man nur die Substitution $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ zu benutzen, die wegen ihrer Verwendung bei verschiedenen die Ellipse betreffenden Fragen, besonders in der Astronomie, von Bedeutung ist. Man wird zu dieser Substitution in der natürlichsten Weise geführt, wenn man von der exzentrischen Anomalie φ, die die Lage eines Ellipsenpunktes definiert, zu den Polarkoordinaten (r, θ) übergehen will und dabei als Pol einen der Brennpunkte wählt, während die Polarachse nach dem andern Brennpunkt gerichtet ist. Offenbar ist r die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Seiten $ka + a\cos\varphi$ und $b\sin\varphi$ sind, sodaß man hat

$$r^2 = a^2\{(k+\cos\varphi)^2 + (1-k^2)\sin^2\varphi\} = a^2(1+k\cos\varphi)^2,$$

d. h. $r = a(1+k\cos\varphi)$, mithin

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{1-k^2}\cdot\sin\varphi}{1+k\cos\varphi}, \quad \cos\theta = \frac{k+\cos\varphi}{1+k\cos\varphi},$$

woraus durch Differentiation der einen oder der andern Gleichung folgt

$$d\theta = \frac{\sqrt{1-k^2}\,d\varphi}{1+k\cos\varphi}, \quad \text{d. h.} \quad r\,d\theta = b\,d\varphi.$$

Man leitet überdies aus denselben Gleichungen ab

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{\sqrt{1-k^2}\sin\varphi}{(1+k)(1+\cos\varphi)} = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}.$$

Da nun θ beständig wachsend von 0 nach π geht, wenn φ von 0 nach π variiert, so hat man offenbar

$$(1-k^2)^{\frac{n}{2}}\int_0^\pi\left(\frac{\sin\varphi}{1+k\cos\varphi}\right)^{n-1}\frac{d\varphi}{1+k\cos\varphi} = \int_0^\pi\sin^{n-1}\theta\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta\,d\theta$$

oder nach (18)

$$\mathfrak{J} = \frac{2^{n-1}\,\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{(1-k^2)^{\frac{n}{2}}\,\Gamma(n)}.$$

Will man den zweiten Fall $(k > 1,\ 0 < n < 1)$ behandeln, so beschränke man die Integration auf das Intervall $(0, \alpha)$, um zu vermeiden, daß die zu integrierende Funktion imaginär werden kann. Wendet man die Substitution $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ an und beachtet, daß θ beständig wachsend von 0 nach $\frac{\pi}{2}$ geht, wenn φ von 0 nach α variiert, so erhält man durch eine ganz analoge Rechnung wie oben das Resultat

$$\int_0^\alpha\frac{\sin^{n-1}\varphi\,d\varphi}{(1+k\cos\varphi)^n} = \frac{1}{(k^2-1)^{\frac{n}{2}}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta\cos^{-n}\theta\,d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}\,(k^2-1)^{\frac{n}{2}}}.$$

f) Wir wollen jetzt nach einem Verfahren, welches wir in einem speziellen Falle (§ 740, d) bereits angewandt haben, die Integrale

$$\int_0^\infty\frac{\cos x}{x^\mu}\,dx, \quad \int_0^\infty\frac{\sin x}{x^\mu}\,dx$$

berechnen, wobei μ eine positive Zahl darstellt, die im ersten Integral kleiner als 1, im zweiten kleiner als 2 ist. Daß die Integrale für andere Werte von μ nicht existieren geht aus der Bemerkung hervor (§ 717, a), daß die zu integrierenden Funktionen für $x = 0$ von μ-ter bezw. $(\mu - 1)$-ter Ordnung unendlich werden. Dies vorausgeschickt transformiere man mit Hilfe von (15) die vorgelegten Integrale in Doppelintegrale:

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty\int_0^\infty y^{\mu-1}e^{-xy}\cos x\,dx\,dy\,, \quad \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty\int_0^\infty y^{\mu-1}e^{-xy}\sin x\,dx\,dy\,.$$

Erinnert man sich an die Werte

$$\int_0^\infty e^{-xy}\cos x\,dx = \frac{y}{1+y^2}\,, \quad \int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dx = \frac{1}{1+y^2}\,,$$

die in einer früheren Übung (§ 740, j) gefunden worden sind, so reduzieren sich jene Doppelintegrale auf

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty \frac{y^\mu\,dy}{1+y^2}\,, \quad \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty \frac{y^{\mu-1}\,dy}{1+y^2}\,.$$

Inzwischen liefert, wenn man an das Resultat (20) denkt, die Substitution $y = \operatorname{tg}\theta$

$$\int_0^\infty \frac{y^n\,dy}{1+y^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^n\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2\cos\frac{n\pi}{2}}\,, \quad (-1 < n < 1).$$

Also ist

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^\mu}\,dx = \frac{\pi}{2\,\Gamma(\mu)\cos\frac{\mu\pi}{2}}\,, \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\mu}\,dx = \frac{\pi}{2\,\Gamma(\mu)\sin\frac{\mu\pi}{2}}\,.$$

Insbesondere ist

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,, \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.$$

765. Wir wollen zum Schluß eine wichtige Formel beweisen, welche $\Gamma(x)$ mit großer Annäherung zu berechnen gestattet, wenn x sehr groß ist. Man gehe von der Definitionsformel (§ 252, a)

$$\Gamma(x+1) = \prod_1^\infty \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}$$

aus und schreibe, indem man auf beiden Seiten die Logarithmen nimmt,

$$\log\Gamma(x) = -\log x + \sum_1^\infty \{x\log(n+1) - (x-1)\log n - \log(x+n)\}.$$

Man schaffe rechts die Logarithmen fort mit Hilfe der Formel

$$\log x = \int_1^x \frac{dx}{x} = \int_1^x dx \int_0^\infty e^{-xt}dt = \int_0^\infty (e^{-t} - e^{-xt})\frac{dt}{t}.$$

Dann findet man durch eine leichte Rechnung

$$(21) \qquad \log \Gamma(x) = \int_0^\infty \left\{(x-1)e^{-t} - \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{1 - e^{-t}}\right\}\frac{dt}{t},$$

ferner durch Integration nach x zwischen x und $x+1$ und unter Erinnerung an die Formel von Raabe (§ 721, i)

$$x \log x - x + \log \sqrt{2\pi} = \int_0^\infty \left\{\left(x - \frac{1}{2} - \frac{1}{1 - e^{-t}}\right)e^{-t} + \frac{e^{-xt}}{t}\right\}\frac{dt}{t}.$$

Die rechte Seite läßt sich zerlegen in

$$\int_0^\infty \left\{\left(x - 1 - \frac{1}{1 - e^{-t}}\right)e^{-t} + \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)e^{-xt}\right\}\frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\int_0^\infty (e^{-t} - e^{-xt})\frac{dt}{t}.$$

Also ist

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)\log x - x + \log \sqrt{2\pi} = \int_0^\infty \left\{\left(x - 1 - \frac{1}{1 - e^{-t}}\right)e^{-t} + \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)e^{-xt}\right\}\frac{dt}{t}.$$

Jetzt wird die Formel (21)

$$\log \Gamma(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\log x - x + \log \sqrt{2}\pi + \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2}\right)e^{-xt}\frac{dt}{t}.$$

Nimmt man in den bekannten Ungleichheiten (§ 221)

$$1 < \left(n - \frac{1}{2}\right)\log \frac{n}{n-1} < 1 + \frac{1}{12n(n-1)}$$

$n = 1/(1 - e^{-t})$, so findet man

$$0 < \frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} < \frac{e^t + e^{-t} - 2}{12t} < \frac{t}{12}$$

und kann folglich schreiben

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2}\right)e^{-xt}\frac{dt}{t} = \frac{\theta}{12}\int_0^\infty e^{-xt}dt = \frac{\theta}{12x},$$

wobei θ eine Zahl zwischen 0 und 1 darstellt. Es ist somit

$$\log \Gamma(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\log x - x + \log \sqrt{2}\pi + \frac{\theta}{12x}.$$

Geht man von den Logarithmen zu den Numeri über, so findet man schließlich

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}\, x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x+\frac{\theta}{12x}}.$$

Aus dieser Formel ergibt sich insbesondere die Formel von Stirling (§ 221), wenn man x einer ganzen Zahl n gleichsetzt und beachtet, daß $n! = n\Gamma(n)$ ist.

Anwendungen auf geometrisches Messen.

Längen.

766. Da wir das Differential und infolgedessen die Derivierte des Bogens s einer Kurve in Bezug auf irgend eine Veränderliche t zu berechnen wissen (§§ 583, 630), so sind wir jetzt in der Lage durch die Integration zu dem Bogen selbst, ausgedrückt als Funktion von t, zu gelangen:

$$s = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \cdot dt.$$

Insbesondere wird man bei ebenen Kurven, die in cartesischen Koordinaten (x, y) oder in Polarkoordinaten (r, θ) gegeben sind, x bezw. θ als Integrationsveränderliche annehmen können und wird also haben

$$s = \int \sqrt{1 + y'^2}\, dx \quad \text{bezw.} \quad s = \int \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta.$$

767. Beispiele. a) Bei der Astroide, die durch die Gleichung $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ dargestellt wird, hat man $y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{1 + y'^2} = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$. Legt man also den Anfangspunkt der Bogen nach $(0, a)$, so ist

$$s = a^{\frac{1}{3}} \int_0^x x^{-\frac{1}{3}} dx = \tfrac{3}{2} a^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}}.$$

Insbesondere ist $\frac{3}{2}a$ die Länge des ganzen in dem Winkel xOy enthaltenen Bogens und daher die Gesamtlänge der Astroide gleich $6a$.

b) Die logarithmische Kurve $y = ae^{\frac{x}{a}}$ läßt sich darstellen, indem man setzt $x = a \log \operatorname{tg} \varphi$, $y = a \operatorname{tg} \varphi$. Daraus folgt (durch Anwendung der partiellen Integration oder auch durch Multiplikation mit $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$)

$$s = a\int \frac{d \operatorname{tg} \varphi}{\sin \varphi} = \frac{a}{\cos \varphi} + a\int \frac{d\varphi}{\sin \varphi} = a\left(\sec \varphi + \log \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right) + \text{Const.}$$

Will man z. B. s von dem Scheitel oder dem Punkt größter Krümmung $(y = a/\sqrt{2})$ aus rechnen, so findet man

$$s = a\left(\sec\varphi - \sqrt{\frac{3}{2}} + \log\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right).$$

c) Bei der Kettenlinie gleichen Widerstandes, die durch die Gleichung $y = -a\log\cos\frac{x}{a}$ dargestellt wird, hat man $y' = \operatorname{tg}\frac{x}{a}$, mithin

$$s = \int_0^x \frac{dx}{\cos\frac{x}{a}} = a\log\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2a}\right).$$

Jetzt sind wir in der Lage (§ 595, m) die natürliche Gleichung der Kurve zu finden. Wir brauchen nur die Gleichungen

$$e^{\frac{s}{a}} = \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2a}\right), \quad e^{-\frac{s}{a}} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2a}\right)$$

zu addieren und uns zu erinnern, daß $\varrho\cos\frac{x}{a} = a$ ist.

d) Die Länge eines Bogens der Parabel $y^2 = 2ax$, der durch den Scheitel halbiert wird, ist (§ 745, c)

$$s = \frac{2}{a}\int_0^y \sqrt{y^2 + a^2}\,dy = \frac{y}{a}\sqrt{y^2 + a^2} + a\log\frac{y + \sqrt{y^2 + a^2}}{a}.$$

Z. B. hat der Bogen, dessen Sehne durch den Brennpunkt halbiert wird, eine Länge, die $1{,}147\cdots$ mal so groß ist wie die Länge der Sehne.

e) Die Länge der Lemniskate $r = \sqrt{\sin 2\theta}$ (vgl. §§ 589, m; 760, a) ist

$$4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}} = 2\sqrt{2}\,F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 5{,}244\cdots.$$

Ähnlich findet man bei der Sinuskurve $y = \sin x$ als Länge eines vollständigen Bogens (der also zwischen zwei aufeinanderfolgenden Wendepunkten enthalten ist)

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 x}\,dx = 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 x}\,dx = 2\sqrt{2}\,E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3{,}820\cdots$$

f) Die Gesamtlänge der Ellipse, die durch die Halbachsen a und $b = a\sqrt{1 - k^2}$ definiert ist, oder durch die halbe Fokalachse und durch die Exzentrizität k, wird

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = 4aE(k).$$

Bezeichnen wir also mit R den Radius eines Kreises, der denselben Umfang hat wie die Ellipse, so können wir schreiben (§ 757)

$$R = \frac{2a}{\pi}E(k) = a\left(1 - \frac{k^2}{4} - \frac{3k^4}{64} - \frac{5k^6}{256} - \frac{175k^8}{16384} - \frac{567k^{10}}{65536} - \cdots\right).$$

Man kennt mancherlei Näherungsausdrücke für R; aber die einfachsten lassen sich bilden mittels der Zahlen

$$a' = \tfrac{1}{2}(a+b),\quad b' = \sqrt{ab},\quad a'' = \tfrac{1}{2}(a'+b'),\quad b'' = \sqrt{a'b'}$$

u. s. w. Wenn k sehr klein ist, so kann man sich unter Vernachlässigung aller Potenzen, welche die zweite übersteigen, darauf beschränken $R = a'$ zu nehmen; aber dieser Wert ist nicht befriedigend genug. Sucht man dagegen in der Entwickelung von R die Potenzen bis zur sechsten zu bewahren, so wird man dazu geführt, $R = 3b'' - 2b'$ oder $R = \frac{1}{2}(3a' - b')$ zu nehmen, Werte, die a' auch deshalb vorzuziehen sind, weil sie den genauen Wert von R immer einschließen. Übrigens kann man den ersten durch das arithmetische Mittel aus beiden Werten ersetzen, also durch $R = \frac{1}{4}(3a' - 5b' + 6b'')$, dessen Entwickelung mit derjenigen von R bis zur zehnten Potenz von k übereinstimmt; u. s. w. So erhält man z. B. im Falle $a = 1$ und $b = \frac{1}{2}$

$$a' = \frac{3}{4},\quad b' = \frac{1}{\sqrt{2}},\quad b'' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\sqrt{2}}},\quad \frac{1}{4}(3a' - 5b' + 6b'') = 0{,}7709\cdots.$$

Die elliptischen Tafeln (§ 759) liefern $R = \frac{2}{\pi}E\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0{,}7709\cdots$.

g) Die Gesamtlänge der (§ 589, k) Schnecke $r = a\cos\theta + b$ ist

$$2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}\,d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(a+b)^2 - 4ab\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

$$= 4(a+b)E\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right).$$

Wenn c die größte und μc die kleinste der Zahlen a und b ist, so gestattet die Formel (11) des § 758, den letzten Ausdruck folgendermaßen zu schreiben:

$$8c\{E(\mu) - \tfrac{1}{2}(1-\mu^2)F(\mu)\}.$$

Z. B. ist die Länge der Schnecke mit zwei zusammenfallenden Wendepunkten ($b = 2a$) 3,341 ⋯ mal so groß wie die Strecke, welche die Kurve auf der Symmetrieachse ausschneidet.

h) Es soll die Länge eines Bogens der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ berechnet werden, der zwischen dem Scheitel $(a, 0)$ und einem beliebigen Hyperbelpunkte (x, y) mit positiven Koordinaten liegt. Bemerkt man, daß

$$dx = \frac{a^2 y}{b^2 x} dy = \frac{a y\, dy}{\sqrt{y^2 + b^2}}, \quad ds = \sqrt{\frac{(a^2+b^2)y^2 + b^4}{b^2(y^2+b^2)}}\, dy$$

ist, so wird man dazu geführt zu setzen $y = \dfrac{b^2 \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{a^2+b^2}}$ und erhält

$$s = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}},$$

wobei $k = a / \sqrt{a^2+b^2}$ ist, also $1/k$ die Exzentrizität. Multipliziert man das obige Integral mit $1 - k^2 = (1 - k^2 \sin^2\varphi) - k^2 \cos^2\varphi$, so spaltet es sich in zwei andere:

$$(1-k^2)\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} - k^2 F(k, \varphi).$$

Inzwischen liefert die partielle Integration

$$(1) \quad \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \operatorname{tg}\varphi \cdot \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} + F(k,\varphi) - E(k,\varphi).$$

Also ist

$$s = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} F(k,\varphi) - \sqrt{a^2+b^2}\, E(k,\varphi) + \operatorname{tg}\varphi \cdot \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2}.$$

Die Berechnung von s verlangt in jedem speziellen Falle die Benutzung der Legendreschen Tafeln (mit doppeltem Eingang). Man beachte, daß das unendliche Zunehmen von s, wenn φ nach $\frac{\pi}{2}$ konvergiert, einzig und allein von dem letzten Gliede herrührt, welches den Abstand des Mittelpunkts von der Normale im beweglichen Endpunkt darstellt.

i) Betrachten wir die Logocyklika (§ 602, b), welche durch die Gleichung

$$(2) \qquad (x+y)(x^2+y^2) = 2axy$$

oder in Polarkoordinaten durch $r = \dfrac{a}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$ dargestellt wird, wenn man die Symmetrieachse der Kurve als Polarachse nimmt. Die Länge eines beliebigen beim Scheitel anfangenden Bogens ist

$$s = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^\theta \sqrt{\cos^2 2\theta + 2\sin^2 2\theta} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

und daher die Gesamtlänge der von der Kurve gebildeten Schleife

$$a\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos^2 2\theta + 2\sin^2 2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}{1+\sin\varphi}\,d\varphi$$

$$= 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\varphi)\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

Inzwischen erhält man aus (1)

$$\int_0^{\varphi}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \operatorname{tg}\varphi\cdot\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi} + F\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\varphi\right) - E\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\varphi\right);$$

und eine partielle Integration liefert uns

$$\int_0^{\varphi}\sin\varphi\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \left(\frac{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}\right)_0^{\varphi} - \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\varphi}\frac{d\cos\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}$$

$$= \frac{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}{\cos\varphi} - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\cos\varphi+\sqrt{1+\cos^2\varphi}}{1+\sqrt{2}}.$$

Also ist

$$\int_0^{\varphi}(1-\sin\varphi)\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = 1 - \frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\cos\varphi+\sqrt{1+\cos^2\varphi}}{1+\sqrt{2}} + F\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\varphi\right) - E\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\varphi\right).$$

Setzt man endlich $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so findet man, daß die Länge der Schleife der Logocyklika

$$2a\left\{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(\sqrt{2}-1\right) + F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\},$$

d. h. $2{,}489\cdots$ mal so groß ist wie die Strecke, welche die Kurve auf ihrer Symmetrieachse ausschneidet. Die Eigenschaft Bogen zu haben, die durch elliptische Integrale der ersten beiden Gattungen, d. h. durch Bogen von Kegelschnitten ausdrückbar sind, kommt unendlich vielen anderen unikursalen Kurven dritter Ordnung zu. Sie bilden zusammen mit der Logocyklika die sogenannte Klasse der zirkularen Kurven dritter Ordnung[1]). Diese Kurven können alle durch die Gleichung (2) dargestellt werden, in welcher man auf der rechten Seite ein Glied von der Form $(x+y)(px+qy)$ hinzuzufügen hat. $a\sqrt{2}$ bezeichnet nach wie vor die Entfernung der Asymptote vom Doppelpunkt.

j) Man betrachte die Vivianische Kurve, den Schnitt einer Kugel

1) Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven, S. 221 ff.

mit einem Zylinder, dessen Basis ein über einem Kugelradius als Durchmesser beschriebener Kreis ist. Aus den Gleichungen der Kurve

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 = ax$$

entnimmt man

$$y^2 = x(a - x), \quad z^2 = a(a - x),$$

und es liegt nahe zu setzen $x = a \cos^2 \varphi$. Beschränkt man sich auf das Viertel der Kurve, welches in der Region der positiven Koordinaten liegt, so hat man $y = a \sin \varphi \cos \varphi$, $z = a \sin \varphi$. Die letzte Gleichung sagt aus, daß φ die Breite des Punktes (x, y, z) ist, während man aus dem Ausdruck von x leicht ableitet, daß φ der Wert der Länge desselben Punktes ist. Die Vivianische Kurve läßt sich also auf der Kugel auch definieren als der Ort der Punkte, deren Länge gleich der Breite ist. Dies vorausgeschickt hat man

$$dx = -a \sin 2\varphi \, d\varphi, \quad dy = a \cos 2\varphi \, d\varphi, \quad dz = a \cos \varphi \, d\varphi,$$

woraus sich durch Quadrieren und Addieren ergibt $ds^2 = a^2(1 + \cos^2 \varphi) d\varphi^2$. Mithin ist die Gesamtlänge der Kurve

$$4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 \varphi} \, d\varphi = 4a\sqrt{2} \cdot E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Mit andern Worten, die Vivianische Kurve auf der Kugel vom Radius a ist ebenso lang wie die über den Halbachsen a und $a\sqrt{2}$ beschriebene Ellipse, d. h. so lang wie der mit $1{,}216 \cdots$ multiplizierte Umfang eines größten Kreises. Zu demselben Resultat gelangt man noch leichter durch folgende Bemerkung: Wenn der Zylinder auf eine Ebene abgewickelt wird, so verwandelt sich die Kurve in zwei vollständige Bogen einer Sinuskurve. Umgekehrt hat man, um die Vivianische Kurve zu konstruieren, das Paar von Sinuskurven $y = \pm a \sin \frac{x}{a}$ zu zeichnen und aus dem Papier das Stück auszuschneiden, welches zwischen zwei durch dieselben Wendepunkte begrenzten Bogen liegt. Biegt man das Papierstück derart, daß die gemeinsame Sehne der beiden Bogen ein Kreis wird, so verwandelt sich der Rand in die Vivianische Kurve, welche der Kugel vom Radius a angehört.

Ebene Flächen.

768. Um die Fläche auszuwerten, die zwischen der Kurve $y = f(x)$, der Abscissenachse und den zu den Abscissenwerten a und b gehörigen Ordinaten enthalten ist, teilen wir (a, b) in Intervalle $h_1, h_2, \cdots, h_n$ und machen folgende Bemerkung: Der Streifen, welcher von den in den Endpunkten des Intervalles h_i errichteten Ordinaten begrenzt wird, läßt sich ersetzen durch ein Rechteck mit der Grundlinie h_i und einer Höhe y_i, die zwischen dem kleinsten und dem größten Wert von y in h_i liegt. Die gesamte Fläche A wird also immer durch $\sum_1^n h_i y_i$ dargestellt, wenn die Intervalle h_i an Zahl zunehmend gleichzeitig der Null zustreben; und da unter diesen Bedingungen die genannte Summe nur das Integral von $y\,dx$ in (a, b) als Grenzwert haben kann, so ist notwendig $A = \int_a^b y\,dx$. In analoger Weise läßt sich zeigen, daß die zwischen einem Bogen der Kurve $r = f(\theta)$ und den Radienvektoren in den Endpunkten enthaltene Fläche $A = \frac{1}{2}\int_a^b r^2 d\theta$ ist, wo a und b die äußersten Werte von θ sind. Handelt es sich ferner darum, die Fläche auszuwerten, die von einer geschlossenen Kurve umgrenzt wird, in dem einfachsten Falle, wo die Kurve von keiner Parallelen zur y-Achse oder von keiner vom Pol ausgehenden Geraden in mehr als zwei Punkten getroffen wird, so hat man

$$(3) \qquad A = \int_a^b (\beta - \alpha)\,dx, \quad A = \tfrac{1}{2}\int_a^b (\beta^2 - \alpha^2)\,d\theta.$$

Dabei sind α, β der kleinste und der größte der beiden Werte von y (oder von r), die jedem Werte von x (oder von θ) entsprechen, und a, b die äußersten Werte der Integrationsvariablen (für gewöhnlich Wurzeln von $\beta - \alpha$). Wir sind zu den obigen Formeln gelangt durch Zerlegung der Fläche in infinitesimale Elemente von erster Ordnung. Wir können sie aber auch in infinitesimale Elemente von zweiter Ordnung zerlegen, indem wir als solche im Falle der cartesischen Koordinaten die über den Seiten dx und dy konstruierten Rechtecke annehmen, im Falle der Polarkoordinaten die Rechtecke mit den Seiten dr und $r d\theta$. Alsdann ergibt sich auf Grund der Definition des Doppelintegrals die eine oder die andre der Formeln $A = \iint dx\,dy$, $B = \iint r\,dr\,d\theta$. Diese schließen die Formeln (3) ein, wie man erkennt, wenn man schreibt

$$A = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} dy, \quad A = \int_a^b d\theta \int_{\alpha(\theta)}^{\beta(\theta)} r\,dr.$$

Sie sind aber allgemeiner, insofern sie zur Berechnung der von einer beliebigen Kurve umgrenzten Fläche dienen können. Man hat übrigens (§ 738) für irgend ein System krummliniger Koordinaten

$$(4) \qquad A = \iint \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv,$$

wobei die Integration über die auszumessende Fläche zu erstrecken ist und die Vereinbarung getroffen wird, die einzelnen einfachen Integrationen in dem Sinne auszuführen, in welchem die betreffenden Veränderlichen wachsen.

769. Andere Formeln sind besonders in dem Falle nützlich, wo die Koordinaten x und y der Punkte der Randkurve als Funktionen eines Parameters t gegeben sind. Wir werden diesen Parameter immer so variieren lassen, daß der zugehörige Punkt beim Durchlaufen der Randkurve die Fläche zur Linken läßt. Als Element wählen wir das Viereck $MM'L'L$, welches zwischen zwei vom Anfangspunkt ausgehenden unendlich benachbarten Geraden liegt.

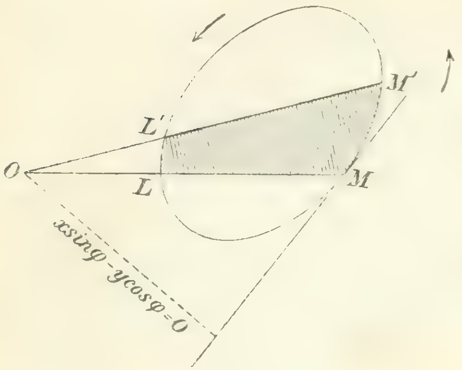

Fig. 91.

Bemerken wir nun, daß

$$MM'L'L = OMM' - OLL' = OMM' + OL'L$$

ist, so können wir als positives oder negatives Element das Dreieck OMM' annehmen, betrachtet mit dem ihm zukommenden Zeichen (vgl. § 348, d):

$$OMM' = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & x+dx \\ 0 & y & y+dy \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx).$$

Diesen Wert erhält man auch, wenn man die Hälfte des Produktes der Basis ds mit der Höhe $x\sin\varphi - y\cos\varphi$ nimmt. Denkt man sich immer x und y als Funktionen der unabhängigen Veränderlichen t ausgedrückt, so hat man

$$A = \tfrac{1}{2}\int(x\,dy - y\,dx). \tag{5}$$

Da ferner der Wert des Integrals von $x\,dy + y\,dx$, erstreckt längs eines beliebigen Bogens, nichts anderes ist als die Differenz der Werte von xy in den Endpunkten des Bogens, so ist offenbar $\int(x\,dy + y\,dx) = 0$, wenn man die Integration längs der ganzen Randkurve erstreckt. Daraus folgt, daß man A jede der beiden folgenden Formen geben kann

$$A = \int x\,dy, \quad A = -\int y\,dx. \tag{6}$$

Dies läßt sich übrigens auch konstatieren, indem man in geeigneter

Weise die doppelte Integration $\iint dx\,dy$ ausführt. Endlich nimmt die Formel (5), wenn man $t = y/x$ als Integrationsvariable wählt, die Form an

$$(7) \qquad A = \tfrac{1}{2}\int x^2 dt.$$

Dieselbe ist den Formeln (6) vorzuziehen, weil sie nicht die Derivation von x oder y nach t verlangt und wie (5) auf jedes von zwei Radienvektoren begrenzte Flächenstück anwendbar ist. Um dagegen die Formeln (6) auf den Fall eines beliebigen Bogens anwenden zu können, muß man die Differenz der Werte von $\frac{1}{2}xy$ in den Endpunkten des Bogens zu A addieren oder von A subtrahieren. Man gelangt auf solche Weise zu der Formel zurück, die wir zu Anfang für die Fläche angegeben haben, welche zwischen einem Kurvenbogen, einer Achse und den von den Endpunkten des Bogens auf die Achse gefällten Loten enthalten ist. Übrigens unterscheidet sich die Formel (7) nicht wesentlich von der zweiten Formel (3), auf die sie sich sofort durch die Substitution $t = \operatorname{tg}\theta$ reduziert.

770. Beispiele. a) Die gesamte in der Lemniskate $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ eingeschlossene Fläche ist

$$A = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta\, d\theta = a^2.$$

Sie ist also so groß wie das Dreieck, welches von der Tangente in einem Scheitel und den Tangenten im Doppelpunkt gebildet wird. Analog findet man für die Schnecke $r = a\cos\theta + b$

$$A = \int_0^{\pi} r^2 d\theta = \int_0^{\pi} (\tfrac{1}{2}a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta + \tfrac{1}{2}a^2\cos 2\theta)\, d\theta = \pi(\tfrac{1}{2}a^2 + b^2).$$

Dieses Resultat setzt voraus $b \geqq a$ und insbesondere wird bei der Kardioide $A = \frac{3}{2}\pi a^2$. Für $b < a$ dagegen stellt der gefundene Wert die Summe der von den beiden Schleifen, der äußeren und der inneren, begrenzten Flächen dar, die die bezüglichen Werte

$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}a^2 + b^2\right) \pm \left\{\frac{3}{2}b\sqrt{a^2 - b^2} + \left(\frac{1}{2}a^2 + b^2\right)\arcsin\frac{b}{a}\right\}$$

haben.

b) Bei der Parabel $y^2 = 2ax$ hat man

$$A = \int_0^x y\,dx = \frac{1}{a}\int_0^y y^2\,dy = \frac{y^3}{3a} = \frac{2}{3}xy.$$

Die Parabelfläche OMP beträgt also zwei Drittel von der Dreiecksfläche TMP. Hieraus läßt sich weiter leicht ableiten, daß die zwischen einem beliebigen Parabelbogen und seiner Sehne enthaltene Fläche zwei Drittel von dem Dreieck ausmacht, welches von der Sehne und den Tangenten in den Endpunkten gebildet wird. Übrigens kann man zu diesem Resultat auch direkt gelangen, wenn man sich die zu Anfang gemachte Rechnung wiederholt denkt, nachdem man als y-Achse die zur Sehne parallele Tangente gewählt und den Anfangspunkt in den Berührungspunkt verlegt hat. Als Element der Fläche hat man dabei das Produkt von $y\,dx$ mit dem Sinus des Achsenwinkels anzunehmen.

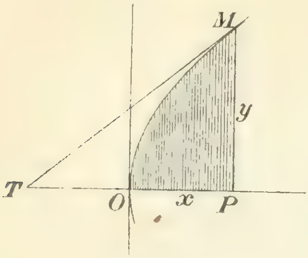

Fig. 92.

c) Bei der Kettenlinie (§ 589, c) mit dem Parameter a ist die zwischen einem beliebigen Bogen, der Direktrix und den äußersten Ordinaten enthaltene Fläche so groß wie das Rechteck, dessen Seiten gleich a, und gleich der Länge des Bogens sind. In der Tat ist, wenn der eine Endpunkt des Bogens im Scheitel liegt,

$$A = \frac{1}{2} a \int_0^x \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) dx = a^2 y' = a s.$$

Mithin hat man für einen beliebigen Bogen MM'

$$A = a(s' - s) = a \cdot \text{Bogen } MM'.$$

d) Man lasse einen Punkt eine logarithmische Spirale (§ 589, e) durchlaufen, bis er auf den alten Radiusvektor zurückkehrt. Dieser Radius und der durchlaufene Bogen begrenzen eine Fläche, die sich leicht als Funktion der Entfernungen a und b des Pols von den Endpunkten des Bogens ausdrücken läßt. Setzt man $b = ae^{2m\pi}$, so ist die Gleichung der Spirale $r = ae^{m\theta}$, und man hat

$$A = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{2\pi} e^{2m\theta} d\theta = \frac{a^2}{4m}\left(e^{4m\pi} - 1\right) = \pi \frac{b^2 - a^2}{\log \frac{b^2}{a^2}}.$$

Wenn die auf der Sehne in ihrem Mittelpunkt errichtete Senkrechte in P und in Q die Tangenten in den Endpunkten trifft, so ist der Inhalt des (gleichschenkligen) Dreiecks OPQ gerade A. Wir können ferner die Fläche des Kreises vom Radius a finden, indem wir uns denken, daß m nach Null, mithin b nach a konvergiert:

$$A = \lim \frac{b+a}{2} \cdot \frac{b-a}{2m} = a^2 \lim_{m=0} \frac{e^{2m\pi} - 1}{2m} = \pi a^2.$$

Man bemerke überdies, daß PQ nach dem Umfang des Kreises konvergiert.

e) Wir wollen uns die Aufgabe stellen die Fläche zu berechnen, die zwischen einem vollständigen Bogen einer Cykloide (§ 595, n) und dessen

Sehne enthalten ist. Wir legen den Anfangspunkt in den Scheitel und wählen die Tangente als Achse der x; L und H seien die Projektionen einer Spitze R auf die Achsen und P, Q die analogen Projektionen eines beliebigen Punktes M der Cykloide. Der über OH als Durchmesser beschriebene Kreis trifft die Strecke MQ in einem Punkt N, und es ist bekannt, daß die Tangente der Cykloide in M gerade parallel zu ON ist, so daß $dy/dx = \operatorname{tg} \widehat{NOx} = y/NQ$. Folglich hat die Fläche OPM den Wert $\int_0^x y\,dx = \int_0^y NQ \cdot dy$, ist also gleich dem Inhalt des halben Kreissegments ONQ. Aus allem ergibt sich, daß man die Hälfte der gesuchten Fläche bekommt, indem man $\frac{1}{2}\pi a^2$ von dem Inhalt des Rechtecks $OLRH$ abzieht, der gleich dem Produkt von $OL = \pi a$ mit $OH = 2a$ ist. Also wird

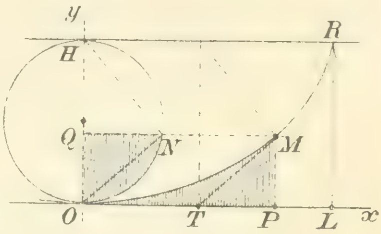

Fig. 93.

$$A = 2(2\pi a^2 - \tfrac{1}{2}\pi a^2) = 3\pi a^2,$$

d. h. die gesuchte Fläche ist dreimal so groß wie die des erzeugenden Kreises.

f) Wir wollen die Fläche ausrechnen, die zwischen der x-Achse und demjenigen Bogen der Quadratrix $y = x \cot \frac{x}{a}$ liegt, welcher durch ihre beiden dem Anfangspunkte nächsten Treffpunkte mit dieser Achse begrenzt wird. Offenbar hat man

$$A = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi a} x \cot \frac{x}{a}\,dx = 2a^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \theta \cot \theta\, d\theta$$

$$= 2a^2 (\theta \log \sin \theta)_0^{\frac{1}{2}\pi} - 2a^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log \sin \theta\, d\theta.$$

Nun ist auf Grund des Theorems von L'Hospital für nach Null konvergierendes θ

$$\lim (\theta \log \sin \theta) = -\lim \frac{\theta^2}{\sin \theta} = 0.$$

Also wird (§ 721, d)

$$A = -2a^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log \sin \theta\, d\theta = \pi a^2 \log 2.$$

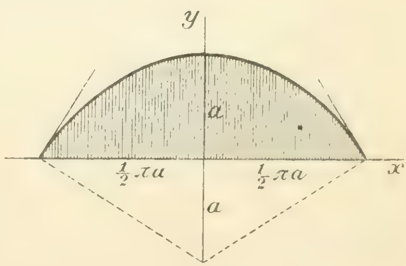

Fig. 94.

g) Die gesamte Fläche der Ellipse, deren Halbachsen a und b sind, ist

$$A = 4b\int_0^a \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx = 4ab\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt.$$

Die Berechnung des letzten Integrals ist ganz leicht (§ 727, a); wir können sie aber vermeiden, indem wir bemerken, daß für $a=b$ sein muß $A=\pi a^2$. Also ist

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = \tfrac{1}{4}\pi, \quad A = \pi ab.$$

Ein wenig umständlicher wird die Rechnung mit Polarkoordinaten, wenn der Pol ein Brennpunkt der Ellipse ist. Unter dieser Voraussetzung ist, wie wir wissen, die Gleichung der Kurve

$$r = \frac{b^2}{a(1-k\cos\theta)}.$$

Man gelangt jedoch rasch zum Ziele, wenn man sich erinnert (§ 764, e), daß nach den Relationen, die zwischen r und θ und der exzentrischen Anomalie φ bestehen, $r\,d\theta = b\,d\varphi$, $r = a(1+k\cos\varphi)$ ist. Dann folgt nämlich

$$A = \int_0^\pi r^2\,d\theta = ab\int_0^\pi (1+k\cos\varphi)\,d\varphi = \pi ab.$$

h) Es sei die Ellipse gegeben durch ihre allgemeine Gleichung

$$ax^2+by^2+c+2fy+2gx+2hxy=0,$$

in welcher man immer voraussetzen kann, daß a und b positiv sind, und daß überdies

$$ab-h^2>0, \quad D = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} < 0$$

ist. Bringt man die Gleichung auf die Form

$$by^2+2(hx+f)y+ax^2+2gx+c=0,$$

so sieht man, daß jedem Wert von x zwei Werte von y entsprechen, die in einen zusammenfließen für diejenigen Werte α und $\beta>\alpha$ von x, welche der Gleichung $b(ax^2+2gx+c)-(hx+f)^2=0$ genügen. Diese Gleichung läßt sich schreiben $c'x^2-2g'x+a'=0$, wenn man mit $a', b', \cdots, h'$ die algebraischen Komplemente von $a, b, \cdots, h$ in D bezeichnet. Dies vorausgeschickt ist die Differenz zwischen den oben genannten Werten von y

$$\frac{2}{b}\sqrt{-c'x^2+2g'x-a'} = \frac{2\sqrt{c'}}{b}\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}.$$

Setzt man also $x=\alpha+(\beta-\alpha)t$ und wendet die erste der Formeln (3) an, so kommt

$$A = \frac{2\sqrt{c'}}{b}(\beta-\alpha)^2\int_0^1 \sqrt{t(1-t)}\,dt.$$

Der Wert des letzten Integrals läßt sich sofort, ohne jede Rechnung, erhalten, wenn man bemerkt, daß es die Hälfte von der Fläche des Kreises $y^2 = x(1-x)$ darstellt: es ist also gleich $\frac{1}{8}\pi$. Andererseits ist $\beta - \alpha = \frac{2}{c}\sqrt{g'^2 - a'c'}$ und $a'c' - g'^2$ hat bekanntlich (§ 38), als das algebraische Komplement von b' in der reziproken Determinante von D, den Wert bD. Also ist

$$A = \frac{-\pi D}{(ab-h^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Es ist übrigens leicht zu erkennen (§ 384, c), daß die rechte Seite das mit π multiplizierte Produkt der Halbachsen darstellt.

i) Die in dem Zweihorn (§ 610, e) eingeschlossene Fläche wird sofort erhalten, wenn man die erste der Formeln (3) anwendet:

$$A = 2\int_0^a \left(\frac{a^2-x^2}{2a-\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{a^2-x^2}{2a+\sqrt{a^2-x^2}}\right)dx = 4\int_0^a \frac{a^2-x^2}{3a^2+x^2}\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Spaltet man das letzte Integral in

$$-4a^2\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx + 16a^4\int_0^a \frac{dx}{(3a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$$

und berechnet

$$\int \frac{dx}{(3a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{2a^2\sqrt{3}}\arcsin\frac{2x}{\sqrt{3a^2+x^2}} + C,$$

so findet man leicht $A = (16 - 9\sqrt{3})\frac{\pi a^2}{\sqrt{3}}$. Man erhält also die gesuchte Fläche, indem man den Inhalt des größten einbeschriebenen Kreises mit 2,13843 ... multipliziert.

j) Die in der Astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ eingeschlossene Fläche ist

$$A = 4\int_0^a \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} dx = 6a^2\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{3}{2}}\,dt.$$

Durch Verwandlung von t in $1-t$ erhält man

$$\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{3}{2}}dt = \int_0^1 t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{t(1-t)}\,dt = \frac{\pi}{16}.$$

Also ist $A = \frac{3}{8}\pi a^2$. Übrigens kann man unter Benutzung der Gammafunktion allgemeiner die zwischen der Kurve $x^n + y^n = a^n$ und den positiven Hälften der Achsen enthaltene Fläche finden:

$$A = \int_0^a (a^n - x^n)^{\frac{1}{n}}dx = \frac{a^2}{n}\int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}(1-t)^{\frac{1}{n}}dt = \frac{a^2\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{2n\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}.$$

So oft der (positive) Exponent n der Quotient einer geraden Zahl durch eine ungerade Zahl ist, hat man eine geschlossene Kurve (die der Astroide oder dem Kreis analog ist, je nachdem $n < 1$ oder $n > 1$). Sie umgrenzt eine Fläche, die viermal so groß ist wie die vorige. Insbesondere findet man für $n = 2$ und $n = \frac{2}{3}$ die Werte wieder πa^2 und $\frac{3}{8}\pi a^2$.

k) Um die Fläche zu berechnen, die in einer der beiden Schleifen der durch die Gleichung $x^4 = (x^2 - y^2)y$ dargestellten Kurve (§ 610, b) eingeschlossen ist, wende man die Formel (7) an. Man erhält sofort

$$A = \tfrac{1}{2}\int_0^1 (t - t^3)^2 dt = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{5} + \tfrac{1}{7}\right) = \tfrac{4}{105}.$$

Ebenso ist die in der Schleife des Folium $x^3 + y^3 = 3axy$ eingeschlossene Fläche

$$A = 9a^2\int_0^1 \frac{t^2 dt}{(1+t^3)^2} = 3a^2\left(\frac{1}{1+t^3}\right)_1^0 = \frac{3}{2}a^2,$$

sodaß das Folium das von den Tangenten im Scheitel und im Doppelpunkt gebildete Dreieck in drei gleiche Teile teilt. Allgemeiner findet man für die durch die Gleichung $x^{2n+1} + y^{2n+1} = (2n+1)ax^n y^n$ dargestellten Kurven $A = (n + \frac{1}{2})a^2$.

l) Will man die in den beiden Schleifen der Kurve $(x^2 + y^2 - ay)^2 = 2a^2xy$ eingeschlossenen Flächen bestimmen, so ist der Gebrauch der zweiten Formel (3) vorzuziehen. Dieselbe erfordert, daß man die Gleichung der Kurve in Polarkoordinaten schreibt: $r = a(\sin\theta \pm \sqrt{\sin 2\theta})$. Jedem Wert von θ zwischen 0 und $\alpha = \operatorname{arc\,tg} 2 = 63^0\,26' \ldots$ entsprechen zwei Punkte, deren einer in der Region der negativen x und y eine vollständige Schleife beschreibt (und zwar die kleinere), während der andere nur einen Bogen der größeren Schleife beschreibt. Diese wird (wenn θ noch von α bis $\frac{1}{2}\pi$ variiert) durch einen zweiten Bogen vervollständigt, der die y-Achse im Punkte $y = a$ und die Gerade $y = 2x$ im Anfangspunkte berührt. Daraus folgt, daß die in dieser Schleife eingeschlossene Fläche

$$A = \tfrac{1}{2}a^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left(\sin\theta + \sqrt{\sin 2\theta}\right)^2 d\theta - \tfrac{1}{2}a^2\int_\alpha^{\frac{1}{2}\pi}\left(\sin\theta - \sqrt{\sin 2\theta}\right) d\theta$$

ist, während die andere Schleife die Fläche

$$A' = \tfrac{1}{2}a^2\int_0^{\alpha}\left(\sin\theta - \sqrt{\sin 2\theta}\right)^2 d\theta$$

eingrenzt, sodaß

$$A - A' = 2a^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin\theta\sqrt{\sin 2\theta}\, d\theta = \tfrac{1}{2}\pi a^2$$

ist. Ferner wird

$$A + A' = a^2\int_0^{\alpha}(\sin^2\theta + \sin 2\theta)\, d\theta + 2a^2\int_\alpha^{\frac{1}{2}\pi}\sin\theta\sqrt{\sin 2\theta}\, d\theta.$$

Das erste Integral bietet keine Schwierigkeit. Das zweite läßt sich berechnen, indem man $t = \operatorname{tg}\theta$ als Integrationsvariable wählt. Auf diese Weise findet man

$$A' = \tfrac{1}{2} a^2 \left(1 - \tfrac{1}{4}\log 5 - \operatorname{arc\,tg} \tfrac{1}{2}\right) = a^2 \cdot 0{,}06682 \ldots,$$

und darauf $A = A' + \frac{1}{2}\pi a^2 = a^2 \cdot 1{,}63762 \cdots > 24\, A'$.

m) Wir wollen diejenigen unter den Kurven (§ 602, b)

$$(8) \qquad (x + y)(x^2 - 2kxy + y^2) = 2(1 + k)\,axy$$

betrachten, welche nur eine Asymptote haben ($k^2 < 1$), und uns die Aufgabe stellen, die in der Schleife einer jeden enthaltene Fläche zu berechnen. Verfährt man wie im Falle des Folium ($k = 1/2$), so erhält man

$$A = 4(1 + k)^2 a^2 \int_0^1 \frac{t^2\,dt}{(1 + t)^2 (1 - 2kt + t^2)^2}\cdot$$

Es ist hier zweckmäßig $z = \dfrac{1 - t}{1 + t}$ als Integrationsvariable zu wählen und zu schreiben

$$A = \frac{1}{2}(1 + k)^2 a^2 \int_0^1 \frac{(1 - z^2)^2\,dz}{(1 - k + (1 + k)z^2)^2}\cdot$$

Verwandelt man z in $z/\sqrt{m}$, wobei $m = \dfrac{1 + k}{1 - k}$ ist, so findet man

$$A = \frac{a^2}{2\sqrt{m}} \int_0^{\sqrt{m}} \left(\frac{m - z^2}{1 + z^2}\right)^2 dz$$

$$= \frac{a^2}{2\sqrt{m}} \left\{ \sqrt{m} - 2(m + 1) \int_0^{\sqrt{m}} \frac{dz}{1 + z^2} + (m + 1)^2 \int_0^{\sqrt{m}} \frac{dz}{(1 + z^2)^2} \right\}\cdot$$

Bemerkt man endlich, daß

$$\int_0^{\sqrt{m}} \frac{dz}{1 + z^2} = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{m}, \qquad \int_0^{\sqrt{m}} \frac{dz}{(1 + z^2)^2} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{m} + \frac{\sqrt{m}}{m + 1}\right)$$

ist, so ergibt sich

$$A = \left\{ m + 3 + \frac{(m + 1)(m - 3)}{\sqrt{m}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{m} \right\} \frac{a^2}{4}\cdot$$

Insbesondere wird im Falle des Folium ($m = 3$) und der Logocyklika ($m = 1$)

$$A = \tfrac{3}{2} a^2, \qquad A = \left(1 - \tfrac{1}{4}\pi\right) a^2.$$

n) Zu dem obigen Resultat gelangt man auch mit Hilfe der ersten in § 768 bewiesenen Formel, wenn man zunächst die Achsen eine Drehung um $\frac{1}{4}\pi$ um den Anfangspunkt ausführen läßt. Alsdann nimmt die Gleichung (8) die einfachere Form an

$$y = \pm x \sqrt{\frac{a - \frac{x\sqrt{2}}{m}}{a + x\sqrt{2}}},$$

und eine leichte Rechnung gibt (§ 725, m)

$$\int_0^x \sqrt{\frac{a - \frac{x\sqrt{2}}{m}}{a + x\sqrt{2}}}\, x\,dx = -\tfrac{1}{4}\left((m+3)\frac{a}{2} - x\sqrt{2}\right)\sqrt{(a + x\sqrt{2})\left(a - \frac{x\sqrt{2}}{m}\right)}$$

$$+ \left\{ m + 3 + \frac{(m+1)(m-3)}{\sqrt{m}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sqrt{\frac{2}{m}}}{a + \sqrt{(a + x\sqrt{2})\left(a - \frac{x\sqrt{2}}{m}\right)}} \right\} \frac{a^2}{8}.$$

Man braucht nur $x = ma/\sqrt{2}$ zu setzen, um den oben angegebenen Ausdruck von A wiederzufinden. Dagegen erhält man für $x = -a\sqrt{2}$ den Wert A' der zwischen der Kurve und der Asymptote enthaltenen Fläche:

$$A' = A - \frac{(m+1)(m-3)}{8\sqrt{m}} \pi a^2.$$

Für $m = 3$ ist $A' = A$, d. h. die in der Schleife eines Folium eingeschlossene Fläche ist gleich der zwischen der Kurve und ihrer Asymptote enthaltenen Fläche: diese letztere wird durch die Tangenten im Doppelpunkt in drei gleiche Teile geteilt. Für $m = 1$ erhält man $A' = (1 + \frac{1}{4}\pi)a^2$, mithin $A + A' = 2a^2$. Also ist die gesamte Fläche, die von einer Logocyklika und ihrer Asymptote begrenzt wird, das Vierfache der von dieser Geraden und den Tangenten im Doppelpunkt umgrenzten Dreiecksfläche. Endlich hat man für unendliches m folgendes: $\lim A = \infty$, $\lim A' = \frac{4}{3} a^2$. Die Schleife hat die Tendenz sich in parabolischer Form zu öffnen, d. h. sie strebt danach sich in zwei unendliche Zweige zu zerlegen, die beide zu der Parabel $y^2 = \frac{1}{2} a\left(x\sqrt{2} - a\right)$ asymptotisch sind. Dagegen bleibt die zwischen der Kurve und ihrer geradlinigen Asymptote enthaltene Fläche endlich.

o) Wir wollen uns die Aufgabe stellen, denjenigen Teil der Fläche einer Ellipse zu berechnen, welcher zwischen den beiden Zweigen der konfokalen gleichseitigen Hyperbel enthalten ist. Die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} = 1 \tag{9}$$

stellt unendlich viele konfokale Kegelschnitte dar (unter ihnen für $\lambda = 0$ die gegebene Ellipse), und zwar für $\lambda < b^2$ unendlich viele Ellipsen (die innerhalb oder außerhalb der gegebenen liegen, je nachdem λ positiv oder negativ ist), für $\lambda > b^2$ unendlich viele Hyperbeln, die mit der y-Achse zusammenzufallen streben, wenn λ nach a^2 konvergiert. Eine von diesen Hyperbeln ist gleichseitig: sie entspricht dem Wert $\frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ von λ.

Wir wollen mit μ die Werte von λ bezeichnen, für welche die Gleichung (9) eine Hyperbel darstellt, und bemerken, daß durch jeden Punkt (x, y) in dem betrachteten Flächenstück zwei Kegelschnitte (9) hindurchgehen, nämlich eine Ellipse und eine Hyperbel. Die erste wird charakterisiert durch einen Wert λ zwischen 0 und b^2, die zweite durch einen Wert μ zwischen $\frac{1}{2}(a^2+b^2)$ und a^2. Die beiden Werte sind die Wurzeln der Gleichung (9), d. h. der Gleichung $(\lambda-a^2)(\lambda-b^2)+(\lambda-b^2)x^2+(\lambda-a^2)y^2=0$, sodaß man haben muß

$$\lambda+\mu=a^2+b^2-x^2-y^2, \qquad \lambda\mu=a^2b^2-a^2y^2-b^2x^2,$$

woraus folgt

$$x^2=\frac{(a^2-\lambda)(a^2-\mu)}{a^2-b^2}, \qquad y^2=-\frac{(b^2-\lambda)(b^2-\mu)}{a^2-b^2}$$

und weiter

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\lambda,\mu)}\right|=\frac{\frac{1}{4}(\mu-\lambda)}{\sqrt{-(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(a^2-\mu)(b^2-\mu)}}.$$

Man erhält also bei Anwendung der Formel (4)

$$A=\int_0^{b^2}\frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)}}\int_{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}^{a^2}\frac{(\mu-\lambda)\,d\mu}{\sqrt{-(a^2-\mu)(b^2-\mu)}}.$$

Um die erste Integration auszuführen setze man $\mu=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta$ und lasse θ von $\frac{1}{4}\pi$ bis 0 variieren. Man erhält dann sofort als Wert dieses Integrals

$$2\int_0^{\frac{1}{4}\pi}(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta-\lambda)\,d\theta=\tfrac{1}{2}\pi\left\{\tfrac{1}{2}(a^2+b^2)-\lambda\right\}+\tfrac{1}{2}(a^2-b^2);$$

mithin

$$A=\frac{1}{2}\pi\int_0^{b^2}\frac{\frac{1}{2}(a^2+b^2)-\lambda}{\sqrt{(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)}}\,d\lambda+\frac{1}{2}(a^2-b^2)\int_0^{b^2}\frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)}}$$

und endlich (§§ 723, c; 745, a)

$$A=\frac{1}{2}\pi ab+\frac{1}{2}(a^2-b^2)\log\frac{a+b}{a-b}.$$

Oberflächen und Volumina bei Rotationskörpern.

771. Es sei in der Ebene ein Kurvenbogen gegeben und man lasse ihn um eine Gerade derselben Ebene rotieren. Als Element der so erzeugten Oberfläche können wir den Streifen annehmen, der zwischen irgend einem Parallelkreis vom Radius R und dem Parallelkreis vom Radius $R+dR$ enthalten ist. Wir können diesen Streifen als die Seitenfläche des abgestumpften Kegels betrachten, welchen das geradlinige Element ds erzeugt. Der elementare Flächenstreifen wird also gemessen durch das Produkt aus der Seitenlinie ds und dem arithmetischen Mittel der Umfänge der Basen des Kegelstumpfes, d. h. $2\pi(R + \frac{1}{2}dR)$ oder einfach $2\pi R$. Man sieht folglich unter Vernachlässigung höherer Infinitesimalen in dem Differential, wodurch der Wert des Integrals nicht geändert wird, daß die gesuchte Fläche $A = 2\pi\int R\,ds$ ist, wo man R immer das Zeichen von ds beilegen muß. Nimmt man ähnlich als körperliches Element die zwischen dem Oberflächenelement und den Ebenen der beiden Parallelkreise enthaltene Scheibe an, und betrachtet man diese Scheibe als einen Zylinder mit der Basis πR^2 und der Höhe dz (der Projektion von ds auf die Rotationsachse), so sieht man, daß das Volumen, welches zwischen der von dem Bogen erzeugten Oberfläche und den Ebenen der äußersten Parallelkreise eingeschlossen ist, den Wert $V = \pi\int R^2 dz$ hat. Beim Festsetzen der Grenzen bei diesen Integrationen muß man auf das Verhalten der Veränderlichen längs des erzeugenden Bogens PQ Rücksicht nehmen und das Zeichen des Differentials beachten. Bei der Berechnung von A ist die Veränderliche s ihrer Natur nach von einem Ende des Bogens PQ bis zum andern wachsend (wenn man will); wenn aber die Bedürfnisse der Integration dazu führen eine andere Veränderliche an ihre Stelle zu setzen, so muß man eventuell das Integral in andere zerlegen, nach den Bemerkungen (§ 724), die wir früher über den Wechsel der Integrationsvariablen gemacht haben. Es möge z. B. PQ einer geschlossenen Kurve angehören, und die Veränderliche z möge längs PQ zuerst von a bis c wachsen und dann von c bis b abnehmen. Führt man z anstatt s als Integrationsvariable ein, so würde das Integral

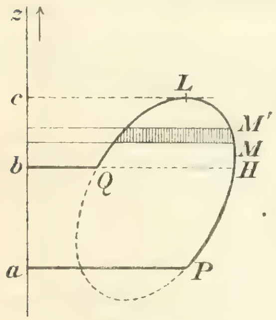

Fig. 95.

$2\pi\int R\,ds$, zwischen den Grenzen a und b der Veränderlichen z genommen, nur die von einem Teil PH des Bogens PQ erzeugte Oberfläche darstellen, während man hat

$$A = 2\pi\int_a^c R\frac{ds}{dz}\,dz + 2\pi\int_c^b R\frac{ds}{dz}\,dz.$$

Die beiden Summanden (die wesentlich positiv sind) stellen die von den Bogen PL und LQ erzeugten Oberflächen dar. Ebenso ist

$$V = \pi\int_a^c R^2 dz + \pi\int_c^b R^2 dz.$$

Hier ist der zweite Summand negativ, und so muß es auch sein, weil das dem Bogen LQ entsprechende Volumen von dem zum Bogen PL gehörigen **subtrahiert** werden muß.

772. Beispiele. a) Für eine Astroide, die um eine ihrer Wendetangenten rotiert, hat man

$$A = 4\pi \int_{x=0}^{x=a} x\,ds = 4\pi a^{\frac{1}{3}} \int_0^a x^{\frac{2}{3}}\,dx = \tfrac{12}{5}\pi a^2,$$

d. h. die gesamte erzeugte Oberfläche ist gleich drei Fünfteln von der Oberfläche der umbeschriebenen Kugel. Das Volumen unseres Rotationskörpers ist (§ 762)

$$V = 2\pi \int_0^a x^2\,dy = 3\pi a^3 \int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^3 dt = 3\pi a^3 \frac{3!\,2^4}{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3} = \frac{32\pi a^3}{105}.$$

b) Die Oberfläche des Katenoids, zwischen dem Kehlkreis und einem beliebigen Parallelkreis vom Radius y, ist (wenn man sich an die Relation $y\,dx = a\,ds$ erinnert)

$$A = 2\pi \int y\,ds = \frac{2\pi}{a} \int_0^x y^2\,dx = \frac{1}{2}\pi a \int_0^x \left(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} + 2\right) dx = \pi a (x + y y').$$

Sie ist also proportional zu dem Abschnitt der Rotationsachse, welcher zwischen der Normale und der Ebene des Kehlkreises liegt. Daraus folgt, daß die zum Katenoid normalen Kegel, welche ihre Spitzen in den Endpunkten eines beliebigen Abschnitts von der Länge b auf der Rotationsachse haben, auf der Fläche einen Streifen abgrenzen, dessen Inhalt $A = \pi a b$ ist. Das Volumen des Körpers, der durch diesen Streifen und durch die Ebenen der äußersten Parallelkreise begrenzt wird, ist

$$V = \pi \int y^2\,dx = \tfrac{1}{2} a A = \tfrac{1}{2}\pi a^2 b.$$

c) Bei den die Cykloide betreffenden Fragen ist es gut sich an folgendes zu erinnern (§ 770, e): Nimmt man als Achsen die Tangente und die Normale im Scheitel, so wird der Richtungskoeffizient der Tangente $dy/dx = y/\sqrt{y(2a-y)}$, mithin

$$\frac{dx}{\sqrt{2a-y}} = \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{ds}{\sqrt{2a}}.$$

Wenn z. B. ein vollständiger Cykloidenbogen um die Tangente im Scheitel rotiert, so erzeugt er eine Fläche, deren Inhalt

$$A = 4\pi \int_0^{4a} y\,ds = 4\pi\sqrt{2a} \int_0^{2a} \sqrt{y}\,dy = \tfrac{32}{3}\pi a^2$$

ist, d. h. ungefähr elfmal so groß wie der Inhalt des erzeugenden Kreises (der Cykloide). Der durch diese Fläche und die Ebenen der äußersten Parallelkreise begrenzte Körper hat ein Volumen (vgl. § 770, j)

$$V = 2\pi \int_0^{\pi a} y^2 dx = 2\pi \int_0^{2a} y^{\frac{3}{2}} (2a - y)^{\frac{1}{2}} dy = 16\pi a^3 \int_0^1 t^{\frac{3}{2}} (1-t)^{\frac{1}{2}} dt = \pi^2 a^3.$$

Wenn der Bogen aber um die Direktrix rotiert, so bekommt man eine doppelt so große Oberfläche

$$A = 4\pi \int_0^{4a} (2a - y)\, ds = 32\pi a^2 - 4\pi \int_0^{4a} y\, ds = \tfrac{64}{3}\pi a^2,$$

und das Volumen ist fünfmal so groß wie vorher. Erinnert man sich nämlich an die Resultate

$$\int_0^{\pi a} y\, dx = \tfrac{1}{2}\pi a^2, \quad \int_0^{\pi a} y^2 dx = \tfrac{1}{2}\pi a^3,$$

so findet man sofort

$$V = 2\pi \int_0^{\pi a} (2a - y)^2 dx = 5\pi^2 a^3.$$

Wenn endlich der Bogen um die Normale im Scheitel rotiert, so muß man zunächst bemerken, daß die Länge eines beliebigen Bogens, dessen eines Ende im Scheitel liegt,

$$s = \sqrt{2a} \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{2ay}$$

ist. Da man ferner in der Spitze $s = 4a$, $x = \pi a$ hat, so erhält man durch partielle Integration

$$\int_0^{4a} x\, ds = 4\pi a^2 - \int_0^{\pi a} s\, dx = 4\pi a^2 - 2\sqrt{2a} \int_0^{2a} \sqrt{2a - y} \cdot dy = 4a^2 (\pi - \tfrac{4}{3}).$$

Also ist der Inhalt der erzeugten Fläche $8\pi a^2 (\pi - \frac{4}{3})$.

d) Wir wollen die gesamte Oberfläche eines Sphäroids (Rotationsellipsoids) zu bestimmen suchen. Aus der Gleichung des Meridians gewinnt man

$$x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}, \quad ds = \sqrt{\frac{b^4 + (a^2 - b^2) y^2}{b^2 (b^2 - y^2)}}\, dy;$$

mithin ist

$$A = \frac{4\pi a}{b^2} \int_0^b \sqrt{b^4 + (a^2 - b^2) y^2}\, dy.$$

Wenn das Sphäroid abgeplattet $(a > b)$ ist, so genügt es $y = b^2 t / \sqrt{a^2 - b^2}$ zu setzen, um zu erhalten

$$A = \frac{4\pi a b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \int_0^{\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}} \sqrt{1 + t^2}\, dt = 2\pi a^2 + \frac{2\pi a b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \log \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}.$$

Wenn der Meridian nur schwach exzentrisch ist (was z. B. bei der Erde zutrifft), so hat man angenähert $A = 4\pi a^2 (1 - \frac{1}{3} k^2)$. Dagegen erhält man im Falle eines gestreckten Sphäroids, nachdem man a mit b vertauscht hat, um immer mit $2a$ die Länge der Fokalachse zu bezeichnen,

$$A = \frac{4\pi b}{a^2} \int_0^a \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2) y^2}\, dy,$$

sodaß, wenn man $y = a^2 t / \sqrt{a^2 - b^2}$ setzt, herauskommt

$$A = \frac{4\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \int_0^{\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}} \sqrt{1 - t^2}\, dt = 2\pi b^2 + \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arccos \frac{b}{a}.$$

Im Falle einer schwachen Exzentrizität erhält man den Näherungswert $A = 4\pi b^2 (1 + \frac{1}{3} k^2)$. Also ist die Oberfläche jedes schwach exzentrischen Sphäroids näherungsweise gleich der Oberfläche der längs des Äquators berührenden Kugel, multipliziert mit $1 \mp \frac{1}{3} k^2$, je nachdem das Sphäroid ein abgeplattetes oder ein gestrecktes ist.

e) Wir wollen die Oberfläche und das Volumen eines Torus zu bestimmen suchen, d. h. des Ringes, den ein Kreis erzeugt, wenn er um eine Gerade seiner Ebene rotiert. Ist b der Abstand des Zentrums von der Rotationsachse und $a < b$ der Radius des Kreises, so ist der Radius des Parallelkreises $R = b + a \cos\theta$, und man hat $ds = a\, d\theta$; mithin wird

$$A = 4\pi a \int_0^{\pi} (b + a \cos\theta)\, d\theta = 4\pi^2 a b.$$

Die Fläche hat zwei singuläre Tangentialebenen, welche sie längs Parallelkreisen berühren und sie in einen innern und einen äußeren Teil zerlegen. Um die Inhalte A' und A'' dieser beiden Teile zu kennen, genügt es ihre Differenz zu berechnen:

$$A' - A'' = 8\pi a^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos\theta\, d\theta = 8\pi a^2.$$

Ebenso zerlegt der durch die beiden genannten Parallelkreise bestimmte Zylinder den Ring in zwei Teile, deren Volumina sind

$$V' = 2\pi a \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (b + a\cos\theta)^2 \cos\theta\, d\theta - 2\pi a b^2,$$

$$V'' = 2\pi a \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} (b + a\cos\theta)^2 \cos\theta\, d\theta + 2\pi a b^2,$$

sodaß das Gesamtvolumen des Ringes

$$V = 2\pi a \int_0^{\pi} (b + a\cos\theta)^2 \cos\theta\, d\theta = 4\pi a^2 b \int_0^{\pi} \cos^2\theta\, d\theta = 2\pi^2 a^2 b$$

ist. Außerdem hat man

$$V' - V'' = 4\pi a \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (b^2 + a^2\cos^2\theta)\cos\theta\, d\theta - 4\pi a b^2 = 4\pi a^3 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^3\theta\, d\theta = \tfrac{8}{3}\pi a^3.$$

Man beachte, daß die Hälften der Differenzen $A' - A''$ und $V' - V''$ die Oberfläche und das Volumen einer Kugel vom Radius a darstellen, und daß sie sich folglich nicht ändern, wenn der Ring sich unaufhörlich erweitert, während er immer zwischen den beiden als unbeweglich gedachten singulären Tangentialebenen eingeschlossen bleibt. Für dies Verhalten werden wir in kurzem (§ 774) eine Erklärung finden. Wenn endlich $b < a$ ist, so trifft der Kreis die Achse, und die sichtbare Oberfläche wird

$$A = 4\pi a \int_0^{\arccos\left(-\frac{b}{a}\right)} (b + a\cos\theta)\, d\theta = 4\pi a b \arccos\left(-\frac{b}{a}\right) + 4\pi a\sqrt{a^2 - b^2};$$

das Volumen des von ihr begrenzten Körpers ist

$$V = 2\pi a \int_0^{\arccos\left(-\frac{b}{a}\right)} (b + a\cos\theta)^2 \cos\theta\, d\theta = 2\pi a^2 b \arccos\left(-\frac{b}{a}\right) + \frac{2}{3}\pi(2a^2 + b^2)\sqrt{a^2 - b^2}.$$

Insbesondere erhält man für $b = 0$ eine Kugel vom Radius a und findet $A = 4\pi a^2$, $V = \frac{4}{3}\pi a^3$.

f) Man lasse die Kardioide $r = 2a\cos^2\frac{\theta}{2}$ um ihre Symmetrieachse rotieren. Der Radius des Parallelkreises für einen gegebenen Wert von θ ist $R = r\sin\theta$, das Bogenelement der Kardioide ist $ds = 2a\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta$. Mithin wird, da θ längs der Kurve immer in einem und demselben Sinne variiert,

$$A = 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \cos^4\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2}\, d\theta = \frac{32}{5}\pi a^2.$$

Um das Gesamtvolumen des Körpers zu berechnen, ist es zweckmäßig als Integrationsvariable den Radiusvektor r anzunehmen, der von der Spitze bis zum Scheitel beständig wächst. Da

$$\cos\theta = \frac{r - a}{a}, \quad R = r\sin\theta = \frac{r}{a}\sqrt{2ar - r^2}$$

ist, so erhält man sofort

$$V = \frac{\pi}{a^3} \int_0^{2a} r^3(2a - r)(2r - a)\, dr = \frac{8}{3}\pi a^3.$$

Als Kontrolle ist nützlich die Vergleichung dieser Resultate mit denjenigen, welche man erhält, wenn man z. B. die kleinste umbeschriebene Kugel betrachtet. Um den Radius R des kleinsten unter den Kreisen zu finden, die ihren Mittelpunkt auf der Symmetrieachse haben und die Kardioide berühren, genügt die Bemerkung, daß, um die Bedingung des Minimums zu erfüllen, $RdR = 0$ sein muß, und daß infolgedessen die Berührungssehne normal zur Kardioide ausfallen muß. Daraus folgt, daß der Radius des Berührungsparallelkreises, der mit dem Radius R der gesuchten Kugel zusammenfällt, gleich dem Maximum von $r \sin\theta$ ist. Dieses tritt für $\theta = \frac{1}{3}\pi$ ein, sodaß $r = \frac{3}{2}a$ und der genannte Radius $R = \frac{3}{4}a\sqrt{3}$ ist. Es ist nun leicht zu konstatieren, daß die Kugel vom Radius R ein etwas größeres Volumen hat als der betrachtete Körper; und dasselbe gilt für die Oberflächen, obwohl man a priori nicht sicher darüber sein kann. Der Leser kann in analoger Weise das Volumen des Körpers berechnen, der von einer beliebigen Schnecke $r = a\cos\theta + b$ ohne Doppelpunkt $(b > a)$ erzeugt wird, wenn dieselbe um ihre Symmetrieachse rotiert. Er wird finden $V = \frac{4}{3}\pi b(a^2 + b^2)$. Im Falle $b < a$ ist dies das Maß des Volumens, welches zwischen den von den beiden Schleifen erzeugten Flächen enthalten ist; aber diese Flächen, die innere und die äußere, begrenzen je einen Körper, dessen Volumen $\frac{\pi}{6a}(a-b)^4$ bezw. $\frac{\pi}{6a}(a+b)^4$ ist. Zu diesen Resultaten gelangt man fast ohne Rechnung mit Hilfe einer andern Formel, die wir am Ende von § 779 angeben werden.

Schwerpunkte.

773. Man betrachte im Raum eine Punktmenge, die aus den Punkten eines begrenzten Stückes s einer Linie, Fläche oder des dreidimensionalen Raumes selbst besteht. Man bezeichnet als Schwerpunkt von s den Punkt G, dessen Koordinaten gleich den Mittelwerten (§ 712) der entsprechenden Koordinaten der Punkte von s sind. Wenn, um einen bestimmten Fall zu betrachten, s eine Linie ist, so werden die Koordinaten ξ, η, ζ von G durch folgende Gleichungen gegeben sein

$$\xi s = \int x\,ds, \quad \eta s = \int y\,ds, \quad \zeta s = \int z\,ds.$$

Da jede lineare Transformation, die man auf die Koordinaten x, y, z der Punkte von s ausübt, sich in ξ, η, ζ identisch wiederholt, so ist klar, daß die Lage des Schwerpunkts von der Wahl der Achsen unabhängig ist. Wir wollen sogleich bemerken, daß bei einer Figur, die eine Symmetrieebene besitzt, der Schwerpunkt in dieser enthalten ist. Wählt man nämlich die genannte Ebene zur Ebene Oxy, so wird jedes Element $z\,ds$ des Integrals für ζ durch ein anderes $-z\,ds$ zerstört, sodaß $\zeta = 0$ ist. Insbesondere bemerke man, daß jede ebene Figur ihren Schwerpunkt in der eignen Ebene hat, und daß bei einer Figur, die ein Symmetriezentrum besitzt, der Schwerpunkt notwendig in dieses fällt. Endlich beachte man folgendes:

Besteht eine Figur aus zwei Teilen s_1 und s_2, deren Schwerpunkte G_1 und G_2 man kennt, so teilt der Schwerpunkt der ganzen Figur G_1G_2 im umgekehrten Verhältnis von s_1 zu s_2. Dies leitet man sofort aus den evidenten Formeln $\xi s = \xi_1 s_1 + \xi_2 s_2, \ldots$ ab.

774. Theorem von Guldin. Wir wollen die Formeln in § 771 wieder vornehmen, welche die Oberfläche und das Volumen ausdrücken, die von einem ebenen Bogen s oder einer ebenen Fläche σ durch Rotation um eine in ihrer Ebene liegende Gerade erzeugt werden. Nimmt man diese Gerade zur x-Achse, so lassen sich jene Formeln offenbar in folgender Weise schreiben:

$$A = 2\pi\int y\,ds = 2\pi\eta\cdot s, \qquad V = \pi\int y^2\,dx = 2\pi\iint y\,dx\,dy = 2\pi\eta\cdot\sigma.$$

Man erhält also die Oberfläche und das Volumen, von denen hier die Rede ist, indem man die Länge bezw. die Fläche der erzeugenden Figur mit dem Umfang des von ihrem Schwerpunkt beschriebenen Kreises multipliziert. Wünscht man nur den Teil der Oberfläche oder des Volumens zu haben, der zwischen zwei Meridianebenen enthalten ist, so wird es offenbar genügen, statt des ganzen Kreisumfanges nur den Bogen zu nehmen, den auf ihm die genannten Ebenen eingrenzen. Dies vorausgeschickt wollen wir allgemeiner einen Bogen s oder eine Fläche σ in einer Ebene betrachten, die sich im Raume derart bewegt, daß sie beständig normal zu den Trajektorien ihrer Punkte ist. Offenbar kann unter diesen Bedingungen eine infinitesimale Bewegung der Ebene als eine Rotation derselben um ihre Charakteristik (§ 674) betrachtet werden. Mithin kann man die elementare Oberfläche und das elementare Volumen, die auf solche Weise von s bezw. von σ erzeugt werden, abgesehen von höheren Infinitesimalen, ausdrücken durch das Produkt von s bezw. σ mit der Verrückung dl des Schwerpunkts. Bei einer endlichen Bewegung wird man also haben $A=\int s\,dl=s\int dl$, $V=\int\sigma\,dl=\sigma\int dl$, d. h. die Oberfläche und das Volumen, die von der betrachteten Figur erzeugt werden, erhält man durch Multiplikation von s oder σ mit der Länge des von dem betreffenden Schwerpunkt durchlaufenen Weges. Diese Theoreme sind von Nutzen für die Berechnung gewisser Oberflächen und gewisser Volumina, können aber auch umgekehrt zur schnellen Bestimmung der Schwerpunkte gewisser Figuren gebraucht werden.

775. Beispiele. a) Bei einem Bogen der Kettenlinie, welcher in Bezug auf die Normale im Scheitel symmetrisch ist, befindet sich der Schwerpunkt G auf dieser Normale in einem Abstand η von der Direktrix, den man berechnet (vgl. § 772, b), indem man schreibt $2\pi\eta\cdot 2s = 2\pi ab$. Es ist also $\eta = \frac{ab}{2s} = \frac{1}{2}b\cot\varphi$, d. h. G halbiert den Abschnitt, welchen die äußersten Normalen auf der Scheitelnormale, von der Direktrix aus gerechnet, bestimmen. Dagegen ist für G', den Schwerpunkt der von demselben Bogen, der Direktrix und den äußersten Ordinaten eingeschlossenen Fläche, η durch die Formel gegeben $2\pi\eta \cdot 2as = \pi a^2 b$. Also ist $\eta = \frac{1}{4} b \cot\varphi$, d. h. G' ist der Mittelpunkt von OG.

b) Der Schwerpunkt eines vollständigen Bogens der Cykloide liegt auf der Normale im Scheitel, in einer Entfernung

$$\eta = \frac{1}{4a}\int y\,ds = \frac{1}{2\sqrt{2a}}\int_0^{2a}\sqrt{y}\,dy = \frac{2}{3}a$$

von demselben. Also ist (vgl. § 772, c) die Oberfläche, welche der Bogen beim Rotieren um die Basis erzeugt, $\frac{4}{3}\pi a \cdot 8a = \frac{32}{3}\pi a^2$. Den umgekehrten Weg verfolgend sieht man, wenn man weiß, daß das Volumen, welches die zwischen dem genannten Bogen und der Basis enthaltene Fläche erzeugt, gleich $5\pi^2 a^3$ ist, folgendes: Der Schwerpunkt der genannten Fläche, der offenbar auf der Normale im Scheitel liegt, hat einen Abstand η von der Basis, den man sofort berechnet, indem man $5\pi^2 a^3$ gleich dem Produkt von $2\pi\eta$ mit $3\pi a^2$ setzt. Man erhält auf diese Weise $\eta = \frac{5}{6}a$.

c) Auf einem Kreise vom Radius a betrachte man einen Bogen LM; r, θ seien die Koordinaten des Schwerpunkts G von LM in Bezug auf den Pol O, den Mittelpunkt des Kreises, und die Achse OL. Nach einer in § 773 gemachten Bemerkung wissen wir, daß G auf der Halbierenden des Winkels LOM liegt. Ferner liefert die Definition des Schwerpunkts

$$2a\theta \cdot r = 2\int_0^{\theta} a\cos\varphi \cdot a\,d\varphi = 2a^2\sin\theta, \quad \text{d. h.} \quad r = a\frac{\sin\theta}{\theta}\,.$$

Also ist (§ 589, h) der Ort der Schwerpunkte aller Bogen eines Kreises, die einen gemeinsamen Endpunkt L haben, eine Kochleoide, deren Scheitel in L liegt, während ihr Pol der Mittelpunkt des Kreises ist. Wegen dieser Eigenschaft wird die Kochleoide bei den Zeichnungen für Gewölbekonstruktionen benutzt[1]). Wenn man auf die Art und Weise achtet, wie sich G verschiebt, wenn M den Kreis wiederholt, und zwar immer in demselben Sinne, durchläuft, so kann man sich leicht von der Gestalt und von den Eigenschaften der Kochleoide Rechenschaft geben. Will man ferner den Schwerpunkt G' des Kreissektors LOM haben, so ist

$$a^2\theta \cdot r = 2\int_0^a\int_0^{\theta} l\cos\varphi \cdot l\,dl\,d\varphi = \frac{2}{3}a^2\sin\theta, \quad \text{d. h.} \quad r = \frac{2}{3}a\frac{\sin\theta}{\theta};$$

mithin teilt G' die Strecke OG im Verhältnis von 2 zu 1.

d) Um rasch den Schwerpunkt eines Halbkreises vom Radius a

1) Siehe z. B. den „Cours de Construction“ von N. de Vos (t. I, p. 276).

zu bestimmen, genügt es folgendes zu bemerken. Der Schwerpunkt liegt offenbar auf dem zur Sehne des Halbkreises senkrechten Radius, und zwar in einer solchen Entfernung η vom Mittelpunkt, daß die Multiplikation von $2\pi\eta$ mit πa, der Länge des Halbkreises, die Oberfläche $4\pi a^2$ der Kugel vom Radius a hervorbringen muß. Also ist $\eta = 2a/\pi$. Ähnlich erhält man für die Fläche des Halbkreises, indem man das Volumen $\frac{4}{3}\pi a^3$ gleich dem Produkt aus $2\pi\eta$ und $\frac{1}{2}\pi a^2$, dem Inhalt des Halbkreises, setzt, sofort $\eta = 4a/3\pi$. Allgemeiner findet man in derselben Weise die Resultate des vorigen Beispiels wieder, wenn man sich aus der Elementargeometrie daran erinnert, das die Fläche der Kalotte und das Volumen des sphärischen Sektors, die von dem Bogen LM und von dem Sektor LOM bei der Rotation um OL erzeugt werden, $2\pi ah$ und $\frac{2}{3}\pi a^2 h$ sind, wo h die Höhe $a(1-\cos 2\theta)$ bedeutet.

e) Die Oberfläche des Torus (vgl. § 772, e), der durch den Radius a des erzeugenden Kreises und den Abstand b ($> a$) des Kreismittelpunkts von der Rotationsachse definiert ist, hat den Wert $2\pi a \cdot 2\pi b = 4\pi^2 ab$; das Volumen ist $\pi a^2 \cdot 2\pi b = 2\pi^2 a^2 b$. Allgemeiner sind die Seitenfläche und das Volumen eines Tubus (§ 678, b), zwischen zwei beliebigen zur Mittelpunktskurve senkrechten Ebenen, $2\pi al$ und $\pi a^2 l$, wenn man mit l die Länge desjenigen Bogens dieser Kurve bezeichnet, der durch die genannten Ebenen begrenzt wird. Noch allgemeiner sind die Seitenfläche und das Volumen eines ursprünglich zylindrischen Barrens, den man (durch Änderung der Flexion und Torsion der Schwerpunktlinie) derart deformiert, daß die Fläche des Querschnittes erhalten bleibt, unveränderlich bei allen Formen, die der Barren annimmt, bis er z. B. durch Vereinigung der Basen ein Ring wird.

f) Betrachten wir schließlich eine Klothoide, die interessante Kurve, welche man erdacht hat, um die Erscheinungen der Diffraktion zu diskutieren[1]). Die Koordinaten eines beliebigen Punktes dieser Kurve sind die Fresnelschen Integrale

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^{\varphi} \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\varphi}}\, d\varphi, \quad y = \frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^{\varphi} \frac{\sin\varphi}{\sqrt{\varphi}}\, d\varphi,$$

die man nicht in endlicher Form auszudrücken weiß, deren Werte für unendliches φ wir aber bereits kennen (§ 764, f): $x = y = c = \frac{1}{2} a\sqrt{\pi}$. Man sieht sofort, daß $dy/dx = \operatorname{tg}\varphi$ ist, sodaß φ die Neigung der Tangente gegen die x-Achse angibt. Wenn daher φ von Null nach Unendlich wächst, so geht die Kurve vom Anfangspunkt tangential zu der genannten Achse aus, um sich dann asymptotisch um den Punkt (c, c) herumzuwickeln, während ihre Krümmung proportional zum Bogen wächst:

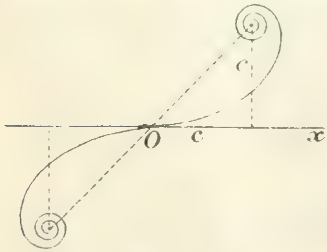

Fig. 96.

1) Cornu „Journal de Physique" (1874, p. 9).

$$s = \int_0^\varphi \frac{a\,d\varphi}{\sqrt{2\varphi}} = a\sqrt{2\varphi}, \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{s}{a^2}.$$

Die Gestalt der Kurve zeigt deutlich, daß x und y nach c konvergieren, indem sie unaufhörlich um diesen Wert oszillieren. Um aber die Lage der Klothoidenpunkte in Bezug auf den asymptotischen Punkt Q zu kennen, ist es unumgänglich nötig die Fresnelschen Integrale näherungsweise zu berechnen[1]). So sind z. B., wenn man den Bogen OQ in unendlich viele Bogen OP_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, ... teilt, die alle gleich $2c$ sind, die Koordinaten der Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, ..., falls man c als Einheit nimmt,

$$x = 1{,}560\ldots,\quad 0{,}977\ldots,\quad 1{,}212\ldots,\quad 0{,}997\ldots$$

$$y = 0{,}875\ldots,\quad 0{,}686\ldots,\quad 0{,}991\ldots,\quad 0{,}840\ldots.$$

Man bemerke, daß P_1 der am weitesten von der Achse Oy entfernte Punkt ist, daß P_2 auf dem Bogen P_1Q der am nächsten an der Achse Ox liegende Punkt ist, u. s. w. Wir wollen uns jetzt mit der Bestimmung des Schwerpunktes eines beliebigen Bogens OM der Klothoide beschäftigen. Die Koordinaten eines solchen Schwerpunktes sind auf Grund der Definition

$$\xi = \frac{1}{2}\varrho\int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{\theta}}\int_0^\theta \frac{\cos\psi}{\sqrt{\psi}}\,d\psi, \quad \eta = \frac{1}{2}\varrho\int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{\theta}}\int_0^\theta \frac{\sin\psi}{\sqrt{\psi}}\,d\psi.$$

Bezeichnet man mit f das eine oder das andere der Symbole cos, sin, so ergibt sich, wenn man $\psi = t\theta$ setzt und die Integration nach θ ausführt,

$$\frac{1}{2}\varrho\int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{\theta}}\int_0^\theta \frac{f(\psi)}{\sqrt{\psi}}\,d\psi = -\frac{1}{2}\varrho\int_0^\varphi d\theta\int_0^1 \frac{f''(t\theta)}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\varrho\int_0^1 \frac{f'(0) - f'(t\varphi)}{t\sqrt{t}}\,dt.$$

Nimmt man ferner $t\varphi$ als Integrationsvariable an und integriert partiell, so verwandelt sich der letzte Ausdruck in

$$\frac{a}{2\sqrt{2}}\int_0^\varphi \frac{f'(0) - f'(\varphi)}{\varphi\sqrt{\varphi}}\,d\varphi = -a\frac{f'(0) - f'(\varphi)}{\sqrt{2\varphi}} + \frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^\varphi \frac{f(\varphi)}{\sqrt{\varphi}}\,d\varphi.$$

Setzt man endlich an die Stelle von f der Reihe nach cos und sin, so erhält man

$$\xi = x - \varrho\sin\varphi, \quad \eta = y - \varrho(1 - \cos\varphi).$$

Also liegt der Schwerpunkt des Bogens OM auf dem oskulierenden Kreise in M, und zwar am unteren Ende des zur Tangente in O senkrechten

1) Eine Tafel der Werte dieser Integrale findet sich in den „Oeuvres complètes" von Fresnel (t. I, p. 319). Siehe auch eine Abhandlung von Abria über die Diffraktion des Lichtes im „Journal de Liouville" (1849, p. 248). Was die verschiedenen Methoden anbetrifft, die man zur Berechnung der Fresnelschen Integrale erdacht hat, so kann der Leser die „Leçons d'Optique physique" von Verdet (t. I, p. 328) zu Rate ziehen.

Durchmessers. Es seien jetzt G_1 und G_2 die Schwerpunkte der Bogen OM_1 und OM_2, und man beachte, daß nach der am Schluß von § 773 gemachten Bemerkung der Schwerpunkt G des Bogens $M_1 M_2$ in einen Punkt der Geraden $G_1 G_2$ fällt, der durch die Proportion

$$\frac{G_1 G_2}{G_2 G} = \frac{s_2 - s_1}{s_1} \quad \text{oder} \quad \frac{G G_1}{G G_2} = \frac{s_2}{s_1} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$$

definiert wird. Also ist der Schwerpunkt eines beliebigen Klothoidenbogens das direkte Ähnlichkeitszentrum der oskulierenden Kreise in den Endpunkten. Wir wollen schließlich folgende Bemerkung machen: Wenn die Enden eines Bogens Werten von φ entsprechen, die Vielfache von 2π sind, so fällt der Schwerpunkt des Bogens auf die Sehne; und insbesondere fällt, wenn das eine Ende der Anfangspunkt ist, der Schwerpunkt in den andern Endpunkt.

Beliebige Oberflächen und Volumina.

776. Oberflächen. Indem wir uns auf die gewöhnlichen Flächen beschränken, werden wir es als evident zulassen, daß jedes infinitesimale Teilchen der Fläche als in der Tangentialebene liegend betrachtet werden kann. Jedes Element $dx\,dy$ in der Ebene Oxy ist die orthogonale Projektion eines Flächenteilchens, dessen Inhalt man als Element der Oberfläche A annehmen kann. Dieses Element wird also gemessen durch den Quotienten von $dx\,dy$ durch den Kosinus des Winkels, den die Tangentialebene der Fläche mit der Ebene Oxy bildet. Man hat folglich (§ 659)

$$A = \iint \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy. \tag{10}$$

Die Integration erstreckt sich über alle Wertepaare x, y, die zu Punkten desjenigen Flächenstückes gehören, welches man ausmessen will. Die obige Formel enthält die in § 771 als Spezialfall. Im Falle einer Rotationsfläche hat man in der Tat, wenn $\sqrt{x^2 + y^2} = R$, $z = f(R)$ gesetzt wird,

$$p = \frac{x}{R} f'(R), \quad q = \frac{y}{R} f'(R), \quad p^2 + q^2 = f'^2(R).$$

Geht man (in der Ebene Oxy) von den cartesischen zu Polarkoordinaten über, so ergibt sich

$$A = \iint \sqrt{1 + f'^2(R)} \cdot R\, d\theta\, dR = \iint R\, d\theta\, ds = 2\pi \int R\, ds.$$

Wenn man aber ein von einer beliebigen Kurve, die auf der Fläche gezogen ist, umschlossenes Oberflächenstück haben will, so muß man bei $A = \iint R\, d\theta\, ds$ bleiben, und dies kommt darauf hinaus, daß als Element von A der Inhalt desjenigen Flächenteilchens gewählt wird, welches von den Meridianen θ und $\theta + d\theta$ und den Parallelkreisen R und $R + dR$ begrenzt ist. Dieses Flächenteilchen läßt sich in der Tat als ein Rechteck ansehen, dessen Seiten die Bogenelemente ds und $R d\theta$ des Meridians und des Parallelkreises sind.

777. Beispiele. Um ein beliebiges Oberflächenstück der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ zu berechnen, gibt uns (10) die Formel $A = \int\int \frac{a}{z}\, dx\, dy$, in welcher nur noch jedesmal die Integrationsgrenzen festzustellen sind, die von der Begrenzung des betrachteten Oberflächenstückes abhängen. Will man die gesamte Oberfläche der Kugel haben, so erhält man, indem man nur den achten Teil, der in der Region der positiven Koordinaten liegt, berechnet,

$$A = 8a \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = 4\pi a \int_0^a dx = 4\pi a^2.$$

In Wirklichkeit ist im Falle der Kugel die Anwendung der letzten Formel des vorigen Paragraphen vorzuziehen, welche hier wird $A = a^2 \int\int \cos\psi\, d\varphi\, d\psi$. Sie läßt sich auch direkt aus der am Anfang angegebenen Formel ableiten, indem man die Relationen

$$x = a \cos\varphi \cos\psi, \quad y = a \sin\varphi \cos\psi, \quad z = a \sin\psi$$

berücksichtigt, nach welchen man hat

$$A = \int\int \frac{a}{z}\, dx\, dy = \int\int \frac{\partial(x, y)}{\partial(\varphi, \psi)} \frac{d\varphi\, d\psi}{\sin\psi} = a^2 \int\int \cos\psi\, d\varphi\, d\psi;$$

man muß aber darauf achten, es so einzurichten, daß das Element der Integration positiv bleibt. Berechnet man z. B. die Gesamtoberfläche der Kugel, so wird dieser Zweck erreicht, wenn man die Veränderliche ψ auf das Intervall $(0, \frac{1}{2}\pi)$ beschränkt und schreibt

$$A = 2a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos\psi\, d\psi = 2a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi a^2.$$

Wollte man dagegen ψ von 0 bis π variieren lassen, so würde es genügen φ auch nur von 0 bis π variieren zu lassen, und man müßte schreiben

$$A = 2a^2 \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \cos\psi\, d\psi = 4a^2 \int_0^{\pi} d\varphi = 4\pi a^2.$$

b) Wir wollen uns jetzt die Aufgabe stellen, auf derselben Kugel das von der Vivianischen Kurve (§ 767, j) umschlossene Oberflächenstück auszumessen. Diese projiziert sich auf die Ebene Oxy als Kreis, $y^2 = x(a - x)$, und ist symmetrisch in Bezug auf die Ebene Oxz; mithin wird

$$A = 2a\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{x(a-x)}} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = 2a\int_0^a \arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\,dx\,.$$

Bezeichnet man mit θ den Arcus, der in dem letzten Integral auftritt, so hat man $x = a\,\mathrm{tg}^2\,\theta$, und die partielle Integration liefert (§ 723, d)

$$\int \theta\,dx = \theta x - a\int \mathrm{tg}^2\,\theta\,d\theta = \frac{a}{\cos^2\theta}(\theta - \sin\theta\cos\theta)\,.$$

Da θ von 0 bis $\frac{1}{4}\pi$ variiert, wenn x von 0 bis a geht, so sieht man also, daß $A = (\pi - 2)a^2$ ist. Sehr viel rascher erledigt sich die Rechnung, wenn man Polarkoordinaten benutzt:

$$A = 2a^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \int_\varphi^{\frac{1}{2}\pi} \cos\psi\,d\psi = 2a^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(1 - \sin\varphi)\,d\varphi = (\pi - 2)a^2.$$

c) Wir wollen versuchen die Gesamtoberfläche eines **Ellipsoids** zu berechnen. Aus der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ leitet man ab

$$p = -\frac{c^2x}{a^2z}, \quad q = -\frac{c^2y}{b^2z}, \quad 1 + p^2 + q^2 = \frac{c^2}{z^2}\left(1 - \frac{\varepsilon^2x^2}{a^2} - \frac{\eta^2y^2}{b^2}\right),$$

wo ε und η die Exzentrizitäten der Schnitte bezeichnen, die auf dem Ellipsoid durch die Ebenen Oxz, Oyz hervorgebracht werden. Die Formel (10) gibt uns

$$A = 8\iint \sqrt{\frac{1 - \frac{\varepsilon^2x^2}{a^2} - \frac{\eta^2y^2}{b^2}}{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}\,dx\,dy,$$

wo sich die Integration über alle Paare positiver Werte x, y erstreckt, die der Relation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1$ genügen. Wenn man mit t das der Integration unterworfene Radikal bezeichnet, so findet man leicht

$$(t^2 - \varepsilon^2)\frac{x^2}{a^2} + (t^2 - \eta^2)\frac{y^2}{b^2} = t^2 - 1$$

und wird dazu geführt zu setzen

$$\frac{x}{a} = \sqrt{\frac{t^2 - 1}{t^2 - \varepsilon^2}}\cos\theta\,, \quad \frac{y}{b} = \sqrt{\frac{t^2 - 1}{t^2 - \eta^2}}\sin\theta\,,$$

wo θ von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ und t von 1 bis ∞ variieren kann. Wählt man t und θ als Integrationsvariable, so verwandelt sich das obige Integral in (§ 737)

$$\int_1^\infty\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(t, \theta)}\right| t\,dt\,d\theta\,.$$

Inzwischen findet man, wenn man mit $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ die Werte der Radikale bezeichnet, die in den Ausdrücken von x und von y auftreten,

$$\frac{\partial x}{\partial t} = a\varphi'(t)\cos\theta, \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = b\psi'(t)\sin\theta,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -a\varphi(t)\sin\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = b\psi(t)\cos\theta.$$

Also wird

$$A = 8ab\int_1^\infty\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\{\varphi'(t)\psi(t)\cos^2\theta + \varphi(t)\psi'(t)\sin^2\theta\}\,t\,dt\,d\theta,$$

wenn man beachtet, daß die Funktionen φ und ψ wachsend sind und daher positive Derivierte haben. Da nun das Integral von $\cos^2\theta\,d\theta$ und $\sin^2\theta\,d\theta$ zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ gleich $\frac{1}{4}\pi$ ist (§ 725, e), so hat man

$$A = 2\pi ab\int_1^\infty\{\varphi'(t)\psi(t) + \varphi(t)\psi'(t)\}\,t\,dt$$

oder endlich

$$A = 2\pi ab\left\{\int_1^\infty\frac{(1-\varepsilon^2)\,t^2\,dt}{(t^2-\varepsilon^2)\sqrt{(t^2-\varepsilon^2)(t^2-\eta^2)}} + \int_1^\infty\frac{(1-\eta^2)\,t^2\,dt}{(t^2-\eta^2)\sqrt{(t^2-\varepsilon^2)(t^2-\eta^2)}}\right\}.$$

Weiter können wir in dem allgemeinen Falle nicht gehen, da wir hier elliptische Integrale vor uns haben. Aber für $\varepsilon = \eta$ und für $\eta = 0$ würden wir zu den Formeln zurückgelangen (§ 772, d), die sich auf das abgeplattete bezw. das gestreckte Sphäroid beziehen. Endlich liefert, wenn das Ellipsoid nur schwach exzentrisch ist, die Reihenentwickelung

$$A = 4\pi ab\{1 - \tfrac{1}{6}(\varepsilon^2 + \eta^2) + \cdots\},$$

und da $c^2 = ab\{1 - \frac{1}{2}(\varepsilon^2 + \eta^2) + \cdots\}$ ist, so hat man[1]) näherungsweise

$$A = 4\pi ab\left(\frac{c^2}{ab}\right)^{\frac{1}{3}} = 4\pi\left(\sqrt[3]{abc}\right)^2.$$

d) Um mit genügender Annäherung die Oberfläche eines Ellipsoids zu berechnen, muß man sich der Legendreschen Tafeln (mit doppeltem Eingang) bedienen, und hierzu ist es notwendig den oben angegebenen Ausdruck von A auf eine Kombination der typischen Formen F und E zu reduzieren. Setzt man $\varepsilon = \sin\alpha$, $\eta = k\sin\alpha$, sodaß

$$k = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}} < 1, \quad \alpha = \text{arc}\cos\frac{c}{a}$$

ist, so transformiert die Substitution $t = \varepsilon/\sin\varphi$ den genannten Ausdruck in den folgenden:

1) Wegen der angenäherten Auswertung der Oberfläche des Ellipsoids siehe den „Calcul intégral“ von Boussinesq, p. 78*, und eine Note von Peano in den „Rendiconti dei Lincei“ (1890, p. 317).

$$A = \frac{2\pi a b}{\sin\alpha}\left\{\cos^2\alpha \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \right.$$
$$\left. + (1-k^2\sin^2\alpha)\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right\}.$$

Wir kennen bereits (§ 767, h) den Wert des ersten Integrals

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F(k,\varphi) - \frac{E(k,\varphi) - \operatorname{tg}\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1-k^2}.$$

Die partielle Integration liefert als Wert desselben Integrals

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} + F(k,\varphi) - \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

woraus wir entnehmen

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{E(k,\varphi)}{1-k^2} - \frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{(1-k^2)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Also ist

$$A = \frac{2\pi a b}{\sin\alpha}\left\{\cos^2\alpha\cdot F(k,\alpha) + \sin^2\alpha\cdot E(k,\alpha) + \sin\alpha\cos\alpha\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}\right\}.$$

Ersetzt man endlich k und α durch ihre Ausdrücke als Funktionen von a, b, c, so gelangt man zu der Formel von Legendre:

$$A = 2\pi c^2 + \frac{2\pi b}{\sqrt{a^2-c^2}}\left\{c^2 F\left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}, \arccos\frac{c}{a}\right)\right.$$
$$\left. + (a^2-c^2)\,E\left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}, \arccos\frac{c}{a}\right)\right\}.$$

Wir schlagen hier dem Leser zur Übung vor zu beweisen, daß, wenn $a^2 = b^2 + c^2$, die Oberfläche durch $\pi a^2 + \pi b^2 E + \pi c^2 F$ gemessen wird, wo E und F die vollständigen Integrale sind, die zu dem Modul $\sqrt{1-\left(\frac{c}{b}\right)^4}$ gehören. So findet man z. B., wenn $a^2 : b^2 : c^2 = 3 : 2 : 1$ ist, $A = \pi a^2 \cdot 2{,}52620923 \cdots$.

e) Die Formel (10) kann benutzt werden, um zu beweisen[1], daß bei den Flächen etwas Ähnliches gilt wie bei den ebenen Kurven (§ 591). Wenn man nämlich auf einer Fläche um einen Punkt M herum ein infinitesimales Stück ς abgrenzt, so ist die totale Krümmung K in M der Grenzwert des Verhältnisses des körperlichen Winkels ω, der zwischen den längs der Begrenzung von ς auf der Fläche errichteten Normalen enthalten ist, zu der Fläche A von ς, für den Fall, daß ς die Tendenz hat,

1) Siehe auch meine „Natürliche Geometrie“, S. 214.

auf den einen Punkt M zusammenzuschrumpfen. Die als stetig vorausgesetzte Krümmung möge, um einen bestimmten Fall zu betrachten, in M positiv sein; und man wähle ς so klein, daß in jedem seiner Punkte $K > 0$ ist. Die Veränderlichen x und y in der Formel (10) können wir durch p und q ersetzen, die voneinander unabhängig sind, weil (§§ 579, 691)

$$\frac{\partial(p, q)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} r & s \\ s & t \end{vmatrix} = (1 + p^2 + q^2)^2 K > 0$$

ist. Dies vorausgeschickt liefert (§ 737) die Formel (10)

$$A = \int\!\!\int \frac{dp\,dq}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}} K} = \frac{1}{\varkappa} \int\!\!\int \frac{dp\,dq}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

wenn man mit $\varkappa$ einen Wert bezeichnet, der zwischen den Werten von K in ς liegt. Andererseits konstruiere man einen Kegel, dessen Erzeugende parallel zu den längs der Begrenzung von ς auf der Fläche errichteten Normalen sind. Auf Grund der Definition wird der körperliche Winkel, der zwischen diesen Normalen enthalten ist, gemessen durch die Fläche ω, welche der genannte Kegel auf der Kugel vom Radius 1 abgrenzt, deren Mittelpunkt im Scheitel liegt; und da die Krümmung dieser Kugel überall gleich 1 ist, so gibt die vorige Formel

$$\omega = \int\!\!\int \frac{dp\,dq}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

mit demselben Integrationsgebiet. Daraus folgt $A = \omega\,\varkappa$. Wenn also alle Punkte von ς nach M hinstreben, so wird in M

$$K = \lim \varkappa = \lim \frac{\omega}{A}.$$

778. Volumina. Handelt es sich darum, das Volumen V des Körpers zu berechnen, welcher zwischen einem Oberflächenstück, dem Zylinder, der die Begrenzung desselben auf die Ebene Oxy senkrecht projiziert, und dieser Ebene selbst liegt, so kann man (vgl. § 768) als Element von V das analoge Volumen annehmen, welches zu einem Element der Oberfläche gehört. Dieses Volumen wird gemessen durch das Produkt der Basis $dx\,dy$ und der Höhe z. Also hat man

$$V = \int\!\!\int z\,dx\,dy, \tag{11}$$

wo z eine Funktion von x, y ist, die durch die Gleichung der Fläche gegeben ist. Allgemeiner kann man einen beliebigen Körper in infinitesimale Elemente dritter Ordnung $dx\,dy\,dz$ zerlegen und auf die Definition des vielfachen Integrals sich stützend schreiben

$$V = \int\!\!\int\!\!\int dx\,dy\,dz. \tag{12}$$

Dabei sind die successiven Integrationen zwischen passenden Grenzen auszuführen, die in jedem Falle je nach der Gestalt des Körpers zu bestimmen sind. Wenn der Körper z. B. die am Anfang beschriebene Form hat, so kann man immer zunächst bei festgehaltenen x, y die Integration von dz ausführen, wodurch sich der Wert von z auf der Fläche ergibt, sodaß man zu (11) zurückgelangt. Es kann auch vorkommen, daß man bei Festhaltung von z das Resultat $\sigma(z)$ der Integration von $dx\,dy$ kennt, d. h. daß man die Fläche des ebenen Schnittes kennt, der im Abstand z von der Ebene Oxy durch den Körper gelegt ist. In diesem Falle reduziert sich die Bestimmung von V auf eine einfache Integration:

$$(13) \qquad V = \int \sigma(z)\,dz.$$

Dies kommt darauf hinaus, V in infinitesimale Elemente erster Ordnung zu zerlegen, indem man $\sigma(z)\,dz$ als das Volumen der Scheibe betrachtet, welche die Ebenen z und $z + dz$ aus dem Körper herausschneiden. So machten wir es bereits in dem speziellen Falle der Rotationsflächen, bei denen $\sigma(z) = \pi R^2$ ist. Unendlich viele andere Zerlegungen von V in infinitesimale Elemente dritter Ordnung lassen sich ausdenken. Bemerkenswert ist diejenige (§ 739, b), welche aus der Anwendung der Polarkoordinaten entsteht. Die durch die Radien r und $r + dr$ definierten Kugeln, die den Werten φ und $\varphi + d\varphi$ der Länge entsprechenden Ebenen und die durch die Werte ψ und $\psi + d\psi$ der Breite bestimmten Kegel begrenzen einen infinitesimalen Körper, der sich von dem rechtwinkligen Parallelepipedon mit den Seiten dr, $r\,|\cos\psi|\,d\varphi$, $r\,d\psi$ nur um höhere Infinitesimalen unterscheidet. Man gelangt so zu der Formel

$$(14) \qquad V = \iiint r^2\,|\cos\psi|\,dr\,d\varphi\,d\psi,$$

welche man auch aus (12) auf analytischem Wege ableiten kann (§ 737).

779. Zu einer andern Zerlegung in Elemente zweiter Ordnung (vgl. § 769) gelangt man, wenn das Volumen V des Körpers berechnet werden soll, der zwischen einem Flächenstück und dem Kegel, welcher die Begrenzung desselben von einem Punkte aus projiziert, enthalten ist. Wird der Anfangspunkt nach dem Projektionszentrum verlegt, so ist es natürlich, als Element von V das Volumen desjenigen Kegels mit der Spitze im Anfangspunkt zu wählen, dessen Basis (§ 776) das Oberflächenelement $\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy$ ist. Da das Volumen dieses Kegels gleich ist dem dritten Teil des Produktes aus der Basis und der Höhe (dem Abstand des Anfangspunktes von der Tangentialebene), so hat man

$$(15) \qquad V = \tfrac{1}{3}\iint (z - px - qy)\,dx\,dy,$$

wobei man, wenn es nötig ist, das Zeichen des Elements umzukehren hat. Ist z. B. zu berechnen das Volumen zwischen einer Rotationsfläche und den Kegeln, die zwei ihrer Parallelkreise von einem Punkte der Rotationsachse aus projizieren, so findet man (§ 776) die Formel $V = \frac{2}{3}\pi \int R(Rdz - zdR)$. Dieselbe nimmt in Polarkoordinaten, wenn man die Polarachse längs der Rotationsachse richtet, die ganz einfache Form an $V = \frac{2}{3}\pi \int r^3 d\cos\theta$, die man auch aus (14) ableiten kann. Übrigens unterscheidet sich die letzte Formel nicht wesentlich von der in § 771 angegebenen Formel und reduziert sich auf diese, wenn man auf beiden Seiten das Volumen des Kegels addiert, der als Basis den variablen Parallelkreis vom Radius R und als Scheitel den Pol hat:

$$\frac{1}{3}\pi R^2 z = \frac{1}{3}\pi \int R(Rdz + 2zdR),$$

$$V + \frac{1}{3}\pi R^2 z = \pi \int R^2 dz.$$

780. Beispiele. a) Das Gesamtvolumen des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ist

$$V = 8\int\int z\,dx\,dy = 8c\int\int \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy,$$

d. h. wenn man die Grenzen der successiven Integrationen einträgt,

$$V = 8c\int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dy.$$

Für $y = \frac{b}{a}t\sqrt{a^2 - x^2}$ verwandelt sich das Integral rechts in

$$b\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\int_0^1 \sqrt{1 - t^2}\,dt = \frac{1}{4}\pi b\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Also wird

$$V = 2\pi bc\int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Zu diesem Resultat gelangt man rascher mit Hilfe der Formel (15):

$$V = \frac{8}{3}c\int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} = \frac{4}{3}\pi bc\int_0^a dx = \frac{4}{3}\pi abc.$$

In der einen oder der andern Weise oder auch (vgl. § 770, j), indem man zuerst $\sigma(z)$ berechnet, um dann Formel (13) anzuwenden, findet man allgemeiner für jede positive Zahl n, die der Quotient einer geraden Zahl durch eine ungerade ist, daß das Volumen des von der Fläche

$$\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = 1$$

begrenzten Körpers folgenden Wert hat:

$$V = 2\int_0^c \sigma(z)\,dz = \frac{4abc}{n^2}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}\int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}(1-t)^{\frac{2}{n}}\,dt = \frac{8abc}{3n^2}\frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}.$$

Insbesondere ist das von der körperlichen Astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ umschlossene Volumen $\frac{4\pi}{35}a^3$, d. h. wenig größer als der zwölfte Teil des Volumens der umbeschriebenen Kugel.

b) Bei einem Ellipsoid, welches durch die Gleichung

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 1$$

gegeben ist, ist die Anwendung der Formel (13) zweckmäßig; denn der ebene Schnitt, der parallel zur Ebene Oxy im Abstande z ausgeführt ist, wird durch eine Gleichung von der Form

$$a'x^2 + b'y^2 + c' + 2f'y + 2g'x + 2h'xy = 0$$

dargestellt und hat, wie wir wissen (§ 770, h), den Flächeninhalt $\sigma(z) = -\pi D'/(a'b' - h'^2)^{\frac{3}{2}}$. Nun ergibt sich bei festgehaltenem z durch Vergleichung der Gleichung der Kurve mit derjenigen der Fläche

$$a' = a,\quad b' = b,\quad h' = h,\quad f' = fz,\quad g' = gz,\quad c' = cz^2 - 1;$$

mithin ist

$$D' = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c - \frac{1}{z^2} \end{vmatrix} z^2 = z^2 D - (ab - h^2)$$

und folglich

$$\sigma(z) = \frac{\pi}{\sqrt{ab - h^2}}\left(1 - \frac{z^2 D}{ab - h^2}\right),\quad \int_0^z \sigma(z)\,dz = \frac{2\pi z}{3\sqrt{ab - h^2}} + \frac{1}{3}z\sigma(z).$$

Die Integrationsgrenzen für V sind offenbar die Wurzeln von $\sigma(z)$, d. h. $\pm\sqrt{\frac{ab - h^2}{D}}$. Also ist $V = 4\pi/3\sqrt{D}$.

c) Wir stellen uns die Aufgabe, das zwei Kreiszylindern gemeinsame Volumen zu berechnen, für den Fall, daß die Achsen der Zylinder sich rechtwinklig schneiden. Es sei a der Radius des größeren, ka der Radius des kleineren Zylinders. Man wähle als Achsen der y und der z die Achsen der beiden Zylinder, sodaß diese die Gleichungen haben $x^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = k^2a^2$. Das gesuchte Volumen ist

$$V = 8\int_0^{ka}\int_0^{\sqrt{k^2a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2}\,dx\,dy = 8\int_0^{ka}\sqrt{(a^2-x^2)(k^2a^2-x^2)}\,dx$$

oder, wenn man $x = ka\sin\varphi$ setzt,

$$V = 8k^2a^3\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\cdot\cos^2\varphi\,d\varphi\,.$$

Die partielle Integration liefert

$$\int\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\cdot\cos^2\varphi\,d\varphi =$$

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\cdot\cos\varphi\sin\varphi + \int\left(\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} + \frac{k^2\cos^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right)\sin^2\varphi\,d\varphi.$$

Der der letzten Integration unterworfene Ausdruck transformiert sich leicht in

$$-2\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\cdot\cos^2\varphi + \frac{1+k^2}{k^2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} - \frac{1-k^2}{k^2\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,.$$

Also ist

$$3k^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\cdot\cos^2\varphi\,d\varphi =$$

$$(1+k^2)\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi - (1-k^2)\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

und endlich

$$V = \tfrac{8}{3}a^3\{(1+k^2)E(k) - (1-k^2)F(k)\}.$$

Insbesondere ist, wenn die beiden Zylinder gleich sind, $V = \frac{2}{3}(2a)^3$. Im allgemeinen Falle hat man (§§ 756, 757)

$$V = 2\pi k^2a^3\left(1 - \frac{k^2}{8} - \frac{7k^4}{48} - \cdots\right).$$

Wenn also k nach Null konvergiert, so wird V (wie zu erwarten war) immer genauer gemessen durch das Produkt des Schnittes πk^2a^2 des kleinen Zylinders mit der Länge $2a$ der von dem andern Zylinder auf seiner Achse bestimmten Strecke. Dagegen ist für sehr nahe an 1 liegendes k das Volumen näherungsweise gleich $\frac{2}{3}k(2a)^3$.

d) Es seien zwei Geraden gegeben, die zueinander senkrecht sind und sich nicht treffen, und man betrachte eine konstante gerade Strecke, die sich bewegt, indem sie sich mit ihren Endpunkten auf die beiden Geraden stützt. Man bezeichne mit $2a$ den Abstand zwischen diesen Geraden und mit α die (konstante) Neigung der beweglichen Strecke gegen das gemeinsame Lot der festen Geraden, sodaß $2a/\cos\alpha$ die Länge der genannten Strecke ist. Man wähle den Anfangspunkt auf dem gemeinsamen Lot, gleich weit von den festen Geraden entfernt, und richte die Achsen der x

und der y parallel zu diesen Geraden. Wählt man die Achsen in dieser Weise, so wird die Gleichung der von der Strecke erzeugten Fläche

$$\frac{x^2}{(a-z)^2} + \frac{y^2}{(a+z)^2} = \operatorname{tg}^2 \alpha .$$

Folglich ist jeder Schnitt, der auf der Fläche durch eine zur z-Achse senkrechte Ebene hervorgebracht wird, eine Ellipse, die für $z = 0$ ein Kreis ist und für $z = \pm a$ sich in eine gerade Strecke zu verwandeln strebt, die auf der einen oder auf der andern der festen Geraden liegt; die Endpunkte der beiden Strecken sind singuläre Punkte der Fläche. Fixiert man für z einen Wert zwischen $-a$ und a, so hat die zugehörige Ellipse die Halbachsen $(a-z) \operatorname{tg} \alpha$ und $(a+z) \operatorname{tg} \alpha$; und da die Summe derselben konstant ist, so folgt (§ 626, c), daß die Enveloppe der Projektionen aller analogen Ellipsen auf die Ebene Oxy eine Astroide ist. Mit andern Worten, die von der beweglichen Strecke erzeugte Fläche ist ganz eingeschlossen in einen Zylinder von der Höhe $2a$, der als geraden Schnitt eine Astroide hat; und die vier Bogenstücke, längs welchen sie die Seitenfläche des Zylinders berührt, bilden zusammen mit den geraden Strecken auf den festen Geraden eine Art Tetraeder, eine schematische Form des erzeugten Körpers. Da die Fläche der Ellipse (§ 770, g), die einem Werte von z entspricht, $\sigma(z) = \pi(a^2 - z^2) \operatorname{tg}^2 \alpha$ ist, so findet man sofort als Wert des Volumens des genannten Körpers

$$V = 2\pi \operatorname{tg}^2 \alpha \int_0^a (a^2 - z^2)\, dz = \tfrac{4}{3}\pi a^3 \operatorname{tg}^2 \alpha ,$$

d. h. 4/9 des Zylindervolumens, da dieses Volumen, welches durch das Produkt der Höhe $2a$ mit der Fläche (§ 770, j) des geraden Schnittes $\frac{3}{8}\pi(2a \operatorname{tg} \alpha)^2$ gemessen wird, $3\pi a^3 \operatorname{tg}^2 \alpha$ ist.

e) Betrachten wir den Ort aller Punkte, für welche die Summe der reziproken Werte ihrer Abstände von den Seitenflächen eines regulären Tetraeders Null ist. Es seien Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 die Ecken des Tetraeders und q_i der Abstand zwischen einem beliebigen Punkte und der der Ecke Q_i gegenüberliegenden Seitenebene. Dieser Abstand wird als positiv oder negativ vorausgesetzt, je nachdem der Punkt auf derselben Seite der Ebene liegt wie das Tetraeder oder auf der entgegengesetzten. Die Gleichung der Fläche ist

$$(16) \qquad \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} = 0 ;$$

aber keine der in den vorigen Paragraphen bewiesenen Formeln ist direkt auf diese Art von Koordinaten anwendbar. Es empfiehlt sich daher zu den cartesischen Koordinaten überzugehen, und es ist nützlich als Achsen der x, y, z die Geraden zu wählen, welche die Mittelpunkte von Q_0Q_1, Q_0Q_2, Q_0Q_3 bezüglich mit den Mittelpunkten von Q_2Q_3, Q_3Q_1, Q_1Q_2 verbinden. Bezeichnet man mit $2a$ den Abstand von zwei entgegengesetzten Seiten, so ist leicht zu sehen, daß die Koordinaten von Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 bezüglich $(-a, \; a, \; a)$, $(-a, a, a)$, $(a, -a, a)$, $(a, a, -a)$ sind, und daß man folglich hat

$$q_0\sqrt{3} = -x - y - z + a, \quad q_2\sqrt{3} = x - y + z + a,$$
$$q_1\sqrt{3} = -x + y + z + a, \quad q_3\sqrt{3} = x + y - z + a.$$

Die Gleichung (16) transformiert sich jetzt in

$$(17) \qquad xyz + \tfrac{1}{2}a(x^2 + y^2 + z^2 - a^2) = 0.$$

Wir haben hier also eine Fläche dritten Grades vor uns. Sie besitzt vier Doppelpunkte in den Ecken des Tetraeders, hat die allgemeine Form eines sozusagen aufgeblähten Tetraeders, wird längs der Kanten von den Seitenflächen des dem Tetraeder umbeschriebenen Würfels berührt und längs sechs Parabeln von den Diagonalebenen des Würfels geschnitten. Der ebene Schnitt, der im Abstand z von der Ebene Oxy ausgeführt ist, ist die durch die Gleichung $x^2 + y^2 + \frac{2z}{a}xy = a^2 - z^2$ dargestellte Ellipse, d. h. eine Ellipse, deren Achsen parallel zu den Seiten Q_0Q_3 und Q_1Q_2 sind und deren Scheitel auf zweien der sechs Parabeln liegen. Die Längen der Halbachsen sind $\sqrt{a(a-z)}$ und $\sqrt{a(a+z)}$, und aus dem Umstand, daß die Summe ihrer Quadrate konstant ist, kann man (§ 626, c) ableiten, daß beim Variieren von z die Ellipse, indem sie sich verschiebt und deformiert, tangential zu vier Seitenflächen des Würfels bleibt: die Berührungspunkte durchlaufen vier Kanten des Tetraeders. Es genügt jetzt, um zu unserer Frage zu kommen, zu bemerken, daß der Inhalt der Ellipse $\sigma(z) = \pi a\sqrt{a^2 - z^2}$ ist, um unter Anwendung der Formel (13) zu erhalten

$$V = 2\pi a\int_0^a \sqrt{a^2 - z^2}\,dz = \tfrac{1}{2}\pi^2 a^3 = a^3 \cdot 4{,}9348022\ldots.$$

Dies ist das Gesamtvolumen, welches offenbar zwischen dem Volumen $\frac{8}{3}a^3$ des einbeschriebenen Tetraeders und dem Volumen $8a^3$ des umbeschriebenen Würfels enthalten ist. Wir wollen schließlich bemerken, daß die Gleichung (17) sich auch auf die Form bringen läßt

$$(18) \qquad \arcsin\frac{x}{a} + \arcsin\frac{y}{a} + \arcsin\frac{z}{a} = \frac{1}{2}\pi,$$

sodaß x, y, z, a die Seiten eines einem Kreise vom Durchmesser a einbeschriebenen Vierecks darstellen.

f) Wir fordern den Leser auf, allgemeiner die Flächen zu studieren, welche durch die Gleichung (18) mit einer beliebigen Konstanten auf der rechten Seite dargestellt werden. Wir beschränken uns hier darauf diejenige von diesen Flächen zu betrachten, welche dem Wert π der Konstanten entspricht und folglich der Ort der Punkte ist, dessen Abstände von den Ebenen eines orthogonalen Tripels gleich den Seiten eines einem Kreise vom Durchmesser a einbeschriebenen Dreiecks sind. Die Gleichung dieser Fläche in algebraischer Form ist

$$x^2y^2z^2 + \tfrac{1}{4}a^2(x^4 + y^4 + z^4 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 - 2x^2y^2) = 0.$$

In der Umgebung des Anfangspunktes, wo das Glied sechsten Grades gegenüber denen vom vierten Grade zu vernachlässigen ist, verhält sich die Fläche so wie das Ebenenquadrupel

$$-x^4 - y^4 - \cdots + 2x^2y^2 = (x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z) = 0,$$

dessen Ebenen sich in drei orthogonalen Geradenpaaren schneiden, die auf der Fläche liegen. Diese hat also einen vierfachen Punkt im Anfangspunkt und sechs Doppelgeraden. Ganz eingeschlossen in einen Würfel von der Kante $2a$, dessen Seitenflächen sie längs der ihnen einbeschriebenen Kreise berühren, begrenzt die Fläche einen Körper, der die allgemeine Form eines an den Ecken und Kanten abgerundeten Würfels hat, mit Seitenflächen, welche bis zum Mittelpunkt trichterförmig ausgehöhlt sind. Um das Volumen eines solchen Körpers zu berechnen, werden wir zunächst den Inhalt des Schnittes berechnen, der durch eine Parallelebene zu einer Seitenfläche des Würfels hervorgebracht wird. Dieser Schnitt besteht, wie wir sehen werden, aus zwei gleichen Ellipsen mit gemeinsamen Achsen. Diese Ellipsen fallen in einen Kreis zusammen, wenn die Ebene eine Seitenfläche des Würfels wird, und reduzieren sich auf eines der drei orthogonalen Paare gerader Strecken, die der Fläche angehören, wenn die Ebene durch den Mittelpunkt des Würfels hindurchgeht. Es genügt, der Gleichung der Fläche die Form

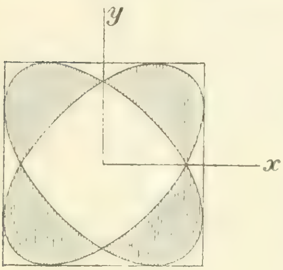

Fig. 97.

$$(x^2 + y^2 - z^2)^2 = 4x^2y^2\left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right)$$

zu geben, um die Gleichungen der beiden Ellipsen zu trennen, die sich in Polarkoordinaten, nachdem man $z = a \cos \varphi$ gesetzt hat, folgendermaßen schreiben lassen:

$$r^2 = \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{1 + \sin\varphi \sin 2\theta}, \quad r^2 = \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{1 - \sin\varphi \sin 2\theta}.$$

Daraus folgt bei Anwendung der zweiten Formel (3), daß der Inhalt des senkrecht zur z-Achse in der Entfernung z vom Anfangspunkte ausgeführten Schnittes

$$\sigma(z) = 8a^2 \cos^2 \varphi \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{\sin\varphi \sin 2\theta \, d\theta}{1 - \sin^2\varphi \sin^2 2\theta}$$

ist. Nimmt man als Integrationsvariable $t = \operatorname{tg} \varphi \cos 2\theta$, so wird

$$\sigma(z) = 4a^2 \cos\varphi \int_0^{\operatorname{tg}\varphi} \frac{dt}{1+t^2} = 4a^2 \varphi \cos\varphi.$$

Da nämlich φ von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ variieren muß, so ist sicher $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}\varphi) = \varphi$. Die Formel (13) liefert nunmehr

$$V = 2\int_0^a \sigma(z)\, dz = 8a^3 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \varphi \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi = a^3 \int_0^{\pi} \varphi \sin\varphi \, d\varphi,$$

und endlich ergibt sich durch partielle Integration

$$V = a^3 (\varphi \cos \varphi - \sin \varphi)_\pi^0 = \pi a^3.$$

Dieses Volumen ist kaum 2/9 von dem der kleinsten Kugel, welche die ganze Fläche in sich schließt, einer Kugel, die zu der Fläche offenbar konzentrisch ist und sie in acht Punkten berührt, die Nabelpunkte der Fläche sind. Durch eine analoge Rechnung findet man, daß die Kapazität jedes der Trichter, die oben erwähnt wurden, $\frac{1}{4}\pi a^3$ ist. Somit ist das Volumen des einem Spielwürfel (Knobel) ähnlichen Körpers, der durch Ausfüllung der sechs Trichter entsteht, gleich $\frac{5}{2}\pi a^3$. Man verifiziert leicht, daß das, was bei der materiellen Herstellung des betrachteten Körpers an jeder Ecke des Würfels beseitigt werden muß, ein ganz geringer Bruchteil des Gesamtvolumens des Würfels ist, nämlich 0,00228 . . . .

Differentialgleichungen.

Gleichungen zwischen zwei Veränderlichen.

781. Das Problem der Integration, wie wir es bis jetzt behandelt haben, ist ein ganz spezieller Fall des Problems, welches in der Aufsuchung derjenigen Funktionen von einer oder mehreren Veränderlichen besteht, welche mit den Veränderlichen und den eignen Derivierten durch eine oder mehrere gegebene Relationen verbunden sind. Diese Relationen heißen *Differentialgleichungen*, und die Aufsuchung der unbekannten Funktionen ist auch jetzt noch ein Integrationsproblem. So ist z. B. in dem einfachsten Falle, den wir zunächst behandeln werden, die Differentialgleichung $f(x, y, y', y'', \ldots) = 0$ gegeben, und man stellt sich die Aufgabe, alle Funktionen y zu finden, für welche diese Gleichung identisch erfüllt ist. Solche Gleichungen heißen *gewöhnliche* Differentialgleichungen zum Unterschied von den *partiellen*, in welchen neben zwei oder mehr unabhängigen Veränderlichen die Derivierten der unbekannten Funktionen nach den verschiedenen Veränderlichen auftreten. In allen Fällen nennt man Ordnung der Gleichung die Maximalordnung der gewöhnlichen oder partiellen Derivierten, die in ihr enthalten sind. Wir werden uns fast ausschließlich mit den Gleichungen erster Ordnung beschäftigen.

782. Allgemeines Integral und partikuläre Integrale. Es werde vorausgesetzt, daß die Gleichung $f(x, y, y') = 0$ geeignet ist, y' als stetige Funktion von x und von y zu definieren. Man ziehe durch jeden Punkt (x, y) eine Gerade, deren Richtungskoeffizient gleich y' ist. Denken wir uns einen beweglichen Punkt M, der von einer willkürlichen Lage M_0 ausgehend längs der durch M_0 gezogenen Geraden unendlich wenig fortrückt, bis zu M_1, dann von M_1 längs der durch M_1 gezogenen Geraden bis M_2 u. s. f. in infinitum, so wird offenbar längs der ganzen von M beschriebenen Kurve die vorgelegte Gleichung erfüllt sein. Wählt man außerhalb dieser Kurve einen andern Anfangspunkt, so gelangt man zur Konstruktion einer zweiten analogen Kurve und erhält, wenn man immer von neuen Punkten ausgeht, unendlich viele solche Kurven, die zusammen eine Schar $F(x, y, a) = 0$ bilden. Diese Gleichung, die unendlich viele Funktionen y definiert, welche der vorgelegten Differentialgleichung genügen, heißt das *allgemeine Integral* derselben und schließt unendlich viele *partikuläre Integrale* ein, die den einzelnen Werten der Konstanten a entsprechen. Durch die Differentialgleichung $f(x, y, y') = 0$ werden also nur die Punkte der Ebene zu einer einfachen Unendlichkeit von Kurven zusammengeordnet, es wird aber eigentlich nicht y an x gebunden, weil die in dem allgemeinen Integral auftretende Integrationskonstante für jeden Wert von x auch den Wert von y beliebig festzusetzen erlaubt. Will man folglich mittels einer Differentialgleichung erster Ordnung eine Funktion y definieren, so muß man außerdem noch die Bedingung aufstellen, daß für einen gegebenen Wert von x die Funktion einen vorgeschriebenen Wert haben soll. Mit andern Worten, wenn x_0 und y_0 beliebig gegeben sind, so existiert eine Funktion y von x, welche der gegebenen Gleichung $f(x, y, y') = 0$ genügt und für $x = x_0$ den Wert $y = y_0$ annimmt. Für die Gültigkeit dieses Satzes sind gewisse Einschränkungen unerläßlich, welche aus den obigen Betrachtungen nicht ersichtlich sind. Diese Betrachtungen erlauben uns zwar, uns von der Existenz, der Form und der geometrischen Bedeutung des allgemeinen Integrals Rechenschaft zu geben, können uns aber in keiner Weise von einem strengen analytischen Beweis dispensieren[1]. Wir wollen uns hier darauf beschränken, die Aufmerksamkeit auf die Einzigkeit des allgemeinen Integrals zu lenken, d. h. auf die Unmöglichkeit der Existenz zweier voneinander unabhängiger Funktionen $u(x, y)$, $v(x, y)$, die gleich willkürlichen Konstanten gesetzt das allgemeine Integral einer und derselben Differentialgleichung darstellen. In der Tat ist wegen der Gleichheit der Werte von y', die sich aus den Relationen $u = \text{Const.}$ und $v = \text{Const.}$ ergeben, erforderlich, daß man $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 0$ hat, und es muß folglich

1) Man ziehe hierüber zu Rate das „Lehrbuch der Analysis" (p. 500) von Lipschitz, den „Traité d'Analyse" (t. II, p. 292) von Picard, eine Note von Peano in den „Atti dell' Accademia di Torino" (1885—86, p. 677), zwei Noten von Arzelà in den „Memorie dell' Accademia di Bologna" (1895, p. 257; 1896, p. 131). Peano verdankt man einen Beweis der Existenz des Integrals unter der einen Bedingung, die am Anfang des Paragraphen angegeben worden ist.

(§ 579) zwischen u und v eine Abhängigkeit bestehen, sodaß v oder u gleich einer Konstanten setzen dasselbe ist.

783. Singuläres Integral. Das allgemeine Integral $F(x, y, a) = 0$ der Gleichung $f(x, y, y') = 0$ genügt dieser Gleichung auch dann noch, wenn a nicht als eine Konstante, sondern als eine Funktion von x und y betrachtet wird, die implicite durch $F_a'(x, y, a) = 0$ definiert ist; denn (vgl. § 621) der unter dieser zweiten Voraussetzung gewonnene Wert von y' ist derselbe wie der Wert, den man unter Voraussetzung eines konstanten a erhalten würde. *Singuläres Integral* heißt gerade das Integral, welches sich durch Elimination von a aus den Gleichungen $F = 0$ und $F_a' = 0$ ergibt. Geometrisch läßt sich dies in folgender Weise ausdrücken: Eine gegebene Differentialgleichung wird nicht nur von den unendlich vielen Kurven befriedigt, die durch das allgemeine Integral dargestellt werden, sondern auch von der Enveloppe dieser Kurven, die durch das singuläre Integral dargestellt wird. Deswegen pflegt man zu sagen, daß das singuläre Integral die Enveloppe der unendlich vielen partikulären Integrale ist. Dank der Existenz des singulären Integrals ist ein Punkt, der sich in stetiger Weise derart bewegt, daß er beständig einer gegebenen Differentialgleichung genügt, deswegen nicht gezwungen auf einer partikulären Kurve zu bleiben, sondern kann auch, indem er einen passenden Bogen der Enveloppe durchläuft, auf jede andere partikuläre Kurve übergehen[1]).

784. Es ist bemerkenswert, daß man das singuläre Integral erhalten kann ohne eine Integration auszuführen. Wenn die linke Seite der betrachteten Differentialgleichung $f = 0$ eine stetige Funktion mit stetigen ersten Derivierten ist, so ergibt sich das singuläre Integral durch Elimination von y' aus den Gleichungen $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$. Fixieren wir in der Tat eine unter den unendlich vielen Kurven, die durch das allgemeine Integral dargestellt werden, und nehmen wir an, daß sie in A die Kurve berührt, die durch das singuläre Integral dargestellt wird. Betrachten wir eine zweite partikuläre Kurve, die zu der ersten unendlich benachbart ist, und sei A' der zu A unendlich benachbarte Punkt, in welchem sie die singuläre Kurve berührt. Es ist klar, daß die beiden partikulären Kurven einen Punkt M gemein haben, der zu A unendlich benachbart ist, dessen Koordinaten ξ und η folglich nach den Koordinaten x und y

---

1) Diese Bemerkung, die so einfach ist, daß sie überflüssig scheinen könnte, ist mit großem Geschick von Boussinesq verwertet worden für die „Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale" (Paris, Gauthier-Villars, 1878). Siehe auch die Studie desselben Autors „sur divers points de la philosophie des sciences", p. 82.

von A konvergieren, wenn A' mit A zusammenzufallen strebt. Im Punkte M seien nun η' und $\eta'+h$ die Richtungskoeffizienten der beiden sich dort treffenden partikulären Kurven. Es ist klar, daß beim Konvergieren von A' nach A die Tangenten dieser Kurven in M mit der Tangente der singulären Kurve in A zusammenzufallen streben. Man wird also haben $\lim \xi = x$, $\lim \eta = y$ und gleichzeitig $\lim \eta' = y'$, $\lim h = 0$. Da M zwei Kurven angehört, die der vorgelegten Differentialgleichung genügen, so muß man haben $f(\xi,\eta,\eta') = 0$, $f(\xi, \eta, \eta'+h) = 0$; und die zweite Gleichung wird, wenn man darin die Potenzen von h von der zweiten an aufwärts vernachlässigt, $f''_{y'}(\xi, \eta, \eta') = 0$. In der Grenze ist also $f(x, y, y') = 0$, $f'_{y'}(x,y,y') = 0$.

785. Was die Integration der Differentialgleichungen anbetrifft, so gibt es keine Methode, die auf alle Gleichungen anwendbar ist, und wir müssen uns hier darauf beschränken, einige wenige Fälle anzugeben, in denen man durch spezielle Verfahrungsweisen zur Kenntnis des allgemeinen Integrals gelangt.

a) Wenn man aus der vorgelegten Gleichung einen der möglichen Ausdrücke von y' entnimmt und dy/dx für y' einsetzt, so wird man dazu geführt, eine Gleichung von der Form $u\,dx + v\,dy = 0$ zu integrieren, wo u und v Funktionen von x, y sind. Die Integration läßt sich ohne weiteres ausführen $\left(\int u\,dx + \int v\,dy = \text{Const.}\right)$, wenn u eine Funktion von x allein und v eine Funktion von y allein ist. Alsdann sagt man, die Veränderlichen seien separiert. Die Separation der Veränderlichen läßt sich immer erreichen, wenn u und v Produkte von Funktionen von x allein mit Funktionen von y allein sind. Man braucht nämlich nur die Gleichung durch die Funktion von y, die in u enthalten ist, und durch die Funktion von x, die in v enthalten ist, zu dividieren.

b) Es gelingt immer die Veränderlichen zu separieren, wenn u und v homogene Funktionen von demselben Grade sind. Setzt man in der Tat $y = tx$, sodaß $u = x^n\varphi(t)$, $v = x^n\psi(t)$ ist, so verwandelt sich die Gleichung in

$$\varphi(t)\,dx + \psi(t)\,(t\,dx + x\,dt) = 0.$$

Dividiert man also durch x und durch $\varphi + t\psi$ und integriert, so erhält man

$$\log x + \int \frac{\psi(t)\,dt}{\varphi(t) + t\,\psi(t)} = \text{Const.}$$

c) Sehr einfach ist die Integration der Gleichung $f(x, y, y') = 0$, sobald in ihr x oder y fehlt. Wir nehmen an, daß man die Gleichung nach y' nicht auflösen kann oder will; sonst würde man aus $y' = \varphi(x)$ oder $y' = \varphi(y)$ sofort entnehmen $y = \int \varphi(x)\,dx$ oder $x = \int \frac{dy}{\varphi(y)}$.

Dagegen setzen wir voraus, daß man die vorgelegte Gleichung nach x oder nach y auflösen kann. Hat man z. B. $x = \varphi(y')$ und setzt $y' = t$, so findet man $y = \int t\,dx = \int t\varphi'(t)\,dt$. Die Elimination von t zwischen $x = \varphi(t)$, $y = t\varphi(t) - \int \varphi(t)\,dt$ liefert die gesuchte Gleichung in x und y. Ebenso leitet man aus $y = \varphi(y')$, wenn man $y' = t$ setzt, ab $x = \int \frac{dy}{t} = \int \frac{\varphi'(t)}{t}\,dt$ u. s. w.

d) Die Gleichungen zweiter Ordnung, in welchen x oder y fehlt, sind leicht auf Gleichungen erster Ordnung reduzierbar. Wenn nämlich y fehlt, so kann man y' als die unbekannte Funktion betrachten, und die Gleichung ist dann von erster Ordnung, sodaß die Integration, wenn wir sie als möglich voraussetzen, zu einer Gleichung $F(x, y', a) = 0$ führt. Integriert man jetzt noch einmal, so gelangt man zu der gesuchten Relation zwischen x und y. Dieselbe enthält zwei willkürliche Konstanten a und b. Wenn in der gegebenen Differentialgleichung x fehlt, so braucht man nur y als unabhängige Veränderliche anzunehmen, y' als unbekannte Funktion zu betrachten und gleichzeitig zu bemerken, daß $y'' = dy'/dx = y'dy'/dy$ ist. Man erhält dann eine Gleichung erster Ordnung, die integriert $F(y, y', a) = 0$ liefert, u. s. w.

e) Wenn der Ausdruck von y', den man aus einer Differentialgleichung erster Ordnung gewinnt, in y vom ersten Grade ist, so heißt die Gleichung *linear*, und die Integration ist immer möglich. Setzt man in der Tat $y = uv$, so verwandelt sich die Gleichung $y' + y\varphi(x) = f(x)$ in $u'v + (v' + v\varphi)u = f$ und reduziert sich auf $u'v = f$, wenn man für v eine Funktion wählt, die der Bedingung $v' + v\varphi = 0$ genügt. Durch Separation der Veränderlichen und Integration findet man $v = e^{-\int \varphi dx}$. Also ist $u' = fe^{\int \varphi dx}$ und endlich

$$y = e^{-\int \varphi dx} \int e^{\int \varphi dx} f dx.$$

Es sind mithin, wie man zu sagen pflegt, zwei Quadraturen, d. h. zwei einfache Integrationen, erforderlich, um das allgemeine Integral einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung zu berechnen.

f) Die Bernouillische Differentialgleichung $y' + y\varphi(x) = y^n f(x)$ reduziert sich sofort auf die vorige: man braucht nur alles durch y^n zu dividieren und y^{1-n} als unbekannte Funktion anzunehmen.

g) Interessant ist die Clairautsche Differentialgleichung $y = xy' + f(y')$. Durch Derivation erhält man $\{x + f'(y')\}\, y'' = 0$. Man erhält mithin successiv $y'' = 0$, $y' = a$, $y = ax + f(a)$: dies ist das allgemeine Integral. Wenn nicht $y'' = 0$ ist, so muß man haben $x + f'(y') = 0$; eliminiert man zwischen dieser Gleichung und der vorgelegten y', so findet man das singuläre Integral; und der Weg, auf dem wir es erhalten haben, ist gerade der in § 784 angegebene.

h) Die Gleichung $y = x\varphi(y') + \psi(y')$ läßt sich, wenn sie keine Clairautsche Gleichung ist, auf eine lineare Gleichung reduzieren; denn man leitet aus ihr durch Derivation ab

$$\frac{dx}{dy'} + \frac{x\varphi'(y') + \psi'(y')}{\varphi(y') - y'} = 0.$$

Führt man die Integration aus, indem man x als unbekannte Funktion der unabhängigen Veränderlichen y' betrachtet, so ergibt sich eine Relation von der Form $F(x, y', a) = 0$, und die Elimination von y' zwischen dieser Gleichung und der vorgelegten führt zu dem gesuchten allgemeinen Integral. Allgemeiner erhält man, so oft eine Differentialgleichung sich auf die Form $y = f(x, y')$ bringen läßt, durch Derivation

$$y' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y'} y''.$$

Wenn man diese Gleichung erster Ordnung (in Bezug auf die unbekannte Funktion y') integrieren kann, so führt die Elimination von y' zwischen ihrem allgemeinen Integral $F(x, y', a) = 0$ und der vorgelegten Gleichung zu der gesuchten Relation zwischen x und y.

i) Ist der Ausdruck von y', den man aus einer Differentialgleichung erster Ordnung gewinnt, in y vom zweiten Grade, so läßt sich die Integration nur in ganz speziellen Fällen ausführen, mit denen wir uns im folgenden Paragraphen beschäftigen werden. Für jetzt beschränken wir uns darauf, einige bemerkenswerte Eigenschaften derartiger Gleichungen anzugeben. Diese Gleichungen haben die Form

$$y' = y^2\varphi(x) + y\chi(x) + \psi(x)$$

und heißen Riccatische Gleichungen. Wenn man auf irgend eine Weise zur Kenntnis eines partikulären Integrals u gelangt, so ist die Integration mittelst zweier Quadraturen möglich. Setzt man nämlich $y = u - 1/z$, so nimmt die Gleichung die lineare Form an

$$z' + (2u\varphi + \chi)z = \varphi,$$

und das allgemeine Integral ist daher

$$(1) \qquad y = u - \frac{e^{\int (2u\varphi + \chi)dx}}{\int e^{\int (2u\varphi + \chi)dx} \varphi\, dx}.$$

Kennt man zwei partikuläre Integrale, so reduziert sich die Integration auf eine Quadratur. Wenn man in der Tat von der vorgelegten Gleichung die Identitäten

$$u' = u^2\varphi + u\chi + \psi, \qquad v' = v^2\varphi + v\chi + \psi$$

subtrahiert, so erhält man die Gleichungen

$$\frac{d}{dx}\log(y-u) = (y+u)\varphi + \chi, \quad \frac{d}{dx}\log(y-v) = (y+v)\varphi + \chi.$$

Subtrahiert man diese voneinander und integriert, so ergibt sich

(2) $$\frac{y-u}{y-v} = e^{\int (u-v)\varphi\, dx}.$$

Kennt man ferner drei partikuläre Integrale, so läßt sich die Integration ohne Quadraturen ausführen; denn aus der vorigen Relation leitet man sofort ab

$$\frac{y-u}{y-v} : \frac{w-u}{w-v} = \text{Const.}$$

Also ist das Doppelverhältnis von vier beliebigen partikulären Integralen der Riccatischen Gleichung konstant. Wir wollen schließlich noch auf die äußerst einfache Form hinweisen, auf die sich eine Riccatische Gleichung immer reduzieren läßt, indem man

$$z = ye^{-\int \chi\, dx}, \quad t = -\int e^{\int \chi\, dx}\varphi\, dx$$

als unbekannte Funktion bezw. als unabhängige Veränderliche wählt. Man hat

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{y' - y\chi}{e^{2\int \chi\, dx}\varphi} = -\frac{y^2\varphi + \psi}{e^{2\int \chi\, dx}\varphi} = -z^2 - \frac{\psi}{\varphi}e^{-2\int \chi\, dx},$$

und die Gleichung transformiert sich daher in

$$z' + z^2 = f(t).$$

786. Beispiele. a) Um die Gleichungen

$$(3x^2 - y^2)y\,dx - (x^2 - 3y^2)x\,dy = 0, \quad (x^2 - 3y^2)x\,dx + (3x^2 - y^2)y\,dy = 0$$

zu integrieren, genügt es (§ 785, b) $y = tx$ zu setzen und dadurch die Gleichungen in

$$\frac{dx}{x} - \frac{(1-3t^2)\,dt}{2t(1+t^2)} = 0, \quad \frac{dx}{x} + \frac{(3-t^2)\,t\,dt}{1-t^4} = 0$$

zu transformieren. Durch Integration ergibt sich daraus

$$x = \frac{a\sqrt{2t}}{1+t^2}, \quad x = \frac{a\sqrt{1-t^2}}{1+t^2},$$

d. h. $x^2 + y^2 = a\sqrt{2xy}$, $x^2 + y^2 = a\sqrt{x^2 - y^2}$ oder in Polarkoordinaten $r = a\sqrt{\sin 2\theta}$, $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$. Die Integrale der ersten und der zweiten Differentialgleichung stellen also (§ 589, m) die unendlich vielen Lemniskaten dar, die im Pol von den Achsen bezw. den Winkelhalbierenden der Achsen berührt werden. Man bemerke, daß zwei beliebige Lemniskaten, die aus den beiden Scharen herausgegriffen sind, sich außerhalb des Pols rechtwinklig schneiden. Es ist ferner leicht zu verifizieren, daß die beiden Differentialgleichungen eine gemeinsame Eigenschaft der Tangente und der Normale ausdrücken, nämlich die Eigenschaft mit dem Radiusvektor einen Winkel zu bilden, der doppelt so groß ist als die Neigung dieses Radius gegen eine feste Gerade. Diese Gerade ist eine Tangente im Pol oder die normale Symmetrieachse, je nachdem es sich um die Tangente oder die Normale handelt. Wenn man dieses Problem in eine Gleichung bringt, indem man von Polarkoordinaten Gebrauch macht, so erhält man sofort $r' = r \cot 2\theta$, $r' = -r \operatorname{tg} 2\theta$, und die Integration wird sehr leicht.

b) Um $(ax + by + c)\,dx + (a'x + b'y + c')\,dy = 0$ zu integrieren, können wir als neue Veränderliche $\xi = ax + by + c$, $\eta = a'x + b'y + c'$ wählen, wenn nicht $ab' = ba'$ ist, in welchem Falle zwischen ξ und η eine Relation bestehen würde. Die Gleichung wird

$$(b'\xi - a'\eta)\,d\xi - (b\xi - a\eta)\,d\eta = 0,$$

und um sie zu integrieren braucht man nur $\eta = t\xi$ zu setzen u. s. w. Ist ferner $ab' = ba'$ und gleichzeitig $ac' = ca'$, so gibt die Gleichung, nachdem man sie von dem Faktor $ax + by + c$ befreit hat, $ax + a'y = \text{Const.}$ Dagegen kann man für $ac' \gtrless ca'$ schreiben

$$(ax + by)\,d(ax + a'y) + a\,d(cx + c'y) = 0,$$

sodaß sich, wenn man $\xi = ax + a'y$, $\eta = cx + c'y$ als neue Veränderliche wählt, eine Gleichung von der Form $(\alpha\xi + \beta\eta)\,d\xi + a\,d\eta = 0$ ergibt. Um die Veränderlichen zu separieren, braucht man nur $z = \alpha\xi + \beta\eta$ statt η einzuführen: man erhält dann $(\beta z - a\alpha)\,d\xi + a\,dz = 0$ u. s. w.

c) Die Gleichung $y \sin x + y' \cos x = 1$ ist linear, und es genügt daher, um sie zu integrieren (§ 785, e), zuerst eine Funktion v zu bestimmen, die der Gleichung $v \sin x + v' \cos x = 0$ genügt, dann $y = uv$ zu setzen und alle Funktionen u zu bestimmen, die der Gleichung $vu' \cos x = 1$ genügen. Auf solche Weise erhält man successiv $v = \cos x$, $u = \operatorname{tg} x + a$, $y = \sin x + a \cos x$.

d) Ist die Gleichung $(y - xy') \cos y' = 1 - x \sin y'$ zu integrieren, so löst man sie, um sie dann zu derivieren (§ 785, h), nach y auf:

$$y = x(y' - \operatorname{tg} y') + \sec y', \quad x \sin y' + \frac{dx}{dy'} \cos y' = 1.$$

Behandelt man jetzt x als unbekannte Funktion der unabhängigen Veränderlichen y', so findet man $x = \sin y' + a \cos y'$ und leitet daraus ab $(1 + a^2) \sin y' = x \pm a\sqrt{1 + a^2 - x^2}$, $(1 + a^2) \cos y' = ax \mp \sqrt{1 + a^2 - x^2}$. Setzt man diese Resultate in die vorgelegte Differentialgleichung ein, so gelangt man zu dem allgemeinen Integral

$$y + x \operatorname{arc\,tg} \frac{a \pm x\sqrt{1 + a^2 - x^2}}{1 - x^2} \pm \sqrt{1 + a^2 - x^2} = 0.$$

e) In analoger Weise läßt sich die Gleichung $y = xy' + x^2 f(y')$ integrieren, welche sich durch Derivation in

$$\frac{dx}{dy'} + \frac{x f'(y')}{2 f(y')} + \frac{1}{2 f(y')} = 0$$

transformiert, woraus sich, wenn man $\varphi(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$ setzt,

$$x = -\tfrac{1}{2} q(y') \varphi'(y')$$

ergibt. Eliminiert man zwischen dieser Relation und der vorgelegten Gleichung y', so gelangt man zu dem allgemeinen Integral.

f) Um $(a^2 - x^2)\,dy^2 + 2\,xy\,dx\,dy + (b^2 - y^2)\,dx^2 = 0$ zu integrieren, löse man die Gleichung nach y auf und bemerke, daß die so erhaltene Gleichung $y = xy' \pm \sqrt{a^2y'^2 + b^2}$ eine Clairautsche ist (§ 785, g). Also läßt die vorgelegte Gleichung das allgemeine Integral $y = cx \pm \sqrt{a^2c^2 + b^2}$ oder $c^2(a^2 - x^2) + 2cxy + (b^2 - y^2) = 0$ zu und das singuläre Integral $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

g) Bei der Gleichung $y^2 + \frac{1}{x^2} + 2\,y' = 0$ ist sofort das partikuläre Integral $y = 1/x$ ersichtlich, und es genügt daher in Formel (1) $u = 1/x$, $\varphi = -1/2$, $\chi = 0$ zu setzen, um das allgemeine Integral zu finden

$$\frac{1}{1 - xy} + \frac{1}{2}\log x = \text{Const.}$$

Ein wenig allgemeiner findet man, wenn man der Gleichung $y^2 + \frac{1}{x^2} + 2\,ky' = 0$ durch $y = m/x$ zu genügen sucht, daß m die Gleichung $m^2 - 2\,km + 1 = 0$ erfüllen muß, und man erhält auf diese Weise für $k^2 \gtrless 1$ die beiden partikulären Integrale

$$u = \frac{k + \sqrt{k^2 - 1}}{x}, \quad v = \frac{k - \sqrt{k^2 - 1}}{x};$$

darauf liefert uns die Formel (2) das allgemeine Integral

$$xy = k + \sqrt{k^2 - 1}\,\frac{x^{\frac{\sqrt{k^2-1}}{k}} - a}{x^{\frac{\sqrt{k^2-1}}{k}} + a}.$$

Für $k^2 < 1$ ist es zweckmäßig, dasselbe auf folgende Form zu bringen:

$$xy = k - \sqrt{1 - k^2}\,\operatorname{tg}\left(a + \frac{\sqrt{1 - k^2}}{2k}\log x\right).$$

Zu denselben Resultaten gelangt man (vgl. § 725, d) mit Hilfe der Substitution $xy = z$, welche die Separation der Veränderlichen ermöglicht:

$$\frac{dx}{x} + \frac{2k\,dz}{z^2 - 2kz + 1} = 0.$$

h) Betrachten wir allgemeiner eine Riccatische Gleichung, die bereits auf die Form $y' + ay^2 = f(x)$ reduziert ist (§ 785, i). Wir wollen unendlich viele Fälle angeben, in welchen die Gleichung sich in algebraisch-logarithmischer Form integrieren läßt. Diese Fälle beziehen sich alle auf die Annahme, daß $f(x)$ zu einer Potenz von x proportional ist: es sei $f(x) = bx^n$. Setzt man $y = uz + v$, so wird die Gleichung

$$uz' + (v' + av^2) + (u' + 2\,auv)z + au^2z^2 = bx^n$$

und reduziert sich einfach auf $z' + auz^2 = b\frac{x^n}{u}$, wenn man für u und v zwei Funktionen wählt, die den Bedingungen $v' + av^2 = 0$, $u' + 2auv = 0$ genügen. Dies gelingt, indem man $v = 1/ax$ und dann $u = 1/x^2$ nimmt. Die Gleichung transformiert sich auf diese Weise in $z' + a\frac{z^2}{x^2} = bx^{n+2}$ und reduziert sich auf die ursprüngliche Form, wenn man $z = 1/y_1$, $x = x_1^{\nu}$ setzt. Man erhält in der Tat

$$\frac{dy_1}{dx_1} + \nu b y_1^2 x_1^{(n+3)\nu - 1} = \nu a_1 x_1^{-(\nu+1)}$$

und braucht nur $\nu = 1/(n+3)$ zu nehmen, damit sich die Gleichung wirklich auf die ursprüngliche Form reduziert, d. h. $\frac{dy_1}{dx_1} + a_1 y_1^2 = b_1 x_1^{n_1}$ wird, wo $a_1 = b/(n+3)$, $b_1 = a/(n+3)$, $n_1 = -(n+4)/(n+3)$. Denken wir uns jetzt, daß die bereits angewandte Substitution mehrere Male nacheinander angewandt wird. Man gelangt auf solche Weise zu einer Reihe Riccatischer Gleichungen, in welcher auf n die Exponenten $n_1, n_2, n_3, \ldots$ folgen, die durch die Relationen

$$n_{i+1} = -\frac{n_i + 4}{n_i + 3}$$

bestimmt sind, wobei $n_0 = n$ ist. Addiert man auf beiden Seiten 2, so erhält man

$$n_{i+1} + 2 = \frac{n_i + 2}{(n_i + 2) + 1}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{1}{n_{i+1} + 2} = 1 + \frac{1}{n_i + 2}.$$

Verwandelt man i in $i-1, i-2, \ldots, 2, 1, 0$ und summiert, so kommt

$$\frac{1}{n_i + 2} = i + \frac{1}{n + 2}.$$

Da die Veränderlichen sich in der vorgelegten Gleichung unmittelbar separieren, wenn $n = 0$ ist, so kann man behaupten, daß die Gleichung integrabel ist, sobald in der Reihe $n_1, n_2, n_3, \ldots$ ein verschwindendes Glied vorkommt. Sie ist also integrabel, wenn man hat

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} = \frac{n}{2n+4} = \text{ganzer Zahl.}$$

Eigentlich ist es nötig, daß $n/(2n+4)$ ganz und positiv ist; aber im Falle einer negativen ganzen Zahl hilft man sich dadurch, daß man in der gegebenen Gleichung direkt die Substitution $y = 1/y_1$, $x = x_1^{\frac{1}{n+1}}$ macht. In der Tat geht die Gleichung dann über in $\frac{dy_1}{dx_1} + a_1 y_1^2 = b_1 x_1^{n_1}$, wo $a_1 = b/(n+1)$, $b_1 = a/(n+1)$, $n_1 = -n/(n+1)$ ist, sodaß man hat $n_1/(2n_1 + 4) = -n/(2n+4)$. Wenn endlich die ganze Zahl nicht endlich ist, so würden unendlich viele Transformationen nötig sein; aber dieser Fall, der der Annahme $n = -2$ entspricht, ist bereits auf anderem

Wege behandelt worden. Die Gleichung $y' + ay^2 = bx^n$ ist also, um zusammenzufassen, integrabel für

$$-\frac{n}{4} = 0,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{7},\ \frac{4}{9},\ \ldots,\ \frac{1}{2},\ \ldots,\ \frac{5}{9},\ \frac{4}{7},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{3},\ 1.$$

i) Die Gleichung zweiter Ordnung $y'' = f(x)$ läßt sich immer (§ 785, d) behandeln, wie eine Gleichung erster Ordnung, indem man y' als unbekannte Funktion betrachtet: $y' = \int f(x)\,dx$ mit einer willkürlichen Konstanten a, die in dem Integral enthalten ist. Ferner hat man $y = \int y'dx = xy' - \int x\,dy'$, d. h. $y = x\int f(x)\,dx - \int xf(x)\,dx$ mit einer zweiten willkürlichen Konstanten b, die in dem zweiten Integral enthalten ist, sodaß der willkürliche Teil von y, wie vorauszusehen war, $ax + b$ ist. Auch die Gleichung $y'' = f(y)$ reduziert sich sofort auf eine von erster Ordnung (§ 785, d), indem man $y'dy'$ für $y''dy$ schreibt, sodaß man successiv erhält

$$\frac{1}{2}y'^2 = \int f(y)\,dy, \qquad x = \int\frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy}}.$$

Hierin sind zwei willkürliche Konstanten enthalten, die durch die successiven Integrationen hineinkommen.

j) Um $y''\cos y + y'^2\sin y = y'$ zu integrieren, multipliziere man das Ganze mit dy und ersetze $y''dy$ durch $y'dy'$. Auf diese Weise erhält man nach Befreiung der Gleichung von dem trivialen Integral $y = \text{Const.}$ die Gleichung erster Ordnung

$$\frac{dy'}{dy}\cos y + y'\sin y = 1,$$

welche, wie wir gesehen haben, das allgemeine Integral $y' = \sin y + \operatorname{tg}\alpha\cos y$ zuläßt. Mithin ist

$$x = \int\frac{dy}{\sin y + \operatorname{tg}\alpha\cos y} = \int\frac{\cos\alpha\,dy}{\sin(y+\alpha)} = a + \cos\alpha\log\operatorname{tg}\frac{y+\alpha}{2},$$

wo a und α willkürliche Konstanten sind.

k) In ähnlicher Weise kann man, wenn die Gleichung $y''(1 + yy') = y'(1 + y'^2)$ gegeben ist, sie sofort auf die Form

$$\frac{dy}{dy'} = \frac{1 + yy'}{1 + y'^2}$$

bringen und integrieren (§ 785, e), indem man y' als unabhängige Veränderliche betrachtet. Man kann auch damit beginnen, die Gleichung auf die Form zu bringen

$$(1 + y'^2)(dy - dy') = (1 + yy')\,dy' - (1 + y'^2)\,dy' = (y - y')\,y'dy',$$

um daraus successiv abzuleiten

$$\frac{d(y - y')}{y - y'} = \frac{y'dy'}{1 + y'^2}, \qquad y = y' + k\sqrt{1 + y'^2},$$

ferner

$$x = \int\frac{y + k\sqrt{y^2 + 1 - k^2}}{y^2 - k^2}\,dy$$

und endlich $x = a + k \log\left(y + \sqrt{y^2 + 1 - k^2}\right) + \log\left(y - k\sqrt{y^2 + 1 - k^2}\right)$, wo a und k willkürliche Konstanten sind. Insbesondere ergibt sich für $k = 1$, wenn man vorher $a = -\log(1 - k^2)$ setzt, das ganz einfache Integral $y = \sqrt{1 + e^x}$.

l) Die Gleichung $yy'y'' = y'^3 + y''^2$ reduziert sich, wenn man darin y als unabhängige Veränderliche betrachtet, auf eine Clairautsche Gleichung $y' = y\frac{dy'}{dy} - \left(\frac{dy'}{dy}\right)^2$, und man erhält daher das allgemeine Integral, indem man $y' = ay - a^2$ integriert. Es ist folglich $y = a + be^{ax}$, wo a und b willkürliche Konstanten sind; aber das singuläre Integral $4y' = y^2$ enthüllt uns die Existenz unendlich vieler anderer Integrale $(a - x)y = 4$, die nicht in dem allgemeinen Integral enthalten sind.

m) Um schließlich zu sehen, wie die Anwendung der Differentialgleichungen zur Aufdeckung bemerkenswerter Eigenschaften der Funktionen führen kann, betrachte man die Differentialgleichung

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} + \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}} = 0, \tag{3}$$

welche offenbar das allgemeine Integral

$$F(k, \varphi) + F(k, \psi) = \text{Const.} \tag{4}$$

zuläßt, und versuche auf anderem Wege zur Kenntnis dieses Integrals zu gelangen. In Bezug auf die unabhängige Veränderliche $x = F(k, \varphi)$ haben die Funktionen $u = \sin\varphi$, $v = \sin\psi$ offenbar die Derivierten

$$u' = \cos\varphi \cdot \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}, \quad v' = -\cos\psi \cdot \sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}$$

und genügen daher beide den folgenden Relationen:

$$y'^2 = (1 - y^2)(1 - k^2y^2), \quad y'' = -(1 + k^2)y + 2k^2y^3.$$

Daraus folgt

$$v^2u'^2 - u^2v'^2 = -(u^2 - v^2)(1 - k^2u^2v^2),$$

$$vu'' - uv'' = 2k^2uv(u^2 - v^2).$$

Mithin ist

$$\frac{vu'' - uv''}{vu' - uv'} = -\frac{2k^2uv(uv)'}{1 - k^2(uv)^2}, \quad \frac{vu' - uv'}{1 - k^2u^2v^2} = \text{Const.}$$

Die letzte Relation wird, wenn man u, v, u', v' durch ihre Ausdrücke in φ und ψ ersetzt,

$$\frac{\sin\varphi\cos\psi \cdot \sqrt{1 - k^2\sin^2\psi} + \sin\psi\cos\varphi \cdot \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi} = \text{Const.} \tag{5}$$

Dies ist nur eine andere Form des allgemeinen Integrals der Gleichung (3). Wenn man daher mit $\sin\sigma$ die Funktion von φ und ψ bezeichnet, die auf der linken Seite von (5) steht, so erlaubt die am Schlusse von § 782 gemachte Bemerkung zu behaupten, daß die linke Seite von (4) sich auf die Form $f(\sigma)$ muß bringen lassen. Da sich nun für $\psi = 0$ auf Grund von (5) σ auf φ reduziert, so ist $F(k, \varphi) = f(\varphi)$. Mithin gilt folgender Satz: Wenn man hat

$$F(k, \varphi) + F(k, \psi) = F(k, \sigma),$$

so ist σ mit φ und ψ durch die Relation verbunden

$$(1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi)\sin\sigma = \sin\varphi\cos\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}+\sin\psi\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}.$$

Dies ist das wichtige, von Euler entdeckte, Additionstheorem der elliptischen Integrale erster Gattung[1]). Es ist nützlich zu bemerken, daß die letzte Relation sich auch auf die folgenden Formen bringen läßt:

$$\cos\sigma = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\sigma}\,,$$

$$\operatorname{tg}\sigma = \frac{\operatorname{tg}\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}+\operatorname{tg}\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1-\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)(1-k^2\sin^2\psi)}}.$$

Insbesondere findet man für $k=0$ die trigonometrischen Formeln wieder, welche die Werte von $\sin(\varphi+\psi)$, $\cos(\varphi+\psi)$, $\operatorname{tg}(\varphi+\psi)$ geben. Noch sei bemerkt, daß es für $\sigma=\frac{1}{2}\pi$, wenn man $\varphi=\psi$ setzt, gelingt, die Amplitude φ zu bestimmen, für welche $F(k,\varphi)$ gleich $\frac{1}{2}F(k)$ wird: sie lautet $\varphi = \operatorname{arc\,cot}\sqrt[4]{1-k^2}$. Damit ist die Lösung einer früher gestellten Aufgabe (§ 777, d) ermöglicht.

Geometrische Anwendungen.

787. Ebene Kurven. a) Wenn man die Kurve kennen zu lernen wünscht, bei welcher der von einem festen Punkte aus gerechnete Abschnitt, den die Tangente auf einer Achse bestimmt, eine vorgeschriebene Funktion des von der Tangente und der Achse eingeschlossenen Winkels ist, so erhält man eine Clairautsche Gleichung. Die gesuchte Kurve ist gegeben durch das singuläre Integral, während das allgemeine Integral den Inbegriff ihrer Tangenten darstellt. Wünscht man z. B., daß der auf der x-Achse bestimmte Abschnitt, vom Anfangspunkt aus gerechnet, proportional zu y' ist, zu welcher Annahme man bei der Aufsuchung der Gegenfußpunktkurve (§ 627) einer Geraden in Bezug auf einen Punkt geführt wird, so muß man die Gleichung $y = xy' - ay'^2$ integrieren. Daraus folgt durch Derivation, daß entweder $y''=0$ sein muß, also $y'=k$ und weiter $y = kx - k^2a$, wodurch die Tangentenschar der Parabel $x^2 = 4ay$ dargestellt wird; oder daß man haben muß $x = 2ay'$, folglich $x^2 = 4ay$. In ähnlicher Weise findet man, wenn gefragt wird, bei welcher Kurve die von den Achsen auf den Tangenten bestimmten Strecken alle gleich lang sind, die Differentialgleichung $y = xy' + ay'/\sqrt{1+y'^2}$, und es wird wieder genügen (§ 784) ihr singuläres Integral zu bestimmen: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Die Elimination, durch welche man zu dem Resultate gelangt, unterscheidet sich im Grunde nicht von derjenigen, welche man ausführen müßte (§ 620), wenn man das Problem vom Standpunkt der Enveloppentheorie betrachtet.

b) In analoger Weise verfährt man, wenn statt der Tangente die Normale betrachtet wird, in welchem Falle die zu integrierende Gleichung

1) Was die andern Gattungen anbetrifft, so vergleiche man Schlömilch, Comp. der höh. Analysis, Bd. 2, S. 339 ff.

die Form hat $x + yy' = f(y')$. Man kann sie sofort nach y auflösen (vgl. § 785, h). Übrigens kann man auch damit anfangen, daß man die Gleichung deriviert, um dann zwischen der so erhaltenen Gleichung $1 + y'^2 + yy'' = f'(y')y''$ und der vorgelegten y zu eliminieren. Man gelangt auf diese Weise zu der linearen Gleichung

$$y'\frac{dx}{dy'} = \frac{x}{1+y'^2} + \frac{y'f'(y') - f(y')}{1+y'^2},$$

welche man zu integrieren weiß. Ist $F(x, y', a) = 0$ das allgemeine Integral, so wird es genügen zwischen ihm und der vorgelegten Gleichung y' zu eliminieren, um das gesuchte allgemeine Integral zu finden. Will man z. B. eine Kurve haben, bei der die von den Achsen auf den Normalen bestimmten Strecken alle die Länge a haben, so hat man die Differentialgleichung $x + yy' = ay' / \sqrt{1 + y'^2}$ zu integrieren und findet, daß das allgemeine Integral durch Elimination von y' aus

$$x = \frac{ay'}{2\sqrt{1+y'^2}}\left(1 - k + \frac{1}{1+y'^2}\right), \quad y = \frac{a}{2\sqrt{1+y'^2}}\left(1 + k - \frac{1}{1+y'^2}\right)$$

hervorgeht. Übrigens braucht man nur eine Kurve zu kennen, die unserer Forderung genügt, um sie alle zu kennen; und wir können uns deshalb darauf beschränken, z. B. $k = \frac{1}{2}$ zu setzen. Alsdann werden die obigen Gleichungen

$$x = \frac{a}{8(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\{(1+y')^3 - (1-y')^3\}, \; y = \frac{a}{8(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\{(1+y')^3 + (1-y')^3\},$$

und man leitet daraus durch Elimination von y' ab

$$(x + y)^{\frac{2}{3}} + (x - y)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Also sind die gesuchten Kurven Parallelkurven einer Astroide, die ihre Scheitel auf den Achsen hat; sie sind folglich (§ 626, e), wie vorauszusehen war, die unendlich vielen Evolventen der Astroide

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

c) Es werde eine Kurve gesucht von solcher Beschaffenheit, daß der von einer Achse auf der Normale bestimmte Abschnitt, vom Inzidenzpunkte aus gerechnet, eine bestimmte Funktion des von einem festen Punkte aus gerechneten Abschnitts ist, den die Normale auf der genannten Achse bestimmt. Man kommt auf eine Gleichung von der Form $y\sqrt{1 + y'^2} = f(x + yy')$. Durch Derivation erhält man eine Gleichung, die sich in

$$(6) \qquad 1 + y'^2 + yy'' = 0, \quad \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = f'(x + yy')$$

spaltet. Eliminiert man zwischen der letzten Gleichung und der vorgelegten y', so erhält man das singuläre Integral, welches die gesuchte Kurve darstellt. Dagegen ergibt sich durch Integration der ersten der Gleichungen (6) $x + yy' = a$ und, wenn man den Wert von y' in die vorgelegte Gleichung einträgt, $(x-a)^2+y^2=f^2(a)$. Das ist die Gleichung einer Schar von Kreisen, welche die bereits erhaltene Kurve berühren.

d) Will man die Kurve haben, bei welcher der Krümmungsradius in jedem Punkte sich durch eine gegebene Funktion der Abscisse des Punktes ausdrückt, so muß man die Gleichung $(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}=y''f(x)$ integrieren. Hier lassen sich die Veränderlichen sofort separieren, und man erhält $y'/\sqrt{1+y'^2}=\int\frac{dx}{f(x)}$ u. s. w. Ist z. B. $f(x)=a^2/2x$, so ergibt sich die elastische Kurve, dargestellt durch die Gleichung $y=\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$. Diese Kurve ist das Profil einer elastischen Klinge, die an einem Ende befestigt ist und durch eine am andern Ende angebrachte Kraft gebogen wird.

e) Eine ebene Kurve zu suchen, deren Krümmungsradius gleich ist dem von einer festen Geraden auf der Normale bestimmten Abschnitt, vom Inzidenzpunkt aus gerechnet. Die Gleichung, die man erhält, ist

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}=\pm\, y\sqrt{1+y'^2},\quad \text{d. h.}\ \ 1+y'^2=\pm\, yy''.$$

Nimmt man das Zeichen $-$, so ist diese Gleichung dieselbe wie die erste Gleichung (6), und es gehören daher die Kreise (mit dem Mittelpunkt auf der festen Geraden) zu den gesuchten Kurven. Mit dem Zeichen $+$ erhält man $1+y'^2=yy''$ oder, wenn man mit dy multipliziert und $y'dy'$ an die Stelle von $y''dy$ setzt,

$$\frac{dy}{y}=\frac{y'dy'}{1+y'^2},\quad y=a\sqrt{1+y'^2},\quad x=\int\frac{a\,dy}{\sqrt{y^2-a^2}}.$$

Fixiert man den Anfangspunkt derart, daß man für $x=0$ hat $y=a$, so kommt

$$x=a\log\frac{y+\sqrt{y^2-a^2}}{a},\quad \text{d. h.}\ \ y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Das ist die Gleichung einer Kettenlinie.

f) Allgemeiner ist die Differentialgleichung der Ribaucourschen Kurven (§ 595, k)

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}=ky\sqrt{1+y'^2},\quad \text{d. h.}\ \ 1+y'^2=kyy'',$$

und man versucht die Integration, indem man $y'dy'$ für $y''dy$ setzt. Die Gleichung wird auf diese Weise

$$\frac{dy}{y}=k\frac{y'dy'}{1+y'^2}$$

und gibt

$$y=a(1+y'^2)^{\frac{1}{2}k},\quad \text{d. h.}\ \ y'=\sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{k}}-1}\,.$$

Daraus folgt

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{k}} - 1}}.$$

Dies ist die allgemeine Gleichung aller Ribaucourschen Kurven. Sie läßt sich nicht auf algebraisch-logarithmische Form bringen (§ 751), außer wenn eine der Zahlen $\frac{1}{2}k$, $\frac{1}{2}(k-1)$ ganz ist, d. h. wenn k eine ganze Zahl ist. Man findet so für $k = -1$ und $k = 1$ den Kreis und die Kettenlinie wieder, für $k = -2$ die Cykloide, für $k = 2$ die Parabel u. s. w.

g) Allgemeiner noch ist die Aufsuchung der Kurven, bei denen der Krümmungsradius eine gegebene Funktion des zwischen dem Inzidenzpunkt und einer festen Geraden enthaltenen Normalenabschnitts ist, immer auf zwei successive Quadraturen zurückführbar. Es sei in der Tat $n = y/\cos\varphi$ die Länge des Normalenabschnitts, und man schreibe den Wert (§ 591) der Krümmung in folgender Weise:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d\varphi}{ds} = -\frac{d}{dy}\cos\varphi = -\frac{d}{dy}\frac{y}{n} = -\frac{1}{n} + \frac{y}{n^2}\frac{dn}{dy}.$$

Die Gleichung $\varrho = f(n)$ transformiert sich sofort in

$$\frac{dy}{y} = \frac{dn}{n} - \frac{dn}{n + f(n)}$$

und gibt

$$y = ne^{-\int \frac{dn}{n+f(n)}} = \varphi(n);$$

mithin ist

$$y' = \frac{\sqrt{n^2 - \varphi^2(n)}}{\varphi(n)}, \quad x = \int \frac{\varphi(n)\varphi'(n)\,dn}{\sqrt{n^2 - \varphi^2(n)}} \text{ u. s. w.}$$

Man kommt auf dieses Problem, so oft es sich um die Bestimmung der Rotationsflächen handelt, welche durch eine gegebene Relation zwischen den Hauptkrümmungsradien charakterisiert sind.

788. Trajektorien. Das Trajektorienproblem besteht in der Aufsuchung aller Kurven, welche unter einem konstanten Winkel ω alle Kurven einer gegebenen Schar $\varphi(x, y, a) = 0$ schneiden. Dies drückt man aus, indem man schreibt, daß für jeden Wert des Parameters a sein muß

$$y' = \frac{-\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\operatorname{tg}\omega}{\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\operatorname{tg}\omega},$$

d. h.

$$\frac{dx}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\sin\omega + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\omega} = \frac{dy}{-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\omega + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\sin\omega}.$$

Setzt man hier für a den aus $\varphi = 0$ sich ergebenden Wert ein, so erhält man eine Differentialgleichung erster Ordnung, deren Integration zu der

Gleichung $\psi(x, y, b) = 0$ einer zweiten Schar führt, deren Kurven die gewünschte Eigenschaft genießen. Insbesondere erledigt sich die Aufsuchung der orthogonalen Trajektorien der Kurven $\varphi = 0$ durch Integration der Differentialgleichung, welche sich durch Elimination von a aus $\varphi = 0$ und $dx : \frac{\partial \varphi}{\partial x} = dy : \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ ergibt. Hier einige Beispiele.

a) Um die orthogonalen Trajektorien der Kreise vom Radius a zu finden, welche ihre Mittelpunkte auf einer Geraden haben (die man zweckmäßigerweise als x-Achse annimmt), muß man b zwischen den Gleichungen

$$(x-b)^2 + y^2 = a^2, \quad \frac{dx}{x-b} = \frac{dy}{y}$$

eliminieren. Setzt man $y = a \sin \theta$ und vereinbart, daß für $\theta = \frac{1}{2}\pi$ sein soll $x = 0$, so ergibt sich

$$x = \int \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy = a \int \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} d\theta = a\left(\cos \theta + \log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}\right),$$

d. h. die Trajektorien (welche offenbar Traktricen sind) werden erhalten, indem man die durch die Gleichungen

$$x = a\left(\cos \theta + \log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}\right), \quad y = a \sin \theta$$

dargestellte Kurve parallel zur x-Achse verschiebt. Es ist übrigens leicht zu verifizieren, daß die Evolute dieser Kurve eine Kettenlinie ist. Für beliebiges ω würde man die anderen Evolventen der Kettenlinie finden.

b) Das Kreisbüschel $x^2 + y^2 - a^2 = 2\mu a y$ kann auch durch seine Differentialgleichung $2xy\,dx = (x^2 - y^2 - a^2)\,dy$ dargestellt werden, welche man durch Elimination des Parameters μ zwischen der ursprünglichen Gleichung und der durch Differentiation daraus erhaltenen gewinnt. Die Verwandlung von dy/dx in $-dx/dy$ führt zur Differentialgleichung der orthogonalen Trajektorien der Kreise des Büschels; und da die auf solche Weise erhaltene Gleichung $2xy\,dy = (y^2 - x^2 + a^2)\,dx$ sich von derjenigen des Büschels nur durch die Vertauschung von x mit y und die Verwandlung von a^2 in $-a^2$ unterscheidet, so sieht man sofort ohne Integration, daß die genannten Trajektorien ein zweites Kreisbüschel $x^2 + y^2 + a^2 = 2\lambda a x$ bilden. Diese zwei Büschel bilden die Grundlage des Systems (§ 413) der dipolaren Koordinaten $u = \frac{1}{2} \log \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$, $v = \operatorname{arc} \cot \mu$.

c) Die Bestimmung der orthogonalen Trajektorien einer beliebigen Schar von Kreisen hängt von einer Riccatischen Gleichung ab. Die Mittelpunktskoordinaten ξ, η und der Radius a eines Kreises seien drei bekannte Funktionen des Bogens s der Mittelpunktskurve. Es sei φ die Neigung der Tangente dieser Kurve gegen die Abscissenachse und θ der Winkel, den die Tangente einer Trajektorie, in ihrem Treffpunkt (x, y) mit dem genannten Kreise, mit der Normale der Mittelpunktskurve bildet. Man hat

$$x = \xi - a \sin(\theta + \varphi), \quad y = \eta + a \cos(\theta + \varphi)$$

und folglich

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi - \frac{da}{ds}\sin(\theta+\varphi) - a\left(\frac{d\theta}{ds} + \frac{1}{\varrho}\right)\cos(\theta+\varphi),$$
$$\frac{dy}{ds} = \sin\varphi + \frac{da}{ds}\cos(\theta+\varphi) - a\left(\frac{d\theta}{ds} + \frac{1}{\varrho}\right)\sin(\theta+\varphi).$$

Da $-dx/dy = \operatorname{tg}(\theta+\varphi)$ sein muß, so sieht man, daß die unbekannte Funktion θ der Differentialgleichung

$$\frac{d\theta}{ds} + \frac{1}{\varrho} = \frac{\cos\theta}{a}$$

genügt, in welcher ϱ, der Krümmungsradius der Mittelpunktskurve, eine bekannte Funktion von s ist. Es genügt jetzt als unbekannte Funktion $t = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ anzunehmen, um zu einer Riccatischen Gleichung geführt zu werden:

$$\frac{dt}{ds} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{a}\right)t^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{a}\right) = 0.$$

Übrigens ist die Kenntnis des allgemeinen Integrals nicht unerläßlich für die Aufsuchung der Eigenschaften der Trajektorien. Berücksichtigt man die Differentialgleichung nur insoweit, als sie die Derivierte θ' durch θ und bekannte Funktionen von s auszudrücken gestattet, so werden die früheren Formeln:

$$\frac{dx}{ds} = (\sin\theta - a')\sin(\theta+\varphi),\quad \frac{dy}{ds} = -(\sin\theta - a')\cos(\theta+\varphi).$$

Das Bogendifferential einer orthogonalen Trajektorie ist also $ds_1 = (\sin\theta - a')ds$; und da der Kontingenzwinkel offenbar $d\theta + \frac{ds}{\varrho}$ ist, so sieht man, daß der Krümmungsradius durch die Formel $\varrho_1\cos\theta = a(\sin\theta - a')$ gegeben wird. Insbesondere findet man für $a' = 0$, verallgemeinert, eine Eigenschaft der Traktrix wieder: das Krümmungszentrum in jedem Punkte einer orthogonalen Trajektorie einer Schar von gleich großen Kreisen gehört der entsprechenden Normale der Mittelpunktskurve an. Es ist ferner leicht zu sehen, daß, sobald einmal θ als Funktion von s bestimmt ist, die natürliche Gleichung der Trajektorien durch Elimination von s aus den Gleichungen

$$s_1 = \int \sin\theta\, ds,\quad \varrho_1 = a\operatorname{tg}\theta$$

hervorgeht. Endlich (§ 626, f) findet man für $a' = 1$, daß das Krümmungszentrum in jedem Punkte einer orthogonalen Trajektorie der oskulierenden Kreise einer Kurve auf die Tangente dieser Kurve fällt.

d) Um die orthogonalen Trajektorien der konfokalen Kegelschnitte

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda} + \frac{y^2}{b^2-\lambda} = 1$$

zu finden, bilde man durch Differentiation und Elimination des Parameters λ die Differentialgleichung dieser Kurvenschar:

$$(y\,dx - x\,dy)(x\,dx + y\,dy) + (a^2 - b^2)\,dx\,dy = 0.$$

Da die Verwandlung von dy/dx in $-dx/dy$ die Gleichung nicht ändert, so kann man schließen, daß die gesuchten Trajektorien die Kegelschnitte selbst sind. Dies klärt sich auf durch die Bemerkung, daß sich bei festgehaltenen x und y aus der ersten Gleichung zwei Werte von λ ergeben. Einer ist kleiner als b^2 und entspricht einer Ellipse; der andere, der zwischen b^2 und a^2 liegt, entspricht einer Hyperbel. Es gehen also durch jeden Punkt der Ebene, rechtwinklig sich schneidend, eine Ellipse und eine Hyperbel, welche ihre Brennpunkte in zwei gegebenen Punkten haben; und die Werte von λ, welche sie innerhalb der ganzen Schar der Kegelschnitte mit denselben beiden Brennpunkten charakterisieren, sind (vgl. § 770, o) die elliptischen Koordinaten des Punktes.

789. Flächen. a) Bei der Darstellung begrenzter Stücke der Erdoberfläche wird man dazu geführt, die Niveaulinien zu betrachten, d. h. die Schnitte der Fläche mit Horizontalebenen. Die Gleichung einer Fläche $F(x, y, z) = 0$ stellt, für jeden Wert von z, eine Niveaulinie dar, projiziert auf die horizontale Ebene Oxy. Die Elimination von z zwischen den Gleichungen $F = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$ führt zu einer Differentialgleichung erster Ordnung, welche gerade die ganze Schar der projizierten Niveaulinien darstellt. Ihr singuläres Integral liefert die Enveloppe dieser Linien, d. h. die Schattengrenze der Fläche auf einer Horizontalebene, für ein vertikales Bündel von Lichtstrahlen. Verwandelt man ferner in der Differentialgleichung der Niveaulinien y' in $-1/y'$, so stellt das allgemeine Integral der neuen Gleichung die horizontalen Projektionen der Linien größten Gefälles dar, der orthogonalen Trajektorien der Niveaulinien.[1])

b) Die Bestimmung der orthogonalen Trajektorien der Erzeugenden einer beliebigen Regelfläche läßt sich mit Hilfe einer einzigen Quadratur erledigen. Wir wollen annehmen, daß die Lage eines Punktes auf der Fläche durch die gewohnten Koordinaten (§ 669) u und v definiert sei, sodaß

$$X = x + av, \quad Y = y + bv, \quad Z = z + cv$$

ist, wo x, y, z, a, b, c nur von u abhängen. Bezeichnet man mit $x', y', \cdots, c'$ die Derivierten dieser Funktionen, so hat man $dX = (x' + a'v)\,du + a\,dv$ u. s. w., und die Orthogonalitätsbedingung $\Sigma a\,dX = 0$ wird

$$(ax' + by' + cz')\,du + dv = 0$$

Daraus gewinnt man sofort durch Integration $v = -\int (ax' + by' + cz')\,du$. Hat man eine Trajektorie $v = f(u)$ gefunden, so sind alle anderen durch $v = f(u) +$ Const. gegeben, und es bestimmen daher zwei beliebige Trajektorien auf allen Erzeugenden gleiche Strecken.

c) Um die Asymptotenlinien einer Regelfläche zu bestimmen, wenden wir die Gleichung (§ 703)

---

1) Betreffs einer genauen Diskussion dieser und anderer bemerkenswerter Linien siehe den „Calcul différentiel" von Boussinesq, pp. 229*—243*.

$$(7) \qquad \mathfrak{A}\,du^2 + \mathfrak{B}\,dv^2 + 2\,\mathfrak{C}\,du\,dv = 0$$

an, in welcher

$$\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{vmatrix},$$

$$\mathfrak{C} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \end{vmatrix}.$$

ist. Hier muß man x, y, z ersetzen durch $X = x + av$, $Y = y + bv$, $Z = z + cv$, sodaß

$$\mathfrak{B} = 0, \quad \mathfrak{C} = \begin{vmatrix} a & a' & x' \\ b & b' & y' \\ c & c' & z' \end{vmatrix}$$

ist, während $\mathfrak{A}$ eine quadratische Funktion von v wird, deren Koeffizienten im allgemeinen von u abhängen. Wenn die Fläche abwickelbar (§ 667) ist, so hat man $\mathfrak{C} = 0$, und die Gleichung (7) reduziert sich auf $du^2 = 0$, d. h. die beiden Scharen von Asymptotenlinien fallen in eine einzige zusammen, welche von den Erzeugenden ($u =$ Const.) gebildet wird. Ist die Fläche nicht abwickelbar, so ist $\mathfrak{C}$ nicht Null, und die Gleichung (7) zerlegt sich in zwei Gleichungen, nämlich $du = 0$, die der Erzeugenden, und

$$(8) \qquad \frac{dv}{du} = v^2 \varphi(u) + v\chi(u) + \psi(u).$$

Also hängt die Bestimmung der Asymptotenlinie einer windschiefen Regelfläche von einer Riccatischen Gleichung ab. Daraus folgt (§ 785, i), daß vier beliebige Asymptotenlinien jede Erzeugende in einem Quadrupel von Punkten treffen, dessen Doppelverhältnis für alle Erzeugenden einen und denselben Wert hat[1]). Ferner gestattet die Kenntnis zweier Asymptotenlinien oder einer Asymptotenlinie mit Hilfe einer bezw. zweier Quadraturen alle anderen zu bestimmen.

d) Die Reduktion auf zwei Quadraturen ist immer möglich bei den Regelflächen mit Leitebene, weil das identische Verschwinden von

$$2\,\mathfrak{C}\varphi(u) = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

1) Einen geometrischen Beweis dieses Satzes, herrührend von A. Demoulin, findet man in der Zeitschrift „Mathesis" (1899, p. 159).

(8) auf eine lineare Gleichung zurückführt, deren Integration (§ 785, e) gerade nur zwei Quadraturen erfordert. Andererseits ist das Verschwinden des obigen Ausdrucks (§ 375) notwendig und hinreichend für die Existenz dreier Konstanten l, m, n, für welche identisch $la + mb + nc = 0$ ist, d. h. dafür, daß die Erzeugenden alle parallel zu einer festen Ebene sind. Ebenso läßt sich die Möglichkeit voraussehen, die Integration von (8) auf zwei Quadraturen zu reduzieren, wenn es sich darum handelt, die Asymptotenlinien der Fläche zu bestimmen, welche von den Hauptnormalen einer gegebenen Kurve gebildet wird; denn diese Kurve ist gerade eine der gesuchten Linien. Setzt man für x, y, z die Werte $X = x + \lambda v$, $Y = y + \mu v$, $Z = z + \nu v$ ein und berücksichtigt die Formeln von Frenet (§ 636), so findet man

$$\mathfrak{A} = \frac{v}{\tau^2}\left(\tau \frac{d}{du}\frac{\tau}{\varrho} - \frac{d\tau}{du}\right), \quad \mathfrak{C} = \frac{1}{\tau}.$$

Mithin nimmt die Formel (8) im vorliegenden Falle die äußerst einfache Form an $2\tau d\frac{1}{v} + \frac{d\tau}{v} = d\frac{\tau}{\varrho}$, wenn man das *a priori* bekannte Integral $v = 0$ beiseite läßt. Daraus folgt $v = 2\sqrt{\tau} \Big/ \int \frac{1}{\sqrt{\tau}} d\frac{\tau}{\varrho}$, wobei man übereinkommt τ unter dem Wurzelzeichen positiv zu nehmen. Insbesondere hat man, wenn mit R eine willkürliche konstante Länge bezeichnet wird, bei den Kurven konstanter Torsion $v = \frac{2R\varrho}{R + \varrho}$, bei den zylindrischen Schraubenlinien (§ 655, c) $v = \sqrt{R\tau}$ und allgemeiner bei jeder Bertrandschen Kurve (§ 658) mit variabler Torsion $\frac{1}{v} - \frac{1}{\sqrt{R\tau}} = \text{Const.}$ Diese Konstante ist nicht willkürlich, sondern hängt von der betrachteten Kurve ab und stellt bei einem gewundenen Kreis gerade die Flexion des Kreises dar.

e) Um die geodätischen Linien des Helikoids mit Leitebene (§ 655, b) zu bestimmen, benutze man das zweite am Anfang von § 705 angegebene Verfahren. Da die Richtungskosinus der Flächennormale proportional zu ay, $-ax$, $x^2 + y^2$ sind, so muß man haben

$$ay(dy\,d^2z - dz\,d^2y) - ax(dz\,d^2x - dx\,d^2z) + (x^2 + y^2)(dx\,d^2y - dy\,d^2x) = 0,$$

d. h.

$$(9) \quad a(x\,dx + y\,dy)d^2z - a(x\,d^2x + y\,d^2y)dz + (x^2 + y^2)(dx\,d^2y - dy\,d^2x) = 0.$$

Inzwischen leitet man aus $x^2 + y^2 = r^2$ unter Erinnerung an

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

ab

$$x\,dx + y\,dy = r\,dr, \quad x\,d^2x + y\,d^2y = r\,d^2r - r^2 d\theta^2,$$

und es ist, wie wir wissen (§ 558, c)

$$dx\,d^2y - dy\,d^2x = (r^2 d\theta^2 + 2dr^2 - r\,d^2r)d\theta;$$

mithin transformiert sich (9) in

$$r'' = \frac{2rr'^2}{r^2 + a^2} + r,$$

wenn man das Integral $\theta =$ Const. beiseite läßt, welches die geradlinigen Erzeugenden definiert. Der linken Seite läßt sich die Form geben $r'dr'/dr$. Es ist daher natürlich als unbekannte Funktion $u = r'^2$ anzunehmen. Auf diese Weise wird die Gleichung

$$\frac{du}{dr} = \frac{4ru}{r^2 + a^2} + 2r;$$

und es ist bekannt (§ 785, e), daß man diese Gleichung integrieren kann, indem man setzt

$$u = ve^{\int \frac{4rdr}{r^2+a^2}} = (r^2 + a^2)^2 v,$$

wo die neue unbekannte Funktion v der Gleichung $\frac{dv}{dr} = \frac{2r}{(r^2 + a^2)^2}$ genügen muß. Daraus folgt

$$v = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2 + a^2}, \quad u = \frac{1}{b^2}(r^2 + a^2)(r^2 + a^2 - b^2)$$

mit der willkürlichen Konstanten b. Endlich findet man

$$\pm(\theta - \theta_0) = \int \frac{b\,dr}{\sqrt{(r^2 + a^2)(r^2 + a^2 - b^2)}}.$$

Die rechte Seite, ein elliptisches Integral, ist im allgemeinen in algebraisch-logarithmischer Form nicht ausdrückbar. Aber für $b = 0$ findet man die Erzeugenden ($\theta =$ Const.) und für $b = a$ eine andere interessante Schar von geodätischen Linien, die leicht aus den Krümmungslinien (§ 707, b) ableitbar sind, da man hat

$$\pm(\theta - \theta_0) = \int \frac{a\,dr}{r\sqrt{r^2 + a^2}} = \log \frac{\sqrt{r^2 + a^2} - a}{r}$$

und endlich

$$r = \frac{2a}{e^{\pm(\theta - \theta_0)} - e^{\mp(\theta - \theta_0)}}.$$

f) Wir wollen zum Schluß die Asymptotenlinien und die Krümmungslinien der Scherkschen Fläche[1])

$$\sin\frac{z}{a} = \operatorname{sh}\frac{x}{a}\operatorname{sh}\frac{y}{a}$$

suchen. Eine leichte Rechnung liefert

$$p\cos\frac{z}{a} = \operatorname{ch}\frac{x}{a}\operatorname{sh}\frac{y}{a}, \quad q\cos\frac{z}{a} = \operatorname{sh}\frac{x}{a}\operatorname{ch}\frac{y}{a},$$

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2}\cdot\cos\frac{z}{a} = \operatorname{ch}\frac{x}{a}\operatorname{ch}\frac{y}{a}.$$

1) Crelles Journal, 1834, S. 200. Diese Fläche ist von G. van der Mensbrugghe (Bulletin de l'Académie de Belgique, 2ème série, vol. XXI, p. 552) diskutiert und experimentell hergestellt worden.

Führt man die hyperbolischen Amplituden ξ und η von x/a und y/a ein, sodaß (§ 409)

$$\operatorname{sh}\frac{x}{a} = \operatorname{tg}\xi, \quad \operatorname{ch}\frac{x}{a} = 1/\cos\xi, \quad \operatorname{th}\frac{x}{a} = \sin\xi \quad \text{u. s. w.}$$

ist, so bekommt man $\mathfrak{L} = \sin\eta$, $\mathfrak{M} = \sin\xi$, d. h. ξ und η messen die Neigung der y-Achse bezw. der x-Achse gegen die Tangentialebene. Wenn man jetzt noch beachtet, daß

$$dx = \frac{a\,d\xi}{\cos\xi}, \quad dy = \frac{a\,d\eta}{\cos\eta}$$

ist, so erhält man auf Grund bekannter Formeln (§ 686)

$$H = 0, \quad K = -\frac{1}{a^2}\cos^2\xi\cos^2\eta\,.$$

Die Fläche ist also eine Minimalfläche, und die Hauptkrümmungsradien haben in jedem Punkte den absoluten Betrag $a\operatorname{ch}\frac{x}{a}\operatorname{ch}\frac{y}{a}\cdot$ Bei der Bestimmung der Krümmungslinien ist es hier zweckmäßig die Formeln von Rodrigue (§ 698) anzuwenden und zu schreiben $dx/d\mathfrak{L} = dy/d\mathfrak{M}$, d. h. $d\xi^2 = d\eta^2$, woraus folgt $\xi \pm \eta = \text{Const.}$ Zur Bestimmung der Asymptotenlinien muß man vor allen Dingen r, s, t berechnen. Aus den Ausdrücken von p und q leitet man sofort ab, indem man den ersten nach x den zweiten nach y deriviert,

$$r = \frac{1+p^2}{a}\operatorname{tg}\frac{z}{a}, \quad t = \frac{1+q^2}{a}\operatorname{tg}\frac{z}{a}\cdot$$

Erinnert man sich ferner an $H = 0$, so findet man

$$s = \frac{(1+q^2)r + (1+p^2)t}{2pq} = \frac{1+q^2}{pq}r = \frac{1+p^2}{pq}t.$$

Inzwischen hat man

$$\frac{1+p^2}{\cos^2\xi} = \frac{pq}{\sin\xi\sin\eta} = \frac{1+q^2}{\cos^2\eta},$$

und daher wird die Differentialgleichung der Asymptotenlinien (§ 703)

$$d\xi^2 + 2\cot\xi\cot\eta\,d\xi\,d\eta + d\eta^2 = 0\,.$$

Diese Gleichung ist leicht reduzierbar auf eine andere bereits behandelte (§ 786, f): es genügt $u = \cos\eta$, $v = \cos\xi$ zu setzen, um zu finden

$$(1-u^2)\,dv^2 + 2uv\,du\,dv + (1-v^2)\,du^2 = 0\,.$$

Das allgemeine Integral ist also

$$(1-u^2)\cos^2\alpha - 2uv\sin\alpha\cos\alpha + (1-v^2)\sin^2\alpha = 0,$$

d. h.

$$\sin\alpha\cos\xi + \cos\alpha\cos\eta = 1$$

mit der willkürlichen Konstanten α. Das singuläre Integral $\cos(\xi \pm \eta) = 0$ stellt eine Krümmungslinie dar, welche in der Projektion auf die (xy)-Ebene von allen Asymptotenlinien berührt wird. Sie ist die Berührungslinie der Fläche mit dem parallel zur z-Achse umbeschriebenen Zylinder und besteht aus unendlich vielen kongruenten Kurven, die in den Ebenen $\cos\frac{z}{a} = 0$ liegen. Jede Kurve (wie alle durch Ebenen senkrecht zur z-Achse hervorgebrachten Schnitte) ähnelt einer gleichseitigen Hyperbel. Da man im vorliegenden Falle $\mathfrak{L} = \pm\cos\xi$, $\mathfrak{M} = \sin\xi$ hat, so ist offenbar $d\xi$ der Kontingenzwinkel; und da aus einer früheren Formel hervorgeht, daß der Krümmungsradius

$$\varrho = \frac{a}{\sin\xi\cos\xi} = a\,(\operatorname{tg}\xi + \cot\xi)$$

ist, so hat man, um den Bogen auszudrücken, $s = \int\varrho\, d\xi = a\log\operatorname{tg}\xi$, folglich $\varrho = a\left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right)$. Die betrachtete Kurve wird also definiert durch eine ähnliche natürliche Gleichung wie die Kettenlinie gleichen Widerstandes (§ 767, c).

Lineare Differentialgleichungen.

790. Wir fahren fort, uns mit den Differentialgleichungen in zwei Veränderlichen zu beschäftigen und wollen jetzt speziell diejenigen betrachten, welche die unbekannte Funktion und ihre Derivierten linear enthalten, d. h. die Gleichungen von der Form

$$y^{(n)} + y^{(n-1)}f_1(x) + y^{(n-2)}f_2(x) + \cdots + y'f_{n-1}(x) + yf_n(x) = f(x). \tag{10}$$

Sie heißen lineare Differentialgleichungen. Wenn $f(x)$ gleich 0 ist, so heißt die Gleichung unvollständig:

$$y^{(n)} + y^{(n-1)}f_1(x) + y^{(n-2)}f_2(x) + \cdots + y'f_{n-1}(x) + yf_n(x) = 0. \tag{11}$$

Diese Gleichung genießt offenbar die Eigenschaft, daß jedes Integral, d. h. jedes der Gleichung (11) genügende y, nicht aufhört ihr zu genügen, wenn es mit einer Konstanten multipliziert oder mit einer andern analogen Funktion zu einer Summe vereinigt wird. Dies vorausgeschickt ist leicht folgendes zu beweisen: Wenn $y_1, y_2, \ldots, y_n$ linear unabhängige partikuläre Integrale einer unvollständigen linearen Gleichung n-ter Ordnung sind, so ist das allgemeine Integral

$$y = a_1y_1 + a_2y_2 + \cdots + a_ny_n, \tag{12}$$

wo $a_1, a_2, \ldots, a_n$ willkürliche Konstanten sind. Beschränken wir uns der größeren Klarheit halber auf den Spezialfall $n = 3$ und nehmen wir an, daß u, v, w drei linear unabhängige Funktionen sind, die der Gleichung

$$y''' + y''\varphi(x) + y'\chi(x) + y\psi(x) = 0 \tag{13}$$

genügen, sodaß man identisch hat

$$u''' + u''\varphi + u'\chi + u\psi = 0,\; v''' + v''\varphi + v'\chi + v\psi = 0,\; w''' + w''\varphi + w'\chi + w\psi = 0.$$

Für das Zusammenbestehen dieser vier Relationen ist notwendig, daß jede Funktion y, welche der Gleichung (13) genügt, mit u, v, w durch die Relation

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' & y''' \\ u & u' & u'' & u''' \\ v & v' & v'' & v''' \\ w & w' & w'' & w''' \end{vmatrix} = 0$$

verbunden ist, und dies erfordert (§ 375), daß zwischen den vier Funktionen eine lineare Relation besteht. In dieser Relation zwischen y, u, v, w darf aber y nicht fehlen, weil sonst u, v, w nicht linear unabhängig wären, wie doch vorausgesetzt ist. Es ist also $y = au + bv + cw$, wo a, b, c nicht nur Konstanten, sondern willkürliche Konstanten sind, da nach der zu Anfang gemachten Bemerkung behauptet werden darf, daß die Funktion $y = au + bv + cw$ tatsächlich der Gleichung (13) genügt, welche Werte die Konstanten a, b, c auch haben mögen.

791. Wenn das allgemeine Integral der Gleichung (11) bekannt ist, so läßt sich das der vollständigen Gleichung (10) durch n Quadraturen erhalten, nach einem Verfahren, welches nach Lagrange Variation der willkürlichen Konstanten genannt wird. Man versucht nämlich der Gleichung (10) durch denselben Ausdruck (12) zu genügen, in welchem man die a als passend zu bestimmende Funktionen von x voraussetzt. Es sei z. B. gegeben die Gleichung

$$(14) \qquad y''' + y''\varphi(x) + y'\chi(x) + y\psi(x) = f(x),$$

und es seien drei linear unabhängige partikuläre Integrale u, v, w der zugehörigen unvollständigen Gleichung (13) bekannt. Versuchen wir der Gleichung (14) durch den Ansatz $y = au + bv + cw$ zu genügen, wo a, b, c drei unbekannte Funktionen von x sind, denen wir immer zwei Bedingungen auferlegen können:

$$a'u + b'v + c'w = 0, \quad a'u' + b'v' + c'w' = 0.$$

Setzen wir jetzt die Ausdrücke von y und seinen Derivierten

$$y' = au' + bv' + cw', \quad y'' = au'' + bv'' + cw'',$$
$$y''' = au''' + bv''' + cw''' + a'u'' + b'v'' + c'w''$$

in (14) ein, so finden wir als dritte Bedingung $a'u'' + b'v'' + c'w'' = f(x)$, sodaß sich a', b', c' aus dem System

$$\begin{aligned} a'u + b'v + c'w &= 0, \\ a'u' + b'v' + c'w' &= 0, \\ a'u'' + b'v'' + c'w'' &= f(x) \end{aligned}$$

bestimmen lassen. Dieses System läßt eine ganz bestimmte Lösung zu, da u, v, w linear unabhängig sind und daher die Determinante des Systems

$$\begin{vmatrix} u & u' & u'' \\ v & v' & v'' \\ w & w' & w'' \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist. Sind auf diese Weise a', b', c' gefunden, so erhält man durch einfache Quadraturen die Ausdrücke von a, b, c und dann das allgemeine Integral y mit drei willkürlichen Konstanten. Im allgemeinen Falle hat man sich in (12) jedes a durch eine passende Funktion von x, vermehrt um eine willkürliche Konstante, ersetzt zu denken. Man sieht, daß das allgemeine Integral der Gleichung (10) die Form hat

$$y = y_0 + a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_n y_n. \tag{15}$$

Es kommt vor, daß man ein partikuläres Integral y_0 der vollständigen Gleichung kennt. Alsdann braucht man nur n (linear unabhängige) partikuläre Integrale $y_1, y_2, \ldots$ der zugehörigen unvollständigen Gleichung zu haben, um das allgemeine Integral (15) hinschreiben zu können, ohne daß es nötig ist, die Lagrangesche Methode in Anspruch zu nehmen. Setzt man in der Tat in (10) $y = y_0 + z$, so sieht man sofort, daß z der Gleichung (11) genügen muß.

792. Theorem. Die Integration einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung läßt sich, wenn man m linear unabhängige partikuläre Integrale der zugehörigen unvollständigen Gleichung kennt, immer reduzieren auf die Integration einer linearen Gleichung $(n-m)$-ter Ordnung und m darauffolgende Quadraturen.

Es seien in der Tat $y_1, y_2, \ldots$ die m bekannten Integrale der Gleichung (11) und

$$\alpha = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & y_1'' & \cdots & y_1^{(m-1)} \\ y_2 & y_2' & y_2'' & \cdots & y_2^{(m-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_m & y_m' & y_m'' & \cdots & y_m^{(m-1)} \end{vmatrix} \gtrless 0$$

ihre Wronskische Determinante. Man versuche, wie im vorigen Paragraphen, der Gleichung (10) durch den Ansatz $y = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_m y_m$ zu genügen, indem man den Derivierten $a_1', a_2', \ldots$ die Bedingung auferlegt, den algebraischen Komplementen der Elemente der letzten Vertikalreihe von α proportional zu sein, sodaß also, wenn mit z der Proportionalitätsfaktor bezeichnet wird,

$$\sum_1^m a_i' y_i = 0, \quad \sum_1^m a_i' y_i^{(\nu)} = 0 \ (\nu = 1, 2, \ldots, m-2), \quad \sum_1^m a_i' y_i^{(m-1)} = \alpha z$$

ist. Es ist leicht zu sehen, daß die Derivierten von y durch folgende Formeln gegeben sind:

$$y^{(\nu)} = \sum_1^m a_i y_i^{(\nu)} \text{ (für } \nu < m), \quad y^{(m)} = \sum_1^m a_i y_i^{(m)} + \alpha z,$$

$$y^{(\nu)} = \sum_1^m a_i y_i^{(\nu)} + \alpha z^{(\nu - m)} + \alpha_{1,\nu} z^{(\nu - m - 1)} + \cdots + \alpha_{\nu - m, \nu} z \text{ (für } \nu > m).$$

Setzt man diese Ausdrücke in (10) ein, so gelangt man zu einer Gleichung von der Form

$$\alpha z^{(n-m)} + \alpha_1 z^{(n-m-1)} + \cdots + \alpha_{n-m} z = f(x).$$

Kennt man das allgemeine Integral dieser linearen Gleichung $(n-m)$-ter Ordnung, so sind auch die m Funktionen a' bekannt, von denen man durch m Quadraturen zu den a gelangen kann. Der obige Beweis ist die natürliche Ausdehnung desjenigen, welcher uns zu dem Resultat des § 791 geführt hat, das der Annahme $n = m$ entspricht. Für $m = n - 1$ sieht man, wenn man sich an das über die linearen Gleichungen erster Ordnung Gesagte (§ 785, e) erinnert, folgendes: Die Integration einer linearen Gleichung n-ter Ordnung ist, wenn man $n-1$ linear unabhängige Integrale der zugehörigen unvollständigen Gleichung kennt, auf $n+1$ Quadraturen reduzierbar.

793. Beispiele. a) Die lineare Gleichung erster Ordnung $y' + y\varphi(x) = f(x)$ läßt sich immer integrieren, da man von der unvollständigen Gleichung $y' + y\varphi(x) = 0$ das allgemeine Integral $y = ae^{-\int \varphi\, dx}$ kennt und die Lagrangesche Methode $a'e^{-\int \varphi\, dx} = f(x)$ liefert. Es ist also

$$a = \int e^{\int \varphi\, dx} f\, dx, \quad y = e^{-\int \varphi\, dx} \int e^{\int \varphi\, dx} f\, dx.$$

b) Die Gleichung zweiter Ordnung $y'' + y'\varphi + y\psi = f$ läßt sich mittelst dreier Quadraturen integrieren, wenn eine Funktion u bekannt ist, die der Bedingung $u'' + u'\varphi + u\psi = 0$ genügt. Setzt man in der Tat $y = au$, so geht die Gleichung über in $a''u + a'(2u' + \varphi) = f$. Diese Gleichung ist in a' von erster Ordnung, und man kann aus ihr a' durch zwei Quadraturen gewinnen. Darauf ergibt sich

$$y = u \int \frac{\int u e^{\int \varphi\, dx} \cdot f\, dx}{u^2 e^{\int \varphi\, dx}}\, dx.$$

c) Es ist nützlich zu wissen, daß die Integration jeder unvollständigen Gleichung zweiter Ordnung sich auf die einer Riccatischen Gleichung reduzieren läßt und eine darauffolgende Quadratur. In der Tat transformiert sich mit Hilfe der Substitution $y = e^{\int z\, dx}$

$$y'' + y'\varphi + y\psi = 0 \quad \text{in} \quad z' + z^2 + z\varphi + \psi = 0.$$

Auf diese Weise werfen die Eigenschaften der linearen Gleichung Licht auf die der Riccatischen Gleichung und umgekehrt.

d) Mit Hilfe von vier Quadraturen muß sich die Gleichung dritter Ordnung (14) integrieren lassen, wenn man zwei Funktionen u und v kennt, die der Gleichung (13) genügen. Und in der Tat hat man, wenn $y = au + bv$, $a' = -vz$, $b' = uz$, $\alpha = uv' - vu'$ gesetzt wird,

$$y' = au' + bv', \quad y'' = au'' + bv'' + \alpha z, \quad y''' = au''' + bv''' + \alpha z' + 2\alpha' z.$$

Die Gleichung transformiert sich in $\alpha z' + (2\alpha' + \alpha\varphi)z = f$, und mittels zweier Quadraturen leitet man daraus ab

$$z = \frac{\int \alpha e^{\int \varphi\, dx} \cdot f\, dx}{\alpha^2 e^{\int \varphi\, dx}};$$

darauf gelangt man durch zwei weitere Quadraturen zu dem allgemeinen Integral $y = v\int uz\,dx - u\int vz\,dx$.

794. Gleichungen mit konstanten Koeffizienten. Wenn die Koeffizienten der unbekannten Funktion und ihrer Derivierten in der Gleichung (10) konstante Werte haben, so ist es leicht, n linear unabhängige partikuläre Integrale der unvollständigen Gleichung (11) zu finden und folglich mit Hilfe von n Quadraturen das allgemeine Integral der vollständigen Gleichung. Man versuche in der Tat (11) durch $y = e^{kx}$ zu befriedigen; diese Gleichung verwandelt sich in eine Bedingung für k, die sogenannte charakteristische Gleichung:

$$\varphi(k) = k^n + k^{n-1}f_1 + k^{n-2}f_2 + \cdots + kf_{n-1} + f_n = 0.$$

Wenn die Wurzeln $k_1, k_2, \ldots$ von $\varphi(k)$ alle verschieden sind, so sind die Integrale $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \ldots$ linear unabhängig, da ihre Wronskische Determinante das Produkt von e^{-xf_1} mit (§ 27, d)

$$\begin{vmatrix} 1 & k_1 & k_1^2 & \ldots & k_1^{n-1} \\ 1 & k_2 & k_2^2 & \ldots & k_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & k_n & k_n^2 & \ldots & k_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{i=n-1} (k_{i+1} - k_i)(k_{i+2} - k_i)\ldots(k_n - k_i) \gtrless 0$$

ist. Also ist das allgemeine Integral der unvollständigen Gleichung

$$(16) \qquad y = a_1 e^{k_1 x} + a_2 e^{k_2 x} + \cdots + a_n e^{k_n x},$$

wo $a_1, a_2, \ldots$ willkürliche Konstanten sind. Man lege nunmehr den a_i die Bedeutung von Funktionen bei, deren Derivierte, definiert durch das System

$$k_1^\nu a_1' e^{k_1 x} + k_2^\nu a_2' e^{k_2 x} + \cdots + k_n^\nu a_n' e^{k_n x} = \begin{cases} 0, \text{ für } \nu = 0, 1, \ldots, n-2, \\ f(x), \text{ für } \nu = n-1, \end{cases}$$

$a_i' = e^{-k_i x} f(x)/\varphi'(k_i)$ sind. Die Methode von Lagrange führt zu der Behauptung, daß das allgemeine Integral der vollständigen Gleichung

$$y = \frac{e^{k_1 x}}{\varphi'(k_1)} \int e^{-k_1 x} f(x)\,dx + \frac{e^{k_2 x}}{\varphi'(k_2)} \int e^{-k_2 x} f(x)\,dx + \cdots + \frac{e^{k_n x}}{\varphi'(k_n)} \int e^{-k_n x} f(x)\,dx$$

ist. Hat ferner die charakteristische Gleichung vielfache Wurzeln, so ist die Zahl der partikulären Integrale e^{kx} kleiner als die Ordnung der Gleichung, und die Formel (16) hört auf das allgemeine Integral der unvollständigen Gleichung darzustellen. Man versuche alsdann der Gleichung (11) in allgemeinerer Weise durch $y = x^\mu e^{kx}$ zu genügen. Die linke Seite wird gleich dem Produkt von e^{kx} mit

$$x^\mu \varphi(k) + \mu x^{\mu-1}\varphi'(k) + \frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2} x^{\mu-2}\varphi''(k) + \cdots + \varphi^{(\mu)}(k).$$

Wenn α eine r-fache Wurzel ist, d. h. (§ 450, c) wenn

$$\varphi(\alpha) = 0, \quad \varphi'(\alpha) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi^{(r-1)}(\alpha) = 0$$

ist, so reduziert sich der letzte Ausdruck für $k = \alpha$ identisch auf Null für jeden der Werte $0, 1, 2, \ldots, r-1$ von μ. Auf solche Weise erhält man r partikuläre Integrale: $e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, \ldots, x^{r-1}e^{\alpha x}$. Hat also die charakteristische Gleichung die Wurzeln $\alpha, \beta, \ldots$ mit den bezüglichen Ordnungen $r, s, \ldots$, so ist das allgemeine Integral der unvollständigen Gleichung

$$y = (a_0 + a_1 x + \cdots + a_{r-1}x^{r-1})e^{\alpha x} + (b_0 + b_1 x + \cdots + b_{s-1}x^{s-1})e^{\beta x} + \cdots,$$

wo die n Konstanten $a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots$ willkürlich sind. Wir wollen schließlich noch sagen, daß die gewöhnlich vorkommenden Gleichungen reelle Koeffizienten haben. Da es erwünscht ist, auch y in reeller Form zu haben, so sucht man das Imaginäre herauszuschaffen, indem man bemerkt, daß die Summe $ae^{(\alpha+i\beta)x} + be^{(\alpha-i\beta)x}$, zu welcher in dem Ausdruck des allgemeinen Integrals jedes Paar $\alpha \pm i\beta$ von konjugierten Wurzeln (§ 447) Veranlassung gibt, sich auf die reelle Form $(A\cos\beta x + B\sin\beta x)e^{\alpha x}$ bringen läßt, wobei die neuen willkürlichen Konstanten $A = a + b$, $B = i(a-b)$ reell zu nehmen sind.

795. Beispiele. a) Die Gleichung $y'' + y = f(x)$ zu integrieren. Hier ist $k^2 + 1 = 0$ die charakteristische Gleichung, und es sind daher e^{ix}, e^{-ix} die partikulären Integrale der unvollständigen Gleichung. Man kann dieselben, wie wir gesagt haben, durch $\sin x$ und $\cos x$ ersetzen. Also ist das allgemeine Integral von $y'' + y = 0$ folgendes: $y = a\sin x + b\cos x$. Läßt man die Konstanten variieren, so erhält man die Gleichungen

$$a'\sin x + b'\cos x = 0, \quad a'\cos x - b'\sin x = f(x),$$

aus denen man ableitet $a' = f(x)\cos x$, $b' = -f(x)\sin x$, mithin

$$y = \sin x \int f(x)\cos x\,dx - \cos x \int f(x)\sin x\,dx.$$

b) Die Gleichung $y''' = f(x)$ zu integrieren. Die charakteristische Gleichung hat 0 als dreifache Wurzel, und das allgemeine Integral von $y''' = 0$ ist also, wie vorauszusehen war, $y = a + bx + cx^2$. Die Variation der Konstanten liefert das System

$$a' + b'x + c'x^2 = 0, \quad b' + 2c'x = 0, \quad 2c' = f(x),$$

aus welchem man entnimmt $a' = \frac{1}{2}x^2 f(x)$, $b' = -xf(x)$, $c' = \frac{1}{2}f(x)$. Also ist das allgemeine Integral von $y''' = f(x)$ folgendes:

$$y = \tfrac{1}{2}\int x^2 f(x)\,dx - x\int xf(x)\,dx + \tfrac{1}{2}x^2\int f(x)\,dx.$$

Dies ist übrigens ein gewissermaßen evidentes Resultat; denn wenn man successiv setzt

$$\int f(x)\,dx = f_1(x), \quad \int f_1(x)\,dx = f_2(x), \quad \int f_2(x)\,dx = f_3(x),$$

so erhält man durch partielle Integration

$$\int xf(x)dx = xf_1(x) - f_2(x), \quad \int x^2 f(x)dx = x^2 f_1(x) - 2xf_2(x) + 2f_3(x),$$

und der für das allgemeine Integral gefundene Ausdruck wird $y = f_3(x)$.

c) Die Gleichung $y^{\mathrm{IV}} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = f(x)$ zu integrieren. Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung sind -1, -1, i, $-i$. Also ist das allgemeine Integral der unvollständigen Gleichung $y = (a + bx)e^{-x} + \alpha \sin x + \beta \cos x$. Nach der Lagrangeschen Methode berechnet man darauf das allgemeine Integral der vollständigen Gleichung:

$$y = \tfrac{1}{2}(1 + x)e^{-x}\int e^x f(x)\,dx - \tfrac{1}{2}e^{-x}\int xe^x f(x)\,dx$$
$$- \tfrac{1}{2}\sin x\int f(x)\sin x\,dx - \tfrac{1}{2}\cos x\int f(x)\cos x\,dx.$$

Wenn $f(x)$ gegeben ist und die vier angedeuteten Quadraturen ausgeführt sind, so kommt man dazu, y auf die Form (15) zu bringen, d. h. ein partikuläres Integral y_0 in Evidenz zu setzen, das man auf den einfachsten Ausdruck reduzieren kann, indem man davon alle der unvollständigen Gleichung genügenden Bestandteile fortnimmt. Auf diese Weise erhält man z. B., wenn $f(x) = e^{-x}$ ist, $y_0 = \frac{1}{4}x^2 e^{-x}$.

d) Die Gleichung $y = xy' + x^2 y''$ zu integrieren. Wenn wir dieser Gleichung durch $y = x^n$ zu genügen versuchen, so finden wir, daß man haben muß $1 = n + n(n-1)$, d. h. $n = \pm 1$. Also ist das allgemeine Integral $y = ax + b/x$. Wenn ferner die zu integrierende Gleichung $y = xy' + x^2y'' + f(x)$ ist, so liefert die Lagrangesche Methode

$$y = \frac{1}{2}x\int f(x)\,d\frac{1}{x} + \frac{1}{2x}\int f(x)\,dx.$$

e) Um $y + xy' + x^2y'' = x$ zu integrieren, setze man wie vorhin in der unvollständigen Gleichung $y = x^n$. Man erhält $n = \pm i$; und da

$$x^{\pm i} = e^{\pm i \log x} = \cos\log x \pm i \sin\log x$$

ist, so sieht man, daß $\cos\log x$ und $\sin\log x$ zwei partikuläre Integrale sind. Da ferner ein partikuläres Integral der vollständigen Gleichung unmittelbar auf der Hand liegt und $\frac{1}{2}x$ ist, so kann man behaupten, daß das allgemeine Integral der vorgelegten Gleichung

$$y = \tfrac{1}{2}x + a\sin\log x + b\cos\log x$$

lautet.

f) In analoger Weise kann man $x^2y'' - (2\mu - 1)xy' + \mu^2 y = 0$ integrieren. Setzt man $y = x^n$, so erkennt man, daß es nur einen einzigen möglichen Wert für n gibt, nämlich $n = \mu$; aber die Kenntnis des partikulären Integrals x^μ ist ausreichend (§ 793, b), um das allgemeine Integral zu finden. Setzt man $y = x^\mu z$, so wird die Gleichung $xz'' + z' = 0$ und gibt $z = a + b\log x$. Also ist $y = x^\mu(a + b\log x)$. Zu diesem Resultate gelangt man auch mit Hilfe einer Änderung der unabhängigen Veränderlichen: $x = e^t$. Da (§ 558, a)

$$y' = e^{-t}\frac{dy}{dt}, \quad y'' = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

ist, so wird die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\mu\frac{dy}{dt} + \mu^2 y = 0.$$

Diese hat konstante Koeffizienten, und ihre charakteristische Gleichung gestattet μ als Doppelwurzel. Also hat das allgemeine Integral die Form $(a + bt)e^{\mu t}$, und es ist daher das allgemeine Integral der vorgelegten Gleichung $y = x^\mu(a + b\log x)$.

g) In ähnlicher Weise setze man, um $(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0$ zu integrieren, $x = \cos t$, sodaß

$$y' = -\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt}, \quad y'' = -\frac{\cot s}{\sin^3 t}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{\sin^2 t}\frac{d^2y}{dt^2}$$

ist. Die Gleichung transformiert sich in $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$ und gestattet daher die partikulären Integrale $\cos t = x$, $\sin t = \sqrt{1 - x^2}$. Also ist das allgemeine Integral $y = ax + b\sqrt{1 - x^2}$.

h) Die Ersetzung der unabhängigen Veränderlichen durch eine andere geschieht nicht immer, wie es der Zufall fügt. Sie wird häufig durch die Absicht bestimmt, eine gegebene Vereinfachung in der betrachteten Gleichung zu erreichen. So kann man in der Gleichung $(1 + x^2)y'' + xy' = \mu^2 y$, die sich durch Einführung einer neuen unabhängigen Veränderlichen t in

$$(1 + x^2)t'^2\frac{d^2y}{dt^2} + \{(1 + x^2)t'' + xt'\}\frac{dy}{dt} = \mu^2 y$$

verwandelt, das Glied mit dy/dt beseitigen, indem man $\frac{t''}{t'} + \frac{x}{1 + x^2} = 0$ nimmt, d. h. $t' = 1/\sqrt{1 + x^2}$ und infolgedessen $t = \int\frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$. Durch diese Substitution geht die vorgelegte Gleichung über in $d^2y/dt^2 = \mu^2 y$ und hat als allgemeines Integral $ae^{\mu t} + be^{-\mu t}$. Beachtet man, daß

$e^t = x + \sqrt{1+x^2}$, $e^{-t} = -x + \sqrt{1+x^2}$ ist, so sieht man, daß das gesuchte allgemeine Integral folgendermaßen lautet:

$$y = a\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^n + b\left(-x + \sqrt{1+x^2}\right)^n.$$

i) Um die von Legendre betrachtete Gleichung $y = \frac{1}{2}y' + xy''$ zu integrieren, setze man $x = t^2$ und bemerke, daß

$$y' = \frac{1}{2t}\frac{dy}{dt}, \quad y'' = -\frac{1}{4t^3}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{4t^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

wird. Die Gleichung geht über in $d^2y\, dt^2 = 4y$, und daher ist ihr allgemeines Integral

$$y = ae^{2\sqrt{x}} + be^{-2\sqrt{x}}.$$

Lepaige hat gefunden, daß allgemeiner die Gleichung $y = my' + xy''$ für unendlich viele Werte von m integrabel ist. Man kann sie in der Tat (§ 793, c), indem man $y = e^{\int z\,dx}$ setzt, auf eine Riccatische Gleichung reduzieren: $x(z' + z^2) + mz = 1$. Setzt man $z = uv$ und bestimmt v derart, daß $xv' + mv = 0$ ist (dies erreicht man, indem man $v = x^{-m}$ nimmt), so findet man, daß u der Gleichung $xv(u' + vu^2) = 1$, d. h. $u' + u^2x^{-m} = x^{m-1}$, genügt. Durch die Substitution $x = t^\mu$ transformiert sich die letzte Gleichung in

$$\frac{du}{dt} + \mu u^2 t^{\mu(1-m)-1} = \mu t^{\mu m - 1},$$

ferner $\left(\text{wenn man } m \gtrless 1 \text{ annimmt und } \mu = \frac{1}{1-m} \text{ setzt}\right)$ in

$$\frac{du}{dt} + \frac{u^2}{1-m} = \frac{t^n}{1-m}, \text{ wobei } n = -\frac{1-2m}{1-m}, \text{ folglich } \frac{n}{2n+4} = m - \frac{1}{2}$$

ist. Die vorgelegte Gleichung ist also integrabel (§ 786, h) für

$$m = \pm\tfrac{1}{2},\ \pm\tfrac{3}{2},\ \pm\tfrac{5}{2},\ \pm\tfrac{7}{2},\ \pm\tfrac{9}{2},\ \ldots .$$

j) Versuchen wir die Integration der nicht linearen Gleichung

$$y'' + 3y' + 2(y - y^3) = 0,$$

indem wir den von Mansion angegebenen Weg einschlagen. Setzt man $y' + y = z$, so geht die Gleichung über in $z' + 2z = 2y^3$. Die Methode der Variation der Konstanten führt zu dem Ansatz $y = ue^{-x}$, $z = ve^{-2x}$, und die Funktionen u, v müssen den Bedingungen $u' = ve^{-x}$, $v' = 2u^3e^{-x}$ genügen. Durch Elimination von x erhält man $v\,dv = 2u^3du$. Also ist $v^2 = u^4 - a^4$. Setzt man ferner in $u' = ve^{-x}$ für v seinen Ausdruck ein und integriert, so kommt

$$e^{-x} = \mp \int \frac{du}{\sqrt{u^4 - a^4}}.$$

Auf der rechten Seite haben wir ein elliptisches Integral. Wüßten wir u als Funktion von x auszudrücken, so würden wir auch den Ausdruck des allgemeinen Integrals ue^{-x} haben. Jedenfalls können wir unendlich viele partikuläre Integrale erhalten, indem wir $a = 0$ annehmen. Alsdann ergibt sich

$$e^{-x} = c \pm \frac{1}{u}, \quad y = \frac{\pm 1}{1 - ce^x}.$$

In analoger Weise läßt sich allgemeiner die Gleichung

$$y'' + (n+1)y' + n(y - y^{2n-1}) = 0$$

behandeln, und man kann für alle ganzzahligen Werte von $1/n$ ihr allgemeines Integral in expliziter, endlicher Form erhalten. Man findet z. B., daß das allgemeine Integral der Gleichung $y^4 - y^3 y'' = 1$ folgendermaßen lautet:

$$y^2 = ae^{2x} + be^{-2x} \pm \sqrt{1 + 4ab}.$$

Dies läßt sich auch auf anderem Wege (§ 785, d) herleiten.

k) Die Anwendung der Reihen ist bei der Integration gewisser Differentialgleichungen äußerst nützlich. Z. B. läßt sich die Gleichung $y'' + \frac{4}{x} y' + n^2 y = 0$, welche in der Mechanik vorkommt, integrieren unter Zuhilfenahme der Reihe

$$f_\nu(x) = 1 - \frac{x^2}{2(\nu+1)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot (\nu+1)(\nu+3)} - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot (\nu+1)(\nu+3)(\nu+5)} + \cdots.$$

Beachtet man in der Tat, daß $f_\nu''(x) + \frac{\nu}{x} f_\nu'(x) + f_\nu(x) = 0$ ist, und setzt man in der vorgelegten Gleichung $y = x^\mu f(nx)$, so findet man

$$f_\nu''(nx) + \frac{2\mu + 4}{nx} f_\nu'(nx) + \left(1 + \frac{\mu(\mu+3)}{n^2 x^2}\right) f_\nu(nx) = 0.$$

Diese Gleichung kann nur dann mit der vorhin erhaltenen Relation zusammenfallen, wenn $\mu(\mu+3) = 0$, $\nu = 2\mu + 4$ ist. Es muß also sein $\mu = 0$, $\nu = 4$ oder $\mu = -3$, $\nu = -2$. Mithin ist das gesuchte allgemeine Integral $y = af_4(nx) + bx^{-3} f_{-2}(nx)$. Übrigens lassen sich die Funktionen f_{-2} und f_4 sehr einfach in endlicher Form ausdrücken. Zu dem Ende bemerke man, daß $f_{\nu+2}(x) = -\frac{\nu+1}{x} f_\nu'(x)$ ist. Inzwischen sieht man (§ 332, a), daß

$$f_0(x) = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \cdots = \cos x$$

ist. Daraus folgt

$$f_{-2}(x) = 1 + \int_0^x x \cos x \, dx = x \sin x + \cos x,$$

ferner

$$f_2(x) = -\frac{1}{x} f_0'(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad f_4(x) = -\frac{3}{x} f_2'(x) = \frac{3 \sin x}{x^3} - \frac{3 \cos x}{x^2}.$$

Schließlich können wir das allgemeine Integral in folgender Form schreiben:

$$y = \frac{a}{x^3}(\sin nx - nx \cos nx) + \frac{b}{x^3}(\cos nx + nx \sin nx).$$

l) Wichtig ist die **hypergeometrische Reihe**[1])

---

1) Siehe Novi „Algebra superiore" p. 286 oder den „Cours d'Analyse" von Jordan, t. I, p. 154.

$$f(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(1+\alpha)\cdot\beta(1+\beta)}{1\cdot2\cdot\gamma(1+\gamma)}x^2+\frac{\alpha(1+\alpha)(2+\alpha)\cdot\beta(1+\beta)(2+\beta)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma(1+\gamma)(2+\gamma)}x^3+\cdots,$$

welche, wie man leicht verifiziert, die (Gaußsche) Differentialgleichung

$$(x-x^2)y''+\{\gamma-(1+\alpha+\beta)x\}y'=\alpha\beta y$$

erfüllt. Versucht man dieser Gleichung allgemeiner durch $y=x^\mu f(\alpha',\beta',\gamma',x)$ zu genügen, so findet man, daß entweder $\mu=0$, $\alpha'=\alpha$, $\beta'=\beta$, $\gamma'=\gamma$ sein muß oder $\mu=1-\gamma$, $\alpha'=1+\alpha-\gamma$, $\beta'=1+\beta-\gamma$, $\gamma'=2-\gamma$. Also ist das allgemeine Integral

$$y=af(\alpha,\beta,\gamma,x)+bx^{1-\gamma}f(1+\alpha-\gamma,\ 1+\beta-\gamma,\ 2-\gamma,\ x).$$

Es ist nützlich zu wissen, daß die hypergeometrische Reihe als Spezialfälle die Entwickelungen verschiedener Funktionen einschließt. So findet man für $\beta=\gamma$ oder $\alpha=\gamma=1$ oder $\alpha=\beta=1$ und $\gamma=2$ die Funktionen $(1-x)^{-\alpha}$, $e^{\beta x}$, $-\frac{1}{x}\log(1-x)$. Man beachte schließlich, daß die vorhin erhaltenen partikulären Integrale in eins zusammenfallen, wenn $\gamma=1$ ist; es ist aber bekannt, daß dieses einzige Integral für die Kenntnis des allgemeinen Integrals hinreichend ist. So z. B. wird für $\beta=1$ die Gleichung

$$(x-x^2)y''+\{1-(2+\alpha)x\}y'=\alpha y$$

und läßt das partikuläre Integral $(1-x)^{-\alpha}$ zu. Eine leichte Rechnung (§ 793, b) zeigt, daß ihr allgemeines Integral folgendermaßen lautet:

$$y=a(1-x)^{-\alpha}+b\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1-x}{1+\alpha}+\frac{(1-x)^2}{2+\alpha}+\frac{(1-x)^3}{3+\alpha}+\cdots\right),$$

vorausgesetzt, daß die rechte Seite nicht bedeutungslos ist.

Gleichungen in mehreren Veränderlichen.

796. Totale Differentialgleichungen. Statt $u\,dx+v\,dy=0$ möge gegeben sein die Gleichung

$$u\,dx+v\,dy+w\,dz=0, \tag{17}$$

in welcher u, v, w bekannte Funktionen von x, y, z sind. Betrachtet man eine der drei Veränderlichen, z. B. z, als Funktion der beiden andern (unabhängigen), so zerlegt sich (17) offenbar in

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{u}{w},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{v}{w}, \tag{18}$$

woraus sich leicht ableiten läßt, daß die Funktionen u, v, w nicht beliebig gegeben sein dürfen. Da in der Tat

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial}{\partial y}\frac{u}{w}+\frac{v}{w}\frac{\partial}{\partial z}\frac{u}{w},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}\frac{v}{w}+\frac{u}{w}\frac{\partial}{\partial z}\frac{v}{w}$$

ist, d. h.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{w}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{u}{w^2}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{v}{w^2}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{uv}{w^3}\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\frac{1}{w}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v}{w^2}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{u}{w^2}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{uv}{w^3}\frac{\partial w}{\partial z},$$

so sieht man durch Gleichsetzung (§ 368) der beiden Ausdrücke, daß

(19) $$u\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + v\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + w\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

sein muß. Dies ist eine notwendige Bedingung für die Existenz einer Relation zwischen den Veränderlichen x, y, z, deren totale Differentiale durch (17) verbunden sind. Um zu beweisen, daß die genannte Bedingung auch hinreichend ist, wollen wir zeigen, daß, falls dieselbe erfüllt ist, die Integration der Gleichung (17) oder des mit ihr äquivalenten Systems der Gleichungen (18) möglich ist. Die zweite Gleichung des Systems kann man als eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung zwischen den Veränderlichen y und z betrachten. Bezeichnet man daher mit $\varphi(x)$ eine willkürliche Funktion, so hat ihr allgemeines Integral die Form

(20) $$f(x, y, z) = \varphi(x),$$

da bei dieser Integration x als eine Konstante behandelt werden muß, von der jedoch v und w abhängen. Inzwischen bemerke man, daß sich durch Derivation von (20) bei konstant gehaltenem x wieder die Differentialgleichung ergeben muß, von der man ausgegangen ist, und daß man daher hat

$$\frac{1}{v}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{w}\frac{\partial f}{\partial z} = \mu,$$

wo μ eine passende Funktion von x, y, z ist. Wünscht man nunmehr, daß auch die erste der Gleichungen (18) erfüllt ist, so muß man φ derart bestimmen, daß man bei Derivation von (20) unter Voraussetzung eines konstanten y erhält

(21) $$\varphi'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \mu u.$$

Hierzu ist notwendig (und hinreichend), daß $\frac{\partial f}{\partial x} - \mu u$ eine Funktion von x allein ist. Alles reduziert sich also darauf, zu zeigen, daß, falls die Bedingung (19) erfüllt ist, die Derivierte von $\frac{\partial f}{\partial x} - \mu u$ nach y, bei deren Bildung z als die durch die Gleichung (20) definierte Funktion von x, y betrachtet wird, gleich Null ist. Es soll mit andern Worten

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mu u\right) - \frac{v}{w}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mu u\right) = 0$$

sein. Nun hat man

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mu u\right) = \frac{\partial \mu v}{\partial x} - \frac{\partial \mu u}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mu u\right) = \frac{\partial \mu w}{\partial x} - \frac{\partial \mu u}{\partial z};$$

mithin wird die letzte Bedingung, wenn man das Glied

$$\frac{\partial \mu w}{\partial y} - \frac{\partial \mu v}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0,$$

multipliziert mit u, hinzufügt,

$$u\left(\frac{\partial \mu w}{\partial y} - \frac{\partial \mu v}{\partial z}\right) + v\left(\frac{\partial \mu u}{\partial z} - \frac{\partial \mu w}{\partial x}\right) + w\left(\frac{\partial \mu v}{\partial x} - \frac{\partial \mu u}{\partial y}\right) = 0$$

und reduziert sich weiter leicht auf die Bedingung (19), da die linke Seite gleich der mit μ multiplizierten linken Seite von (19) ist plus

$$u\left(w\frac{\partial \mu}{\partial y} - v\frac{\partial \mu}{\partial z}\right) + v\left(u\frac{\partial \mu}{\partial z} - w\frac{\partial \mu}{\partial x}\right) + w\left(v\frac{\partial \mu}{\partial x} - u\frac{\partial \mu}{\partial y}\right) = 0.$$

Ist die Bedingung (19) erfüllt, so kann man behaupten, daß die Relation (20), wo für $\varphi(x)$ der aus (21) durch eine Quadratur gewonnene Ausdruck einzusetzen ist, das Integral der Gleichung (17) ist. Bemerken wir schließlich, daß die linke Seite von (17), wenn diese Gleichung integrabel ist, durch Multiplikation mit einer passenden Funktion von x, y, z ein vollständiges Differential (§ 741) wird. Gibt man nämlich der Gleichung (20) die Form $\Phi(x, y, z) =$ Const. (indem man alles auf eine Seite bringt), so hat man

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \varphi'(x) = \mu u, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \mu v, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} = \mu w$$

und daher $\mu(u\,dx + v\,dy + w\,dz) = d\Phi$. Geometrisch kommt die von uns behandelte Frage darauf hinaus (vgl. § 782), daß a priori eine dreifache Unendlichkeit von Ebenen fixiert ist, und daß eine Schar von Flächen konstruiert werden soll, welche diese Ebenen in vorgeschriebenen Punkten berühren. Aus den obigen Betrachtungen geht hervor, daß die Aufgabe im allgemeinen unmöglich ist. Das kommt daher, daß man nach *Flächen* sucht. Man beachte dagegen, daß immer unendlich viele *Kurven* existieren, die denselben Bedingungen genügen, auch wenn (19) nicht erfüllt ist. In der Tat führt die Elimination von z zwischen (17) und einer willkürlichen Relation $\varphi(x, y, z) = 0$ zu einer Differentialgleichung erster Ordnung in zwei Veränderlichen, und diese besitzt immer eine einfache Unendlichkeit von Integralen.

797. Simultane gewöhnliche Differentialgleichungen. Wir wollen jetzt fragen, welche Relationen zwischen drei Veränderlichen x, y, z bestehen müssen, damit ihre Differentiale zu bekannten Funktionen u, v, w von x, y, z proportional sind:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}. \tag{22}$$

Geometrisch kommt dies darauf hinaus, in allen Punkten des Raumes a priori die Tangenten für unbekannte Kurven zu fixieren, und es ist leicht aus der Anschauung zu entnehmen (vgl. § 782), daß es solche

Kurven in zweifach unendlicher Zahl gibt. Ihre Gleichungen, die das Integralsystem von (22) bilden, müssen also folgende Form haben:

$$(23) \qquad F(x, y, z, a, b) = 0, \quad G(x, y, z, a, b) = 0,$$

wobei a und b willkürliche Konstanten sind. Und in der Tat sind die Gleichungen (22) nichts anderes als zwei gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung, die sich in allgemeinerer Form so schreiben lassen:

$$(24) \qquad f(x, y, z, y', z') = 0, \quad g(x, y, z, y', z') = 0.$$

Wir wollen diese Gleichungen nach z und z' auflösen: $z = \varphi(x, y, y')$, $z' = \psi(x, y, y')$. Setzen wir den zweiten Ausdruck gleich der Derivierten des ersten, so ergibt sich eine Relation zwischen x, y, y', y'', d. h. eine Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen den beiden Veränderlichen x und y allein. Integriert man diese Gleichung, so erhält man y ausgedrückt durch x und zwei willkürliche Konstanten a und b. Setzt man dann in $z = \varphi(x, y, y')$ den Ausdruck von y ein, so erhält man z dargestellt als Funktion von x, a, b. Auf diese Weise sind die Gleichungen (24) oder (22) integriert. Es ist ferner zu bemerken, daß man den Gleichungen (24) durch Auflösung nach $y' = dy/dx$ und $z' = dz/dx$ immer die Form (22) geben kann. Ähnlich liegen die Verhältnisse, wenn es sich um drei gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen vier Veränderlichen x, y, z, t handelt. Man denke sie sich nach den Derivierten von x, y, z (nach t) aufgelöst: $x' = u$, $y' = v$, $z' = w$, wo u, v, w bekannte Funktionen von x, y, z, t sind. Aus der ersten ($x' = u$) entnehme man $y = \varphi(t, x, z, x')$, um es in die beiden andern einzusetzen, die auf solche Weise die Form annehmen

$$f(t, x, z, x', z', x'') = 0, \quad g(t, x, z, x', z') = 0.$$

Aus ihnen entnehme man $z = \psi(t, x, x', x'')$, $z' = \chi(t, x, x', x'')$ und setze den zweiten Ausdruck gleich der Derivierten des ersten. Die so erhaltene Relation zwischen t, x, x', x'', x''' ist eine Differentialgleichung dritter Ordnung, deren Integration dazu führt, x durch t und drei willkürliche Konstanten auszudrücken. Setzt man x in $z = \psi(t, x, x', x'')$ und dann x und z in $y = \varphi(t, x, z, x')$ ein, so erhält man analoge Ausdrücke für y und z. Ist allgemein ein System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen $n + 1$ Veränderlichen gegeben

$$\frac{dx}{u} = \frac{dx_1}{u_1} = \frac{dx_2}{u_2} = \cdots = \frac{dx_n}{u_n},$$

so läßt sich die Integration durch successive Elimination von $n - 1$ Veränderlichen auf die Integration einer einzigen Differentialgleichung n-ter Ordnung in zwei Veränderlichen zurückführen und so das Integralsystem in Form von n simultanen Gleichungen erhalten

$$F_i(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

in denen n willkürliche Konstanten auftreten. Dank dem Auftreten dieser Konstanten kann man ein System von n Funktionen, die verpflichtet sind für einen gegebenen Wert der unabhängigen Veränderlichen vorgeschriebene Werte anzunehmen, als definiert betrachten durch n simultane Differentialgleichungen erster Ordnung.

798. Partielle Differentialgleichungen. Die einfachste partielle Differentialgleichung (§ 781) ist die, welche die partiellen Derivierten p und q einer unbekannten Funktion z von x und y mit dieser Funktion selbst und den unabhängigen Veränderlichen verbindet. Wir wollen uns hier eingehender mit denjenigen Gleichungen beschäftigen, welche p und q linear enthalten und aus diesem Grunde lineare Gleichungen heißen. Sie haben die Form

$$(25) \qquad up + vq = w,$$

wo u, v, w bekannte Funktionen von x, y, z sind. Die Frage nach allen Funktionen z, welche einer solchen Relation genügen, kommt geometrisch auf die Frage hinaus, welche Flächen in jedem Punkte (x, y, z) von einer durch diesen Punkt in der Richtung (u, v, w) gezogenen Geraden berührt werden; denn die Gleichung (25) läßt sich gerade als Orthogonalitätsbedingung für die bekannte Richtung (u, v, w) und die Richtung $(p, q, -1)$ der Normale (§ 659) einer der gesuchten Flächen ansehen. Es liegt auf der Hand, daß jede dieser Flächen der Ort einer einfach unendlichen Kurvenschar ist, die innerhalb der zweifach unendlichen (23) gewählt ist. Der Inbegriff aller möglichen Flächen muß sich folglich darstellen lassen, indem man eine willkürliche Abhängigkeit zwischen den Konstanten in den Gleichungen (23) herstellt. Die Gleichung jeder Fläche, die der Differentialgleichung (25) genügt, wird sich also durch Elimination von a und b zwischen den Gleichungen (23) und einer willkürlichen Relation $\omega(a, b) = 0$ erhalten lassen. Diese Voraussage wird sogleich durch die Rechnung bestätigt werden. Es sei $f(x, y, z) = 0$ eine beliebige Relation, die z so als Funktion von x, y definiert, daß (25) erfüllt ist. Setzt man in (25) $p = -\frac{\partial f}{\partial x} \Big/ \frac{\partial f}{\partial z}$, $q = -\frac{\partial f}{\partial y} \Big/ \frac{\partial f}{\partial z}$, so wird diese Gleichung

$$(26) \qquad u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

also eine lineare und homogene Gleichung, die man sofort integrieren kann, sobald das Integralsystem der Gleichungen (22) bekannt ist. Denken wir uns in der Tat die Gleichungen (23) nach den Konstanten aufgelöst:

$$(27) \qquad \varphi(x, y, z) = a, \quad \psi(x, y, z) = b.$$

Wir wollen hier bemerken, daß die Funktionen φ und ψ voneinander unabhängig sind; denn wäre dies nicht der Fall, so würde, wenn für a ein Wert festgesetzt ist, der Wert von b nicht willkürlich sein. Nun ist die Gleichung (26) sowohl für $f = \varphi$ als auch für $f = \psi$ erfüllt, da die Differentiation der Gleichungen (27) und die Ersetzung von dx, dy, dz durch die proportionalen Größen u, v, w

$$(28)\qquad u\frac{\partial\varphi}{\partial x} + v\frac{\partial\varphi}{\partial y} + w\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0,\quad u\frac{\partial\psi}{\partial x} + v\frac{\partial\psi}{\partial y} + w\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0$$

liefert. Was jetzt auch die der Gleichung (26) genügende Funktion f sein mag, so ist für die Verträglichkeit dieser Gleichung mit den Gleichungen (28) erforderlich

$$\frac{\partial(f, \varphi, \psi)}{\partial(x, y, z)} = 0.$$

Folglich muß (§ 579) zwischen f, φ, ψ eine Relation bestehen. Sie enthält notwendig f, weil sonst eine Abhängigkeit zwischen φ und ψ bestehen würde. Also ist $f = \omega(\varphi, \psi)$. Was ω anbetrifft, so ist es das Symbol einer willkürlichen Funktion. Wie man nämlich auch ω wählen mag, immer ist

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\omega}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\omega}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial z},$$

mithin

$$\sum u\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\sum u\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial\psi}\sum u\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0,$$

sodaß die Gleichung (26) erfüllt ist. Jetzt sieht man, daß es, um (25) zu befriedigen, genügt $\omega(\varphi, \psi) = 0$ zu setzen. Allgemeiner reduziert sich die Integration der linearen Gleichung mit n unabhängigen Veränderlichen

$$(29)\qquad u_1\frac{\partial x}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial x}{\partial x_2} + \cdots + u_n\frac{\partial x}{\partial x_n} = u$$

sofort auf die Integration der linearen und homogenen Gleichung mit $n+1$ unabhängigen Veränderlichen

$$(30)\qquad u_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + u_n\frac{\partial f}{\partial x_n} + u\frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

und um diese zu integrieren braucht man nur das System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{u} = \frac{dx_1}{u_1} = \frac{dx_2}{u_2} = \cdots = \frac{dx_n}{u_n}$$

zu integrieren und das Integralsystem in der Form

$$\varphi_i(x, x_1, x_2, \cdots, x_n) = \text{Const.}\quad (i = 1, 2, 3, \cdots, n)$$

zu schreiben. Man genügt der Gleichung (30) in der allgemeinsten Weise durch $f = \omega(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)$ und der Gleichung (29), indem man setzt $\omega(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n) = 0$, wo ω das Symbol einer willkürlichen Funktion ist.

799. Es ist nützlich zu wissen, daß die Kenntnis eines partikulären Integrals $f = \varphi$ der Gleichung (26) die Integration zu vereinfachen gestattet, durch Reduktion der Zahl der unabhängigen Veränderlichen von dreien auf zwei. Da φ wenigstens eine der drei Veränderlichen enthält, so kann man immer annehmen, daß φ von z abhängt, indem man erforderlichen Falles die Veränderlichen neu benennt; folglich kann man φ an Stelle von z als unabhängige Veränderliche einführen. Macht man nun die nach dem neuen System x, y, φ genommenen partiellen Derivierten durch Klammern kenntlich, so hat man

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

und die Gleichung (26) verwandelt sich auf diese Weise in $u\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + v\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$. Das Problem ist also reduziert auf die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Veränderlichen: $y' = \chi(x, y, \varphi)$. Dabei ist φ als eine Konstante zu behandeln. Allgemeiner gestattet die Kenntnis von ν unabhängigen partikulären Integralen der Gleichung (30), d. h. von ν Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, welche der Gleichung (30) genügen und von denen keine eine Funktion der übrigen ist, die Gleichung (30) in eine analoge Gleichung mit $n - \nu + 1$ unabhängigen Veränderlichen zu transformieren. Man gelangt zu dieser Gleichung, indem man an Stelle von ν Veränderlichen x die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu$ einführt.

800. Um nach Lagrange eine beliebige partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \tag{31}$$

zu integrieren, suche man eine zweite Relation $g(x, y, z, p, q) = 0$ zu erhalten, um aus ihr und aus (31) p und q als Funktionen von x, y, z zu entnehmen und dann z durch Integration (§ 796) der totalen Differentialgleichung $dz = p\,dx + q\,dy$ zu bestimmen. Die partielle Derivation der Gleichungen $f = 0$, $g = 0$ nach x, y, z liefert

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial z} = 0.$$

Wenn man aus diesem System unter Elimination von $\partial p/\partial x$ und $\partial q/\partial y$ die vier andern partiellen Derivierten von p und q berechnet, um sie in die Relation

$$\frac{\partial p}{\partial y}+q\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial q}{\partial x}+p\frac{\partial q}{\partial z}$$

einzusetzen, welche für die Integrabilität von $dz=p\,dx+q\,dy$ notwendig und hinreichend ist (§ 741), so findet man

$$(32)\quad \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial y}+\left(p\frac{\partial f}{\partial p}+q\frac{\partial f}{\partial q}\right)\frac{\partial g}{\partial z}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial g}{\partial p}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial g}{\partial q}.$$

Das ist eine lineare und homogene partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit fünf unabhängigen Veränderlichen. Wie wir wissen (§ 798), kommt man bei ihrer Integration auf vier simultane Differentialgleichungen erster Ordnung. Übrigens genügt es nach einer wichtigen Bemerkung von Charpit ein einziges Integral g von (32) mit einer willkürlichen Konstanten zu bestimmen. Man kann dann durch Integration von $dz=p\,dx+q\,dy$ zur Kenntnis der allgemeinsten Funktion $z=F(x,y,a,b)$ gelangen, die der Gleichung (31) genügt. Dabei hat man a und b als Konstanten zu betrachten oder als Veränderliche, die gewissen Bedingungen unterworfen sind. Es werde der größeren Klarheit halber angenommen, daß (31) auf die Form $z=\Phi(x,y,p,q)$ gebracht ist; $z=G(x,y)$ sei eine beliebige Funktion, welche dieser Gleichung genügt, sodaß man identisch hat $G=\Phi\left(x,y,\frac{\partial G}{\partial x},\frac{\partial G}{\partial y}\right)$. Andererseits bestimme man a und b mittels der Gleichungen

$$(33)\qquad \frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial G}{\partial x},\quad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial G}{\partial y}.$$

Wenn man bedenkt, daß die vorgelegte Gleichung unabhängig von a und b erfüllt sein muß, wenn man $F(x,y,a,b)$ für z setzt, so sieht man sofort, daß

$$F(x,y,a,b)=\Phi\left(x,y,\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y}\right)=\Phi\left(x,y,\frac{\partial G}{\partial x},\frac{\partial G}{\partial y}\right)=G(x,y)$$

ist. Also schließt der Ausdruck $F(x,y,a,b)$ alle möglichen Funktionen z ein, die der vorgelegten Gleichung genügen, und heißt aus diesem Grunde das *vollständige Integral* dieser Gleichung. Inzwischen zeigt die partielle Derivation der Identität $F=G$, wenn man die Gleichungen (33) beachtet, daß man haben muß

$$(34)\qquad \frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y}=0.$$

Diese Relationen, die für konstante a und b identisch bestehen, sind auch erfüllt, wenn a und b passende Funktionen von x und y sind. Dieselben sind entweder unabhängig oder beliebig aneinander gebunden. Im ersten Falle ist die Determinante $\frac{\partial(a,b)}{\partial(x,y)}$ von Null verschieden, und man muß daher haben $\partial F/\partial a=0$, $\partial F/\partial b=0$, woraus sich für

a und b zwei verschiedene Funktionen ergeben, deren Einsetzung in $z = F(x, y, a, b)$ zur Kenntnis eines partikulären Integrals $z = \varphi(x, y)$ führt, des sogenannten *singulären Integrals.* Im zweiten Falle reduzieren sich, wenn $b = \omega(a)$ gesetzt wird, die Gleichungen (34) auf die eine Gleichung $\frac{\partial F}{\partial a} + \omega'(a)\frac{\partial F}{\partial b} = 0$, und aus diesen beiden Gleichungen ergeben sich für a und b zwei Ausdrücke, die ein Symbol einer willkürlichen Funktion enthalten; setzt man sie in $z = F(x, y, a, b)$ ein, so findet man das, was man als *allgemeines Integral* der vorgelegten Gleichung zu bezeichnen pflegt.[1])

1) Wünscht der Leser Übungen und nähere Einzelheiten über diese wichtige Theorie zu haben, so kann er die Spezialwerke von Forsyth und Goursat zu Rate ziehen.

Anhang.

Die Weierstrasssche Funktion.

801. Die Funktion, auf welche wir am Schluß von § 282 hingewiesen haben, ist

$$f(x) = \cos \pi x + b \cos \pi a x + b^2 \cos \pi a^2 x + b^3 \cos \pi a^3 x + \cdots$$

für passende Werte von a und b. Es ist bekannt, daß für $|b| < 1$ die Reihe gleichmässig konvergiert (§ 319) und eine *stetige* Funktion darstellt (§ 322). Wir werden jetzt zeigen, daß trotz der Stetigkeit $f(x)$ für jeden Wert von x *ohne Derivierte* ist. Zunächst wollen wir nach Fixierung von x eine Folge $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ von positiven oder negativen ganzen Zahlen bestimmen derart, daß die Differenzen

$$x - \alpha_0,\;\; ax - \alpha_1,\;\; a^2x - \alpha_2,\;\; a^3x - \alpha_3,\; \cdots$$

alle größer als $-\frac{1}{2}$ und nicht größer als $\frac{1}{2}$ sind: es genügt $-\alpha_n = [\frac{1}{2} - a^n x]$ zu nehmen. Setzen wir

$$x_n = \frac{\alpha_n - 1}{a^n}, \quad x_n' = \frac{\alpha_n + 1}{a^n},$$

sodaß

$$\tfrac{1}{2} < a^n(x - x_n) \leqq \tfrac{3}{2}, \quad \tfrac{1}{2} \leqq a^n(x_n' - x) < \tfrac{3}{2}$$

ist. Wenn $a \geqq 3$ ist, so hat man

$$x - x_{n+1} \leqq \frac{3}{2a^{n+1}} \leqq \frac{1}{2a^n} < x - x_n$$

und daher

$$x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots, \quad \lim_{n=\infty} x_n = x.$$

Ebenso ist

$$x_0' > x_1' > x_2' > x_3' > \cdots, \quad \lim_{n=\infty} x_n' = x.$$

Jetzt betrachte man die beiden Zuwachsverhältnisse

$$\frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n}, \quad \frac{f(x_n') - f(x)}{x_n' - x}.$$

Das erste ist ein linksseitiges, das zweite ein rechtsseitiges. Das linksseitige Zuwachsverhältnis

$$\frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} = \sum_0^\infty b^\nu \frac{\cos(\pi a^\nu x) - \cos(\pi a^\nu x_n)}{x - x_n}$$

läßt sich zerlegen in

$$(1)\quad \sum_0^{n-1} (ab)^\nu \frac{\cos(\pi a^\nu x) - \cos(\pi a^\nu x_n)}{a^\nu (x - x_n)} + \sum_0^\infty b^{n+\nu} \frac{\cos(\pi a^{n+\nu} x) - \cos(\pi a^{n+\nu} x_n)}{x - x_n}.$$

Betreffs der ersten Summe bemerke man, daß

$$\frac{\cos(\pi a^\nu x) - \cos(\pi a^\nu x_n)}{a^\nu (x - x_n)} = -\pi \sin\left(\pi a^\nu \frac{x + x_n}{2}\right) \frac{\sin\left(\pi a^\nu \frac{x - x_n}{2}\right)}{\pi a^\nu \frac{x - x_n}{2}}$$

ist. Da die absoluten Beträge von $\sin x$ und $\frac{\sin x}{x}$ nie größer als die Einheit sind, so sieht man, daß der absolute Betrag des letzten Ausdrucks nicht größer ist als π. Daraus folgt, wenn man $b > 0$ voraussetzt, daß die erste der beiden Summen (1) ihrem absoluten Betrage nach kleiner ist als

$$\pi \sum_0^{n-1} (ab)^\nu = \pi \frac{(ab)^n - 1}{ab - 1} < \frac{\pi}{ab - 1} (ab)^n.$$

Man kann ihr also die Form geben $\frac{\pi\theta}{ab - 1}(ab)^n$, wo θ zwischen -1 und 1 enthalten ist. Was die zweite Summe in (1) anbetrifft, so bemerke man, daß

$$\cos(\pi a^{n+\nu} x) - \cos(\pi a^{n+\nu} x_n)$$
$$= -\cos(\pi a^{n+\nu} x_n)\{1 - \cos(\pi a^{n+\nu}(x - x_n))\} - \sin(\pi a^{n+\nu} x_n)\sin(\pi a^{n+\nu}(x - x_n))$$

ist. Wenn man jetzt annimmt, daß a eine **ungerade** ganze Zahl ist, so ist der Bogen

$$\pi a^{n+\nu} x_n = \pi a^\nu \cdot a^n x_n = \pi a^\nu (\alpha_n - 1)$$

ein Vielfaches von π, und zwar ein gerades oder ungerades, je nachdem α_n ungerade oder gerade ist. Daraus folgt

$$\cos(\pi a^{n+\nu} x_n) = -(-1)^{\alpha_n}, \quad \sin(\pi a^{n+\nu} x_n) = 0,$$

$$\cos(\pi a^{n+\nu} x) - \cos(\pi a^{n+\nu} x_n) = (-1)^{\alpha_n}\{1 - \cos(\pi a^{n+\nu}(x - x_n))\}.$$

Die betrachtete Summe reduziert sich somit auf

$$(2)\qquad (-1)^{\alpha_n}(ab)^n \sum_0^\infty b^\nu \frac{1 - \cos(\pi a^{n+\nu}(x - x_n))}{a^n (x - x_n)}.$$

Die der Summation unterworfenen Glieder sind alle positiv oder null. Das erste ist

$$\frac{1 - \cos(\pi a^n (x - x_n))}{a^n (x - x_n)}.$$

Der Bogen $\pi a^n (x - x_n)$ ist größer als $\frac{1}{2}\pi$, nicht größer als $\frac{3}{2}\pi$. Sein Kosinus ist also negativ oder null; mithin ist das betrachtete Glied, weil der Zähler nicht kleiner als die Einheit, der Nenner aber nicht größer als $3/2$ ist, nicht kleiner als $2/3$. Um so mehr ist die Summe aller Glieder der Summe in (2) größer als $2/3$. Daraus folgt, daß der Ausdruck (2) auf die Form $(-1)^{\alpha_n} \cdot \frac{2}{3} k (ab)^n$ gebracht werden kann mit $k > 1$. Also hat man

$$\frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} = (-1)^{\alpha_n}(ab)^n \left(\frac{2k}{3} + \frac{\pi\theta}{ab - 1}\right).$$

Nun ist die Größe in Klammern immer größer als

$$\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab - 1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{ab - \left(1 + \frac{3}{2}\pi\right)}{ab - 1};$$

sie ist also postiv, wenn $ab \geqq 1 + \frac{3}{2}\pi$. Andrerseits überschreitet $(ab)^n$ mit wachsendem n jede Grenze. Also nimmt das linksseitige Zuwachsverhältnis seinem absoluten Betrage nach unendlich zu, wenn die unabhänge Veränderliche, die Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ durchlaufend, nach x konvergiert. Eine ganz ähnliche Rechnung wie die obige gibt

$$\frac{f(x_n') - f(x)}{x_n' - x} = -(-1)^{\alpha_n}(ab)^n \left(\frac{2k'}{3} + \frac{\pi\theta'}{ab - 1}\right),$$

wo k' größer als 1 ist und θ' zwischen -1 und 1 liegt. Also nimmt das rechtsseitige Zuwachsverhältnis seinem absoluten Betrage nach unendlich zu, hat aber für jeden Wert von n das entgegengesetzte Zeichen wie das linksseitige Zuwachsverhältnis, wenn die Veränderliche die Folge $x_0', x_1', x_2', \ldots$ durchlaufend nach x konvergiert. Es ist überdies von Wiener[1]) bewiesen worden, daß sich andere Folgen konstruieren lassen, für welche die Zuwachsverhältnisse nach beliebig vorgeschriebenen Grenzwerten konvergieren. Wiener hat sich ferner der Weierstraßschen Funktion bedient um zu zeigen (vgl. § 692, b), daß eine Fläche, die keine Regelfläche ist, abwickelbar sein kann. Natürlich ist eine solche Fläche, weil sie in jedem Punkte ohne Tangentialebene ist, materiell nicht realisierbar.[2])

Einiges über die Differenzenrechnung.

802. Ist eine Folge von Zahlen gegeben $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$, so nennt man Differenz eines Gliedes das, was zu ihm addiert werden muß, um das folgende Glied zu erhalten. Die Bildung der Differenzen der Glieder einer Folge ist eine Operation, die mit dem Symbol Δ bezeichnet wird:

$$\Delta u_p = u_{p+1} - u_p.$$

Auch der einfache Übergang von einem Gliede zum folgenden kann

1) „Crelles Journal“ 1881, S. 221.

2) „Lehrbuch der darstellenden Geometrie“, Bd. II, S. 33.

als eine Operation ∇ betrachtet werden von der Beschaffenheit, daß

$$\nabla u_p = u_{p+1}$$

ist. Da die rechte Seite nichts anderes ist als $u_p + \Delta u_p$, so kann man sagen, daß die Operationen Δ und ∇ in der Beziehung $\nabla = 1 + \Delta$ stehen. Ersetzt man dagegen in dem Ausdruck von Δu_p das u_{p+1} durch ∇u_p, so sieht man, daß $\Delta = \nabla - 1$ ist.

803. Wir wollen jetzt zeigen, daß sich die Operationszeichen Δ und ∇ dem algebraischen Kalkül nach den in § 350 angedeuteten Regeln unterwerfen lassen. Zunächst bemerke man, daß nach der Definition sowohl die p-malige Anwendung von ∇ auf das Glied u_q als auch die q-malige Anwendung auf u_p das Glied u_{p+q} liefert, daß man also hat

$$\nabla^p u_q = \nabla^q u_p = u_{p+q}$$

oder, wenn man $\nabla^\nu u_0$ für u_ν setzt,

$$\nabla^p \cdot \nabla^q = \nabla^q \cdot \nabla^p = \nabla^{p+q}.$$

Ferner beachte man, daß die Operationen Δ und ∇ vertauschbar sind; denn $\nabla\Delta u_p$ stellt das Glied dar, welches in $\Delta u_0, \Delta u_1, \Delta u_2, \ldots$ auf Δu_p folgt, d. h. Δu_{p+1}, wofür man offenbar auch schreiben kann $\Delta\nabla u_p$. Also ist $\nabla\Delta = \Delta\nabla$. Daraus folgt, wenn eine Anzahl von Operationen Δ und ∇ gegeben ist, daß diese in beliebiger Reihenfolge ausgeführt werden können. Da nun die Differenz einer Summe offenbar gleich der Summe der Differenzen der Glieder ist, so hat man

$$\Delta^2 = \Delta(\nabla - 1) = \Delta\nabla - \Delta = \nabla\Delta - \Delta$$
$$= \nabla(\nabla - 1) - (\nabla - 1) = (\nabla - 1)^2.$$

Allgemeiner hat man, wenn $\Delta^p = (\nabla - 1)^p$ zugegeben wird,

$$\Delta^{p+1} = \Delta(\nabla - 1)^p = (\nabla - 1)^p \Delta = (\nabla - 1)^{p+1},$$

und die Formel gilt daher für jeden Wert von p. Um also die p^{te} Differenz des ersten Gliedes der Folge $u_0, u_1, u_2, \ldots$ durch diese Zahlen selbst auszudrücken, hat man die Formel

$$(1) \qquad \Delta^p u_0 = u_p - \frac{p}{1} u_{p-1} + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} u_{p-2} - \cdots \pm u_0.$$

Für ein beliebiges Glied hat man

$$\Delta^p u_q = \Delta^p \nabla^q u_0 = \nabla^q \Delta^p u_0 = \nabla^q (\nabla - 1)^p u_0,$$

d. h.

$$\Delta^p u_q = u_{p+q} - \frac{p}{1} u_{p+q-1} + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} u_{p+q-2} - \cdots \pm u_q.$$

Will man umgekehrt die Folge rekonstruieren, wenn man die successiven Differenzen des ersten Gliedes kennt, so muß man die Formel $\nabla^p = (1 + \Delta)^p$ anwenden, welche ergibt

$$(2) \qquad u_p = u_0 + \frac{p}{1} \Delta u_0 + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 u_0 + \cdots + \Delta^p u_0.$$

804. Differenzen von 0^q. Man nennt so kurz die successiven Differenzen des ersten Gliedes der Folge $0^q, 1^q, 2^q, 3^q, \ldots$, sodaß man auf Grund der Formel (1) hat

$$(3)\qquad \Delta^p 0^q = p^q - \frac{p}{1}(p-1)^q + \frac{p(p-1)}{1\cdot 2}(p-2)^q - \cdots \pm p.$$

Bildet man z. B. die Differenzen der Kuben, so erhält man die in folgendem Schema zusammengestellten Zahlen:

0		1		8		27		64		125		216		343		512		729		1000 ...
	1		7		19		37		61		91		127		169		217		271 ...	
		6		12		18		24		30		36		42		48		54 ...		
			6		6		6		6		6		6		6		6 ...			
			. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .			

Man sieht, daß von der vierten an die Differenzen aller Glieder der Folge null sind. Wir werden in Kurzem beweisen, daß dies ein Spezialfall eines allgemeinen Satzes ist, der es erlaubt umgekehrt auf dem Wege der Addition die ursprüngliche Folge zu rekonstruieren. Das kann in der Praxis von Nutzen sein bei der Konstruktion von Tafeln für die Quadrat- und die Kubikzahlen. Kehren wir zu der Formel (3) zurück, um daraus ein rasches Verfahren zur Berechnung aller Differenzen von 0^q abzuleiten. Verwandelt man p in $p-1$, so erhält man durch Summation mit (3)

$$\Delta^p 0^q + \Delta^{p-1} 0^q = p^q - \frac{p-1}{1}(p-1)^q + \frac{(p-1)(p-2)}{1\cdot 2}(p-2)^q - \cdots \pm 1.$$

Inzwischen wird die rechte Seite, multipliziert mit p,

$$p^{q+1} - \frac{p}{1}(p-1)^{q+1} + \frac{p(p-1)}{1\cdot 2}(p-2)^{q+1} - \cdots \pm p = \Delta^p 0^{q+1}.$$

Also ist

$$(4)\qquad \Delta^p 0^{q+1} = p(\Delta^p 0^q + \Delta^{p-1} 0^q).$$

Unter Anwendung dieser Formel läßt sich mit großer Leichtigkeit folgendes Schema aufstellen:

	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5	Δ^6	Δ^7	$\Delta^8 \ldots$
0^1	1							
0^2	1	2						
0^3	1	6	6					
0^4	1	14	36	24				
0^5	1	30	150	240	120			
0^6	1	62	540	1560	1800	720		
0^7	1	126	1806	8400	16800	15120	5040	
0^8	1	254	5796	40824	126000	191520	141120	40320
⋮	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Die Elemente der zweiten Vertikalreihe erhält man von 2 ausgehend, indem man diese Zahl zu 1 hinzufügt und das Resultat verdoppelt; darauf addiert man 1 zu der so erhaltenen Zahl 6, verdoppelt das Resultat und erhält 14. Ebenso addiert man 1 zu 14, verdoppelt und erhält 30; u. s. w. Bei der dritten Vertikalreihe verfährt man in analoger Weise, d. h. jedes Glied wird mit dem links davon stehenden summiert und das Resultat verdreifacht. So hat man von 6 ausgehend $6+6=12$, was verdreifacht 36 gibt; ferner ist $36+14=50$, was verdreifacht 150 gibt; u. s. w. Es ist nützlich sich das auf diese Weise konstruierte Schema gegenwärtig zu halten, weil die Differenzen von 0^q bei verschiedenen interessanten Fragen der Analysis vorkommen.

805. Es ist auch nützlich gewisse Eigenschaften zu kennen, die leicht aus (4) ableitbar sind. Zunächst hat man $\varDelta^p 0^q = 0$, wenn $p > q$ ist. Läßt man in der Tat zu, daß dies bis zu einem gewissen Wert von q richtig ist (wie es für $q=1$ gilt), so zeigt uns die Formel (4), daß der Satz bestehen bleibt, wenn man q in $q+1$ verwandelt. Aus derselben Formel leitet man, indem man $q=p-1$ setzt, ab $\varDelta^p 0^p = p!$ Endlich bemerke man, daß $\varDelta^p 0^q$ immer teilbar durch $p!$ ist. Man schreibe in der Tat (4) in der Form

$$\varDelta^p 0^q = p\varDelta^{p-1}0^{q-1} + p\varDelta^p 0^{q-1}$$

und wende diese Formel wiederholt auf den zweiten Bestandteil der rechten Seite an. Auf solche Weise erhält man

$$\varDelta^p 0^q = p\varDelta^{p-1}0^{q-1} + p^2\varDelta^{p-1}0^{q-2} + \cdots + p^{q-p+1}\varDelta^{p-1}0^{p-1}.$$

Also ist $\varDelta^p 0^q$ teilbar durch p; und da die rechte Seite nur $(p-1)^{\text{te}}$ Differenzen enthält, so kann man sagen, daß $\varDelta^p 0^q$ durch $p(p-1)$ teilbar ist. Daraus folgt, daß jedes Glied auf der rechten Seite durch $p(p-1)(p-2)$ teilbar ist, mithin auch $\varDelta^p 0^q$; u. s. w. Auf diese Weise gelangt man durch eine Kette abwechselnder Schlüsse zu der klaren Einsicht, daß $\varDelta^p 0^q$ durch $p!$ teilbar ist, was auch q sein mag.

806. Differenzen von Funktionen. Wir wollen jetzt annehmen, daß die Folge von den Werten $f(x)$, $f(x+h)$, $f(x+2h)$, $\cdots$ einer Funktion y gebildet wird. Die p^{te} Differenz des ersten Gliedes ist nach Formel (1)

$$\varDelta^p y = f(x+ph) - \frac{p}{1} f(x+(p-1)h) + \frac{p(p-1)}{1\cdot 2} f(x+(p-2)h) - \cdots \pm f(x).$$

Wenn wir jedes Glied der rechten Seite nach der Taylorschen Formel entwickeln, so finden wir als Koeffizienten von h^ν

$$\frac{y^{(\nu)}}{\nu!}\left(p^\nu - \frac{p}{1}(p-1)^\nu + \frac{p(p-1)}{1\cdot 2}(p-2)^\nu - \cdots \pm p\right) = \frac{y^{(\nu)}}{\nu!}\varDelta^p 0^\nu.$$

Es verschwinden also (nach der ersten der drei im vorigen Paragraphen bewiesenen Eigenschaften) die Glieder mit $h, h^2, \ldots, h^{p-1}$, und es verschwindet auch, wie vorauszusehen war, das von h unabhängige Glied, da es das Produkt von $f(x)$ mit $(1-1)^p = 0$ ist. Folglich hat man

$$(5) \qquad \Delta^p y = \sum_{\nu=p}^{\nu=\infty} \frac{h^\nu y^{(\nu)}}{\nu!} \Delta^p 0^\nu.$$

Diese Formel setzt die Möglichkeit der Entwickelung von f in eine unendliche Reihe voraus. Um eine allgemeine Formel mit einem **Restausdruck** zu haben, bemerke man, daß $\Delta^p y$ bei festgehaltenem x eine Funktion von h ist, deren n^{te} Derivierte folgendermaßen lautet:

$$p^n f^{(n)}(x+ph) - \frac{p}{1}(p-1)^n f^{(n)}(x+(p-1)h) \\ + \frac{p(p-1)}{1\cdot 2}(p-2)^n f^{(n)}(x+(p-2)h) - \cdots.$$

Wenn man also (§ 330) in der Entwickelung (5) bei dem zu $\nu = n-1$ gehörigen Gliede stehen bleibt, so muß man noch hinzufügen

$$R_n = \frac{h^n}{n!} \Delta^p (0^n f^{(n)}(x)),$$

wobei diese letzten Differenzen für Intervalle θh statt h zu nehmen sind. Hier bedeutet θ wie gewöhnlich eine Zahl zwischen 0 und 1.

807. Übungen. a) Für $y = e^x$ hat man $\Delta y = e^{x+h} - e^x = e^x(e^h - 1)$, mithin

$$\Delta^p y = e^x (e^h - 1)^p.$$

Die Formel (5) wird, wenn man beide Seiten durch e^x dividiert und h in x verwandelt,

$$(e^x - 1)^p = \sum_p^\infty \frac{x^\nu}{\nu!} \Delta^p 0^\nu.$$

Da man der linken Seite die Form

$$\left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^p$$

geben kann, so findet man sofort, unter Anwendung einer früher (§ 467) definierten Bezeichnung,

$$\frac{\Delta^p 0^q}{q!} = \mathop{\mathrm{S}}_q^p \frac{1}{r!}.$$

Diese Formel gestattet $\Delta^p 0^q$ direkt zu berechnen. Will man z. B. $\Delta^4 0^7$ berechnen, so muß man beachten, daß die Zerlegungen von 7 in eine Summe von vier ganzen positiven Zahlen folgende sind:

$$1+1+1+4, \quad 1+1+2+3, \quad 1+2+2+2.$$

Die erste von ihnen und die vierte zählen viermal, die zweite zwölfmal. Also ist

$$\varDelta^4 0^7 = 7!\left(\frac{4}{4!} + \frac{12}{2!\,3!} + \frac{4}{2!\,2!\,2!}\right) = 8400\,.$$

b) Für die Funktion $y = 1/x$ erhält man

$$\varDelta y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x+h} = -\frac{h}{x(x+h)},$$

$$\varDelta^2 y = \frac{h}{x(x+h)} - \frac{h}{(x+h)(x+2h)} = \frac{2h^2}{x(x+h)(x+2h)}, \ldots.$$

Allgemein ist

$$\varDelta^p y = \frac{(-1)^p p!\, h^p}{x(x+h)(x+2h)\cdots(x+ph)}\,.$$

Setzt man $h = -1$ und verwandelt x in $1/x$, so wird die Formel (5)

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-px)} = \frac{1}{p!}\left(\varDelta^p 0^p + x\varDelta^p 0^{p+1} + x^2\varDelta^p 0^{p+2} + \cdots\right).$$

Entwickelt man jeden Faktor auf der linken Seite in eine geometrische Reihe und denkt sich das Produkt ausgerechnet, so erkennt man leicht, daß $\frac{\varDelta^p 0^{p+q}}{p!}$ die Summe aller Produkte von q positiven ganzen Zahlen ist, die gleich oder ungleich sind und p nicht übertreffen. Hiernach wird die am Schluß von § 805 bewiesene Eigenschaft evident.

c) Die in § 802 definierte Bezeichnungsweise gestattet den symbolischen Kalkül (§ 350) so anzuwenden, daß man gewisse Resultate mit Leichtigkeit gewinnt. Man beachte, daß

$$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots = \left(1 + x\nabla + x^2\nabla^2 + \cdots\right) u_0$$

ist, und transformiere den symbolischen Ausdruck in Klammern in

$$\frac{1}{1-x\nabla} = \frac{1}{(1-x)-x\varDelta} = \frac{1}{1-x} + \frac{x\varDelta}{(1-x)^2} + \frac{x^2\varDelta^2}{(1-x)^3} + \cdots.$$

Es ergibt sich dann sofort

$$\sum_0^\infty u_\nu x^\nu = \sum_0^\infty \frac{x^\nu \varDelta^\nu u_0}{(1-x)^{\nu+1}}\,.$$

Ist z. B. die Reihe

$$f(x) = 1^q x + 2^q x^2 + 3^q x^3 + 4^q x^4 + \cdots$$

gegeben, so kann man leicht ihre Summe finden:

$$f(x) = \frac{x\varDelta 0^q}{(1-x)^2} + \frac{x^2\varDelta^2 0^q}{(1-x)^3} + \cdots + \frac{x^q\varDelta^q 0^q}{(1-x)^{q+1}}\,.$$

Wie man sieht, ist $f(x)$ der Quotient eines Polynoms vom Grade q durch $(1-x)^{q+1}$.

d) Analog hat man, wenn die Reihe

$$f(x) = \frac{1^q x}{1!} + \frac{2^q x^2}{2!} + \frac{3^q x^3}{3!} + \frac{4^q x^4}{4!} + \cdots$$

vorliegt,

$$f(x) = e^{x\nabla} = e^x \cdot e^{x\Delta} = e^x \left(\frac{x}{1!} \Delta 0^q + \frac{x^2}{2!} \Delta^2 0^q + \cdots + \frac{x^q}{q!} \Delta^q 0^q \right).$$

Also ist die betrachtete Reihe das Produkt von e^x mit einem Polynom vom Grade q mit ganzzahligen Koeffizienten. Daraus folgt, daß die Summe der Reihe

$$\frac{1^q}{1!} + \frac{2^q}{2!} + \frac{3^q}{3!} + \frac{4^q}{4!} + \cdots$$

gleich einem ganzzahligen Vielfachen von e ist. Z. B. hat man

$$\frac{1}{1!} + \frac{4}{2!} + \frac{9}{3!} + \cdots = 2e, \quad \frac{1}{1!} + \frac{8}{2!} + \frac{27}{3!} + \cdots = 5e.$$

808. Die Differenzenrechnung gestattet viele nützliche algebraische Anwendungen, worüber wir den Leser auf andere Werke[1]) verweisen. Wir wollen uns hier darauf beschränken zu zeigen, wie sie sich zur Lösung des Interpolationsproblems (§ 343) verwenden läßt, d. h. zur Herstellung einer Funktion y von solcher Beschaffenheit, daß den Werten $x_0, x_1, x_2, \ldots$ der unabhängigen Veränderlichen x die Funktionswerte $y_0, y_1, y_2, \ldots$ entsprechen. Denken wir uns eine dritte Veränderliche t, die entsprechend den Wertepaaren x_0 und y_0, x_1 und y_1 u. s. w. die Werte $0, 1, 2, \ldots$ annimmt. Die Veränderlichen x und y, die als Funktionen von t betrachtet werden, sollen also für $t = p$ die Werte x_p und y_p annehmen; und da allgemein $u_p = (1 + \Delta)^p u_0$ ist, so können wir gleichzeitig schreiben

$$x = (1 + \Delta)^t x_0, \quad y = (1 + \Delta)^t y_0. \tag{6}$$

Die Elimination von t wird in jedem Falle zu der gesuchten Relation zwischen x und y führen. Wir wollen z. B. annehmen, die Werte $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ seien äquidistant mit dem Abstand h in dem Intervall (x_0, x_n) gegeben. In diesem Falle hat man

$$\Delta x_0 = h, \quad \Delta^2 x_0 = \Delta^3 x_0 = \cdots = 0$$

und daher

$$x = x_0 + t\Delta x_0 + \frac{t(t-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 x_0 + \cdots = x_0 + th,$$

was man übrigens leicht voraussehen konnte. Den Wert von t, der sich hieraus ergibt, setze man in die zweite Gleichung (6) ein. Alsdann wird dieselbe die Newtonsche Formel[2]):

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{h} \cdot \frac{\Delta y_0}{1} + \frac{x - x_0}{h} \left(\frac{x - x_0}{h} - 1 \right) \frac{\Delta^2 y_0}{1 \cdot 2} + \cdots.$$

---

1) Bertrand, „Algèbre“, 2ème partie, pp. 239, 249, etc.

2) Eine interessante Anwendung dieser Formel auf die Trennung der Wurzeln ist das Theorem von Choquet und Matrot (Mathesis, 1891, p. 218).

Eigenschaften der Bernoullischen Zahlen.

809. Die Bernoullischen Zahlen (§ 351) lassen sich leicht durch die Differenzen von 0^q ausdrücken. Betrachten wir in der Tat die Folge, deren Anfangsglied $u_0 = 0$ ist, während die andern Glieder folgendermaßen definiert sind:

$$u_p = 0^q + 1^q + 2^q + \cdots + (p-1)^q.$$

Die Folge der ersten Differenzen ist gerade $0^q, 1^q, 2^q, \ldots$. Also ist $\Delta^p u_0 = \Delta^{p-1} 0^q$. Daraus folgt, wenn man die Formel (2) des § 803 anwendet und $p > q$ nimmt,

$$1^q + 2^q + \cdots + (p-1)^q = \frac{p(p-1)}{1\cdot 2}\Delta 0^q + \cdots + \frac{p(p-1)\cdots(p-q)}{1\cdot 2\cdots(q+1)}\Delta^q 0^q.$$

Denken wir uns die rechte Seite nach den Potenzen von p geordnet, so wird der Koeffizient von p

$$-\tfrac{1}{2}\Delta 0^q + \tfrac{1}{3}\Delta^2 0^q - \tfrac{1}{4}\Delta^3 0^q + \cdots.$$

Auf der linken Seite ist im Falle $q > 1$ der Koeffizient von p derselbe wie in $1^q + 2^q + \cdots + p^q$, d. h. (§ 358, a) B_q. Für $q = 1$ ist er $B_1 - 1 = -B_1$. Da für jeden andern ungeraden Wert von q die Zahl B_q verschwindet, so kann man sagen, daß der Koeffizient von p in u_p gleich $(-1)^q B_q$ ist. Man hat also

$$(-1)^{q-1} B_q = \tfrac{1}{2}\Delta 0^q - \tfrac{1}{3}\Delta^2 0^q + \tfrac{1}{4}\Delta^3 0^q - \cdots.$$

Diese Formel wird uns erlauben ein interessantes Theorem zu beweisen.

810. Theorem von Staudt und Clausen. Jede Bernoullische Zahl B_{2n} ist gleich einer ganzen Zahl, vermindert um die Summe der reziproken Werte aller derjenigen Primzahlen, die, wenn man sie um die Einheit vermindert, Teiler von $2n$ werden.

a) Wir schicken den Beweis des folgenden Hilfssatzes[1]) voraus: Jede zusammengesetzte Zahl p, die größer als 4 ist, ist ein Teiler von $(p-1)!$. In der Tat ist die Zahl p, wenn sie keine Primzahl und auch kein Quadrat einer Primzahl ist, in zwei Faktoren zerlegbar, die voneinander und von der Einheit verschieden sind. Diese Faktoren kommen in dem Produkt $2 \cdot 3 \cdots (p-1)$ vor, und es ist daher $(p-1)!$ durch p teilbar. Wenn p das Quadrat der Primzahl μ ist, so enthält das Produkt $2 \cdot 3 \cdots (p-1)$ die Faktoren μ und 2μ und ist daher teilbar durch $2\mu^2$, mithin durch p, voraus-

1) Der Beweis, den wir hier für das Theorem von Staudt und Clausen geben, rührt von Radicke her. Siehe die „Nouvelle Correspondance Mathématique" 1880, p. 503.

gesetzt, daß man hat $2\mu < p$, d. h. $\mu > 2$. Es macht also unter den Werten von p, die keine Primzahlen sind, nur $p = 2^2$ eine Ausnahme.

b) Wir wollen uns jetzt fragen, wann $\Delta^{p-1}0^q$ durch p teilbar ist. Nach dem soeben bewiesenen Satze ist das offenbar der Fall für jeden zusammengesetzten Wert von p, der größer ist als 4; denn ein solcher Wert geht in $(p-1)!$ auf, welches seinerseits (§ 805) ein Teiler von $\Delta^{p-1}0^q$ ist. Es ist auch der Fall für $p = 4$, wenn q gerade ist. Alsdann sieht man in der Tat direkt, daß die Zahl

$$\tfrac{1}{4}\Delta^3 0^q = \tfrac{3}{4}(3^{q-1}+1) - 3\cdot 2^{q-2}$$

ganz ist, weil $3^{q-1}+1$ durch 4 teilbar ist. Es bleibt also nur noch der Fall zu untersuchen, wo p eine Primzahl ist.

c) Dividieren wir q durch $p-1$ und sei $q = k(p-1)+r$. Da $r < p-1$, so ist $\Delta^{p-1}0^r = 0$. Wenn man daher in der bekannten Formel (§ 804)

$$\Delta^{p-1}0^q = (p-1)^q - \frac{p-1}{1}(p-2)^q + \frac{(p-1)(p-2)}{1\cdot 2}(p-3)^q - \cdots \pm (p-1)$$

q in r verwandelt, so kommt

$$0 = (p-1)^r - \frac{p-1}{1}(p-2)^r + \frac{(p-1)(p-2)}{1\cdot 2}(p-3)^r - \cdots \pm (p-1),$$

vorausgesetzt, daß nicht $r = 0$ ist, in welchem Falle man rechts noch ∓ 1 hinzufügen muß. $\Delta^{p-1}0^q$ wird also auch ausgedrückt durch

$$\{(p-1)^q - (p-1)^r\} - \frac{p-1}{1}\{(p-2)^q - (p-2)^r\} + \cdots$$
$$\pm \frac{(p-1)(p-2)}{1\cdot 2}(2^q - 2^r) + \varrho,$$

wo im allgemeinen $\varrho = 0$ ist und $\varrho = (-1)^p$ im Falle $r = 0$. Inzwischen sagt uns das Theorem von Fermat[1]), daß die Primzahl p, wenn sie nicht in a aufgeht, die Zahl $a^{p-1}-1$ teilt. Mit andern Worten, a^{p-1} ist ein Vielfaches von p, vermehrt um 1; und dasselbe gilt offenbar von $a^{k(p-1)}$. Daraus folgt, daß die Differenz

$$a^q - a^r = a^r\{a^{k(p-1)} - 1\}$$

durch p teilbar ist. Man hat also $\Delta^{p-1}0^q \equiv \varrho \pmod p$.

d) Aus der obigen Diskussion ergibt sich folgendes: Nur für den Fall, daß p eine Primzahl und q durch $p-1$ teilbar ist, ist $\Delta^{p-1}0^q$ nicht teilbar durch p. Der Rest der Division von $\Delta^{p-1}0^q$ durch p ist alsdann $(-1)^p$, d. h. gleich (oder für $p=2$ kongruent) -1. Setzt man also in Formel (1) $q = 2n$ und nennt $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ alle Primzahlen von der Beschaffenheit, daß $\alpha - 1$, $\beta - 1$, $\gamma - 1, \cdots$ Teiler von $2n$ sind, so hat man

---

1) Baltzer, „Elemente der Mathematik" (2. Teil, § 13).

(2) $$B_{2n} = \text{einer ganzen Zahl} - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \cdots\right).$$

Dieses Theorem erleichtert die Herstellung von Tafeln für die Bernoullischen Zahlen. Nur mit seiner Hilfe konnte Adams[1]) die Berechnung dieser Zahlen, die Ohm begonnen hatte, bis B_{124} treiben. Außerdem enthüllt es teilweise den geheimnisvollen Zusammenhang, der zwischen der Theorie der Bernoullischen Zahlen und gewissen schwierigen zahlentheoretischen Fragen besteht. So ist der berühmte Satz von Fermat, der die Unmöglichkeit behauptet, für $n > 2$ die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ durch ganze positive Zahlen zu befriedigen, von Kummer[2]) für alle Primzahlen n bewiesen worden, die die Zähler von $B_2, B_4, \ldots, B_{n-3}$ nicht teilen.

811. Unter Erinnerung daran (§ 361), daß die Bernoullischen Zahlen mit geradem Index alternierende Zeichen haben, wollen wir jetzt nach Lipschitz[3]) zeigen, daß dasselbe von einem bestimmten Wert des Index ab auch von den ganzen Teilen[4]) allein gilt. In der Tat hat man

$B_2 = 1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3})$	$B_{16} = -6 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{17})$
$B_4 = 1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5})$	$B_{18} = 56 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{19})$
$B_6 = 1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7})$	$B_{20} = -528 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{11})$
$B_8 = 1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5})$	$B_{22} = 6193 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{23})$
$B_{10} = 1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{11})$	$B_{24} = -86579 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{13})$
$B_{12} = 1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{13})$	$B_{26} = 1425518 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3})$
$B_{14} = 2 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3})$	$B_{28} = -27298230 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{29})$
. . . .	. . . .

Da die Zahl B_{2p} positiv ist, wenn p ungerade, so ist um so mehr ihr ganzer Teil positiv, und man muß also zeigen, daß der ganze Teil von B_{2p} im Falle eines geraden p, welches nicht kleiner als 8 ist, negativ ist. Setzt man $p = 2n$, so ist der ganze Teil von B_{4n} nach (2) sicher kleiner als

$$B_{4n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{4n+1} < B_{4n} + \log(4n+1),$$

da (§ 183) $H_n - \log n < H_{n-1} - \log(n-1) < \cdots < H_1 - \log 1 = 1$.

---

1) „Crelles Journal" (1878, S. 269). Um sich von den materiellen Schwierigkeiten dieser Rechnung einen Begriff zu machen, braucht man nur zu wissen, daß von B_{100} an die Zähler mehr als 80 Ziffern haben.

2) „Crelles Journal" (1850, S. 130).

3) „Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques" (1886, p. 142).

4) Über diese ganzen Teile handeln einige Betrachtungen von Hermite in „Crelles Journal" (1876, S. 93).

Inzwischen hat man (§ 365, a), wenn man sich auch an die Stirlingsche Formel erinnert,

$$-B_{4n} = 2\frac{(4n)!}{(2\pi)^{4n}}\left(1 + \frac{1}{2^{4n}} + \frac{1}{3^{4n}} + \cdots\right) > 4\pi\sqrt{e}\left(\frac{2n}{\pi e}\right)^{4n+\frac{1}{2}}.$$

Also ist der ganze Teil von B_{4n} kleiner als

$$\log(4n+1) - 4\pi\sqrt{e}\left(\frac{2n}{\pi e}\right)^{4n+\frac{1}{2}},$$

und das Theorem von Lipschitz wird bewiesen sein, wenn es gelingt einen Wert von n zu finden, der den letzten Ausdruck negativ macht; denn er wird dann offenbar für jeden Wert von n, der größer ist als der gefundene, ebenfalls negativ sein. Es genügt für unsern Zweck, n so zu bestimmen, daß gleichzeitig

$$2n > \pi e, \quad \log(4n+1) < 4\pi\sqrt{e}$$

ist, und man sieht sofort, daß diese Ungleichungen für $n = 5$ erfüllt sind.

Successive Derivierte der Funktionen von Funktionen.

812. Es seien die successiven Derivierten einer Funktion u bekannt, und man bilde die Summe (§ 467)

$$U_{p,i} = \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{i} \frac{u^{(r)}}{r!}.$$

Da die Derivierte der Funktion $\varepsilon_r = u^{(r)}/r!$ lautet $\varepsilon_r' = (r+1)\varepsilon_{r+1}$, so ist die Derivierte eines Gliedes

$$\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\varepsilon_{r_3}\ldots\varepsilon_{r_i} \qquad (r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_i = p)$$

von $U_{p,i}$

(1)
$$\sum_{\nu=1}^{\nu=i}(r_\nu + 1)\,\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\ldots\varepsilon_{r_{\nu-1}}\varepsilon_{r_\nu+1}\varepsilon_{r_{\nu+1}}\ldots\varepsilon_{r_i}.$$

Damit eins dieser Glieder mit einem gegebenen Gliede

(2)
$$\varepsilon_{\varrho_1}\varepsilon_{\varrho_2}\varepsilon_{\varrho_3}\ldots\varepsilon_{\varrho_i} \qquad (\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \cdots + \varrho_i = p+1)$$

von $U_{p+1,i}$ zusammenfalle, muß sein

$$r_1 = \varrho_1,\ \ldots,\ r_{\nu-1} = \varrho_{\nu-1},\ r_\nu = \varrho_\nu - 1,\ r_{\nu+1} = \varrho_{\nu+1},\ \ldots,\ r_i = \varrho_i,$$

mithin ϱ_ν größer als 1. Ist dies der Fall, so findet sich das Glied (2) ϱ_ν-mal in (1). Also ist das genannte Glied in $U'_{p,i}$ eine Anzahl von Malen enthalten, gleich der S u m m e derjenigen ϱ, w e l c h e g r ö ß e r a l s 1 s i n d, d. h. $(p+1-m)$-mal, wenn man mit m die Anzahl derjenigen ϱ bezeichnet, die gleich der Einheit sind. Betrachten wir andererseits die Glieder

$$\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\varepsilon_{r_3}\ldots\varepsilon_{r_{i-1}} \qquad (r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_{i-1} = p)$$

von $U_{p,i-1}$ und multiplizieren wir jedes von ihnen mit ε_1, indem wir darauf achten, den neuen Faktor successiv an die i Stellen zu schreiben, die er einnehmen kann:

$$\varepsilon_1 \varepsilon_{r_1} \ldots \varepsilon_{r_{i-1}}, \ \varepsilon_{r_1}\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{r_{i-1}}, \ \ldots, \ \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2} \ldots \varepsilon_1.$$

Man gelangt auf solche Weise zur Herstellung eines Schemas, in welchem das Glied (2) m-mal auftritt, während die Summe aller Glieder des Schemas offenbar $i\varepsilon_1 U_{p,i-1}$ ist. Also ist das Glied (2) $(p+1-m)+m = p+1$ Male in $U'_{p,i} + i\varepsilon_1 U_{p,i-1}$ enthalten, und man hat daher

$$U'_{p,i} = (p+1)\, U_{p+1,i} - iu' U_{p,i}. \tag{3}$$

Dies ist die Fundamentaleigenschaft des Algorithmus U. Sie besteht ohne Einschränkungen, wenn man vereinbart $U_{p,i} = 0$ zu setzen, wenn i größer als p oder kleiner als 1 ist.

813. Wir sind jetzt in der Lage den allgemeinen Ausdruck der p-ten Derivierten einer Funktion $f(x) = \varphi(\psi(x))$ zu finden, wenn die successiven Derivierten der Funktionen φ und ψ bekannt sind. Wir wollen der Einfachheit halber setzen $y = f(x)$, $u = \psi(x)$, sodaß $y = \varphi(u)$ ist, und beweisen, daß

$$\frac{y^{(p)}}{p!} = \frac{\varphi'(u)}{1!} U_{p,1} + \frac{\varphi''(u)}{2!} U_{p,2} + \frac{\varphi'''(u)}{3!} U_{p,3} + \cdots \tag{4}$$

ist. Die Derivation nach x, die unter Berücksichtigung von (3) ausgeführt wird, bewirkt nur, daß sich p in $p+1$ verwandelt; und da die Formel (4) offenbar für $p=1$ richtig ist, so gilt sie für jeden Wert von p.

814. Anwendungen. a) Die p-te Derivierte von $y = \varphi(e^x)$ läßt sich mittelst des Algorithmus (§ 807, a)

$$U_{p,i} = \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{i} \frac{e^x}{r!} = e^{ix} \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{i} \frac{1}{r!} = e^{ix} \frac{\Delta^i 0^p}{p!}$$

ausdrücken. Die Formel (4) liefert

$$y^{(p)} = \frac{\varphi'(e^x)}{1} e^x \Delta 0^p + \frac{\varphi''(e^x)}{1\cdot 2} e^{2x} \Delta^2 0^p + \frac{\varphi'''(e^x)}{1\cdot 2\cdot 3} e^{3x} \Delta^3 0^p + \cdots. \tag{5}$$

b) Setzt man insbesondere

$$\varphi(x) = \frac{2x}{1+x^2}, \text{ sodaß } \frac{\varphi^{(i)}(1)}{i!} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{i-1} \sin(i-1)\frac{\pi}{4}$$

ist, so wird bekanntlich (§ 354) $y = c^{Ex}$. Die Formel (5) gibt dann für $x = 0$ den folgenden Ausdruck der p-ten Eulerschen Zahl durch die Differenzen von 0^p:

$$E_p = -\frac{1}{4}(2\Delta^2 0^p - 2\Delta^3 0^p + \Delta^4 0^p)$$
$$+\frac{1}{4^2}(2\Delta^6 0^p - 2\Delta^7 0^p + \Delta^8 0^p)$$
$$-\frac{1}{4^3}(2\Delta^{10} 0^p - 2\Delta^{11} 0^p + \Delta^{12} 0^p) + \cdots .$$

c) Für $\varphi(x) = 1/x$ wird die Formel (4)

$$\frac{y^{(p)}}{p!} = \sum_{i=1}^{i=p} \{(-1)^i y^{i+1} U_{p,i}\}.$$

Macht man jetzt successiv

$$u = \frac{1}{x}(1 - e^{-x}), \quad u = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

und setzt in der letzten Formel $x = 0$, so gibt diese uns die folgenden Ausdrücke der Bernoullischen und Eulerschen Zahlen:

$$\frac{B_p}{p!} = \sum_{i=1}^{i=p} \left\{(-1)^{i+p} \mathop{\mathrm{S}}_p^i \frac{1}{(r+1)!}\right\}, \quad \frac{E_{2p}}{(2p)!} = \sum_{i=1}^{i=p} \left\{(-1)^i \mathop{\mathrm{S}}_p^i \frac{1}{(2r)!}\right\}.$$

d) Man setze endlich

$$y = (1 + \alpha x)(1 + \beta x)(1 + \gamma x) \cdots = e^u$$

und bezeichne mit s_r und c_r die Summe der r-ten Potenzen der Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ und die der Produkte von je r dieser Zahlen. Für $x = 0$ ist offenbar

$$\frac{y^{(r)}}{r!} = c_r, \quad \frac{u^{(r)}}{r!} = \frac{s_r}{r}.$$

Wenn man nun in Formel (4) successiv $\varphi(x) = e^x$, $\varphi(x) = \log x$ setzt und $x = 0$, so findet man die Formeln von Waring (§ 467) wieder.

Einiges über die Variationsrechnung.

815. Es sei eine Funktion y der Veränderlichen x definiert, und wir wollen uns eine andre Funktion denken von solcher Beschaffenheit, daß für jeden Wert von x der zugehörige Wert der neuen Funktion unendlich wenig von dem von y verschieden ist. Man pflegt die neue Funktion mit $y + \delta y$ zu bezeichnen, und die infinitesimale Größe δy nennt man die *Variation* von y. Sie ist eine vollkommen willkürliche Größe, sei es, daß man von einem Wert von x zu einem andern übergeht, sei es, daß man einen gegebenen Wert von x betrachtet. Es wird also in Wirklichkeit nicht eine, sondern es werden unendlich viele Funktionen durch $y + \delta y$ dargestellt. Man kann sich leicht überzeugen, daß das Variationszeichen δ denselben

Gesetzen gehorcht wie das Differentiationszeichen d. Es ist in der Tat fast evident, daß man hat

$$\delta(u+v) = \delta u + \delta v, \quad \delta uv = u\delta v + v\delta u \quad \text{u. s. w.}$$

Ferner ist auf Grund der Definition

$$\delta dy = d(y+\delta y) - dy = d\delta y, \quad \delta\int y\,dx = \int(y+\delta y)\,dx - \int y\,dx = \int\delta y\cdot dx.$$

Wenn y eine Funktion der Funktionen $u, v, w, \ldots$ ist, so hat man

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial u}\delta u + \frac{\partial y}{\partial v}\delta v + \frac{\partial y}{\partial w}\delta w + \cdots.$$

Es ist hier von Wichtigkeit zu bemerken, daß eine Funktion y von einer oder von mehreren Funktionen auch in der Weise abhängen kann, daß, wenn diese Funktionen gegeben sind, y für jedes x einen bestimmten Wert annimmt. Auf diese Weise ist y nicht eine Funktion von $u, v, w, \ldots$ im gewöhnlichen Sinne; sie bewahrt aber gewisse Eigenschaften der gewöhnlichen Funktionen, vorausgesetzt, daß man das Zeichen d durch δ ersetzt. Insbesondere ist es, wenn man haben will, daß die Funktion ein Minimum oder Maximum wird, notwendig, daß ihre Variation verschwindet. Man kann in der Übertragung der Eigenschaften der Differentiale auf die Variationen noch weiter gehen; wir müssen uns hier aber Schranken auferlegen.[1])

816. Bei verschiedenen Fragen der Geometrie und Mechanik wird man dazu geführt, eine solche Funktion y von x zu suchen, daß das Integral

$$U = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', y'', \ldots)\,dx$$

den kleinsten oder den größten Wert annimmt, dessen es fähig ist. Die Bedingung, welche erfüllt sein muß, ist $\delta U = \int_{x_0}^{x_1}\delta f\cdot dx = 0$.

Vor allem bemerke man folgendes: Wird der unbekannten Funktion y die willkürliche infinitesimale Variation δy erteilt, so hat man

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial f}{\partial y''}\delta y'' + \cdots.$$

Ferner ist

$$\int\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\,dx = \int\frac{\partial f}{\partial y'}\,d\delta y = \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y - \int\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y\,dx.$$

Ebenso ist, wenn man y in y' verwandelt,

1) Wegen näherer Einzelheiten ziehe man den „Cours d'Analyse" von Jordan (t. III, p. 470) zu Rate. Der Leser wird gut tun, auch die Kritik der Variationsrechnung von Hadamard zu lesen im „Bulletin des Sciences math. et astr." (1901, p. 5).

$$\int \frac{\partial f}{\partial y''} \delta y'' dx = \frac{\partial f}{\partial y''} \delta y' - \int \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y''} \delta y' dx$$
$$= \frac{\partial f}{\partial y''} \delta y' - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y''} \delta y + \int \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial f}{\partial y''} \delta y \, dx;$$

ferner, wenn man noch einmal y in y' verwandelt,

$$\int \frac{\partial f}{\partial y'''} \delta y''' dx = \frac{\partial f}{\partial y'''} \delta y'' - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'''} \delta y' + \int \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial f}{\partial y'''} \delta y' dx$$
$$= \frac{\partial f}{\partial y'''} \delta y'' - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'''} \delta y' + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial f}{\partial y'''} \delta y - \int \frac{d^3}{dx^3} \frac{\partial f}{\partial y'''} \delta y \, dx;$$

u. s. w. Setzt man folglich

$$\Phi = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial f}{\partial y''} - \frac{d^3}{dx^3} \frac{\partial f}{\partial y'''} + \cdots,$$
$$\sigma = \left(\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y''} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial f}{\partial y'''} - \cdots\right) \delta y$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial y''} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'''} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial f}{\partial y^{\mathrm{IV}}} - \cdots\right) \delta y'$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial y'''} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y^{\mathrm{IV}}} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial f}{\partial y^{\mathrm{V}}} - \cdots\right) \delta y'' + \cdots,$$

so hat man $\delta U = \int \Phi \delta y \, dx + \sigma$. Beschränkt man die Integration auf das Intervall (x_0, x_1) und versieht die für $x = x_0$ und $x = x_1$ berechneten Größen mit dem Index 0 bezw. 1, so ergibt sich

$$\delta U = \int_{x_0}^{x_1} \Phi \delta y \, dx + \sigma_1 - \sigma_0.$$

Wegen der Willkürlichkeit von δy spaltet sich die Gleichung $\delta U = 0$ in $\Phi = 0$ (die unbestimmte Gleichung), welche für alle Werte von x zwischen x_0 und x_1 erfüllt sein muß, und in $\sigma_1 - \sigma_0 = 0$ (die Grenzengleichung). Die Frage ist also reduziert auf die Integration der Differentialgleichung $\Phi = 0$, gefolgt von der Bestimmung der willkürlichen Größen, die so geschehen muß, daß die Grenzbedingungen erfüllt sind.

817. Beispiele. a) Die kürzeste Linie, welche von einem Punkte der Ebene nach einem andern geht, bestimmt man dadurch, daß man das Integral $U = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx$ zu einem Minimum zu machen sucht. Dieses Integral stellt die Länge der unbekannten Kurve zwischen dem Punkt (x_0, y_0) und dem Punkt (x_1, y_1) dar. Man hat hier

$$f = \sqrt{1 + y'^2}, \quad \Phi = -\frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad \sigma = \frac{y' \delta y}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Die Gleichung $\Phi = 0$ gibt sofort $y' = a$, $y = ax + b$; und die Konstanten

a und b bestimmen sich aus den Bedingungen $y_0 = ax_0 + b$, $y_1 = ax_1 + b$. Was die Grenzengleichung anbetrifft, so ist sie identisch erfüllt; denn da die unendlich vielen Funktionen y für $x = x_0$ den vorgeschriebenen Wert y_0 und für $x = x_1$ den Wert y_1 annehmen müssen, so hat man immer $\delta y_0 = 0$, $\delta y_1 = 0$ und daher $\sigma_1 - \sigma_0 = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}(\delta y_1 - \delta y_0) = 0$. Wäre dagegen nach der kürzesten Linie zwischen den Geraden $x = x_0$ und $x = x_1$ gefragt worden, so wären δy_1 und δy_0 willkürlich gewesen, und die Bedingung $\sigma_1 - \sigma_0 = 0$ hätte $a = 0$ gegeben, mithin $y = b$.

b) Suchen wir die Linie schnellsten Abstiegs, d. h. die Kurve einer Vertikalebene, welche ein schwerer materieller Punkt durchlaufen muß, wenn man wünscht, daß er von einer gegebenen Lage M_0 ausgehend, in möglichst kurzer Zeit eine andere vorgeschriebene Lage M_1 erreicht. Wir wollen den Anfangspunkt nach M_0 verlegen und die y-Achse senkrecht nach unten richten. Aus den Elementen der Physik ist bekannt, daß, wenn t die zum Durchlaufen des Bogens $M_0M = s$ gebrauchte Zeit bedeutet, $ds/dt = \sqrt{2gy}$ ist, wobei g die Gravitationskonstante bezeichnet. Die zu einem Minimum zu machende Größe ist

$$t = \int_0^{s_1} \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\, dx,$$

sodaß man, abgesehen von einem konstanten Faktor, hat

$$f = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}, \quad \Phi = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}, \quad \sigma = \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y.$$

Da f eine Funktion von y und y' allein ist, so hat man unter Beachtung der unbestimmten Gleichung

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' = y' \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(y' \frac{\partial f}{\partial y'}\right).$$

Also ist $f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = \text{Const.}$, d. h., wenn man mit $1/\sqrt{2a}$ die Konstante bezeichnet, $y(1 + y'^2) = 2a$. Daraus folgt $dx : \sqrt{y} = dy : \sqrt{2a - y}$, und es ist unnötig weiter zu gehen, da man durch Verwandlung von x und y in $\pi a - x$ bezw. $2a - y$ eine frühere Gleichung (§ 772, c) wiederfindet, welche die Cykloide charakterisiert. Diese Kurve hat eine Spitze in dem Ausgangspunkt M_0 und eine horizontale Basis. Die beiden Konstanten, a und die durch die Integration der letzten Gleichung hineinkommende Konstante, bestimmen sich, indem man ausdrückt, daß die Kurve durch M_0 und M_1 hindurchgeht. Auch hier ist die Grenzengleichung identisch erfüllt, da $\delta y_0 = 0$, $\delta y_1 = 0$ ist. Hätte man dagegen dem beweglichen Punkte nur vorgeschrieben, in kürzester Zeit auf der Vertikalen $x = x_1$ anzukommen, so hätte man auch noch $\delta y_0 = 0$ gehabt, während δy_1 willkürlich geblieben wäre, und die Grenzengleichung $\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y_1 = 0$ hätte gegeben $\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$, d. h. $y_1' = 0$. Der bewegliche Punkt müßte also in horizontaler

Richtung auf der angegebenen Vertikalen ankommen. In diesem Falle ist die Konstante a durch die Bedingung bestimmt, daß man für $x = x_1$ nicht $y = y_1$, wohl aber $y' = 0$ haben muß.

818. Wenn auch x_0 und x_1 variieren könnten, d. h. wenn die Punkte M_0 und M_1, anstatt fest zu sein oder auf den Geraden $x = x_0$ und $x = x_1$ bleiben zu müssen, allgemeiner die Freiheit hätten sich längs der Kurven $y = \varphi(x)$ und $y = \psi(x)$ zu bewegen, so müßte man zu der bereits erhaltenen Variation von U noch diejenige hinzufügen, welche von dem Variieren der Grenzen herrührt, d. h.

$$\int\limits_{x_0+\delta x_0}^{x_1+\delta x_1} f\,dx - \int\limits_{x_0}^{x_1} f\,dx = \int\limits_{x_1}^{x_1+\delta x_1} f\,dx - \int\limits_{x_0}^{x_0+\delta x_0} f\,dx = f_1 \delta x_1 - f_0 \delta x_0.$$

Also ist

$$\delta U = \int\limits_{x_0}^{x_1} \Phi\,\delta y\,dx + (\sigma + f\delta x)_0^1.$$

An den Grenzen hängen die δx von den δy ab; denn wenn der Punkt (x, y) nur gezwungen ist, die Kurve $y = \chi(x)$ nicht zu verlassen, so ist nach der Variation die neue Ordinate $y + \delta y$, vermehrt um die vom Variieren von x herrührende Variation, d. h. $y'\delta x$; andererseits wird dieselbe Ordinate dargestellt durch $\chi(x + \delta x)$, d. h. $\chi(x) + \chi'(x)\delta x$. Daraus folgt $\delta y = \{\chi'(x) - y'\}\delta x$, mithin

$$\delta y_0 = \{\varphi'(x_0) - y_0'\}\,\delta x_0, \quad \delta y_1 = \{\psi'(x_1) - y_1'\}\,\delta x_1.$$

819. Nehmen wir wieder das Problem des schnellsten Abstiegs vor, indem wir voraussetzen, daß der Ausgangs- und der Endpunkt nur gezwungen sind, sich auf gewissen Kurven $y = \varphi(x)$ bezw. $y = \psi(x)$ zu befinden. Die unbestimmte Gleichung ist immer dieselbe, mithin die von dem beweglichen Punkte beschriebene Kurve immer eine Cykloide. Um die Grenzengleichung zu bilden, bemerke man, daß wegen $y(1 + y'^2) = 2a$

$$f = \frac{\sqrt{2a}}{y}, \quad \sigma = \frac{y'\delta y}{\sqrt{2a}}$$

und infolgedessen

$$\sigma + f\delta x = \frac{y'}{\sqrt{2a}}\delta y + \frac{\sqrt{2a}}{y}\delta x = \{1 + y'\chi'(x)\}\,\frac{\delta x}{\sqrt{2a}}$$

ist. Also hat man

$$(\sigma + f\delta x)_0^1 = \{1 + y_1'\psi'(x_1)\}\,\frac{\delta x_1}{\sqrt{2a}} - \{1 + y_0'\varphi'(x_0)\}\,\frac{\delta x_0}{\sqrt{2a}},$$

und die Grenzengleichung zerlegt sich daher in die Gleichungen

$$1 + y_1'\psi'(x_1) = 0, \quad 1 + y_0'\varphi'(x_0) = 0.$$

Diese sagen uns, daß die Cykloide die beiden gegebenen Kurven unter rechtem Winkel treffen muß.

820. Wir wollen zu dem Falle zweier oder mehrerer Funktionen $y, z, \ldots$ von x übergehen, und es sei das Integral

$$U = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, z, y', z', y'', z'', \ldots)\, dx$$

zu einem Minimum oder Maximum zu machen. Man denke sich die Rechnungen des § 816 wiederholt und nenne Ψ und τ die auf die Funktion z bezüglichen Größen Φ und σ. Es ergibt sich dann

$$\delta U = \int_{x_0}^{x_1} (\Phi\,\delta y + \Psi\,\delta z)\, dx + (\sigma + \tau)_0^1.$$

Wenn zwischen y und z keine Beziehung besteht, so hat man zwei unbestimmte Gleichungen statt einer, nämlich $\Phi = 0$ und $\Psi = 0$. Soll aber eine Relation $F(x, y, z) = 0$ stattfinden, so sind die Variationen von y und z nicht unabhängig, weil

$$\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z = 0$$

ist. Für das Verschwinden von δU wird nur erfordert, daß man für alle zwischen x_0 und x_1 enthaltenen Werte von x hat $\Phi \Big/ \frac{\partial F}{\partial y} = \Psi \Big/ \frac{\partial F}{\partial z}$.

821. Es sei z. B. auf der Fläche $F(x, y, z) = 0$ die kürzeste Verbindungslinie zwischen zwei Punkten zu bestimmen. Es handelt sich darum das Integral

$$U = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx$$

zu einem Minimum zu machen. Hier hat man

$$\Phi = -\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}, \quad \Psi = -\frac{d}{dx}\frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}.$$

Wenn man mit s den Bogen der unbekannten Kurve bezeichnet und bemerkt, daß

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = \frac{dy}{ds}, \quad \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = \frac{dz}{ds}$$

ist, so sieht man (§ 633), daß Φ und Ψ proportional sind zu den Kosinus μ, ν der Winkel, welche die Hauptnormale der genannten Kurve mit der y-Achse und der z-Achse bildet. Andererseits wissen wir (§ 659), daß $\partial F/\partial y$ und $\partial F/\partial z$ proportional sind zu den analogen Kosinus $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ der Flächennormale. Es würde genügen, y als Integrationsvariable anzunehmen, um die Proportionalität von λ, ν zu $\mathfrak{L}, \mathfrak{N}$ zu beweisen. Daraus folgt

$$\frac{\lambda}{\mathfrak{L}} = \frac{\mu}{\mathfrak{M}} = \frac{\nu}{\mathfrak{N}} = \pm 1,$$

sodaß die kürzesten Linien so beschaffen sind, daß in jedem Punkte die Hauptnormale mit der Flächennormale zusammenfällt. Sie sind also (§ 665) die geodätischen Linien.

822. Bei andern Fragen wünscht man, daß ein Integral ein Minimum oder Maximum wird nicht für alle Funktionen, von denen der Integrand abhängt, sondern nur für diejenigen, welche ein anderes Integral V konstant erhalten. Denkt man sich die Betrachtungen wiederholt, welche bei der Aufsuchung der Minima und der Maxima der Funktionen von mehreren aneinander gebundenen Variablen angestellt worden sind, so gelangt man zu dem Schluß, daß man nicht die Variation von U, sondern vielmehr die von $U + \lambda V$ gleich Null setzen muß, wo λ eine passend zu bestimmende Konstante ist.

823. Beispiele. a) Unter den Kurven von gegebener Länge, die den Punkt (x_0, y_0) mit dem Punkt (x_1, y_1) verbinden, wollen wir uns vornehmen eine zu finden, für welche die zwischen der Kurve, der x-Achse und den äußersten Ordinaten enthaltene Fläche ein Minimum oder Maximum wird. Es handelt sich hier darum, zu sehen, welche Funktion y unter denjenigen, die das zweite der Integrale

$$U = \int_{x_0}^{x_1} y\,dx, \qquad V = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

ungeändert lassen, das erste Integral zu einem Minimum oder Maximum macht. Setzt man $f = y + \lambda\sqrt{1 + y'^2}$, so muß, wie wir gesehen haben (§ 817, b)

$$f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = y + \frac{\lambda}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

konstant bleiben. b heiße diese Konstante. Alsdann erhält man durch Auflösung nach y' und Integration

$$x = \int \frac{(b - y)\,dy}{\sqrt{\lambda^2 - (b - y)^2}} = a + \sqrt{\lambda^2 - (b - y)^2}$$

und endlich $(x - a)^2 + (y - b)^2 = \lambda^2$. Die Konstanten a, b, λ bestimmen sich durch die Bedingungen, daß die Kurve die gegebenen Punkte enthalten und daß V den vorgeschriebenen konstanten Wert annehmen muß.

b) Wir wollen unter den Kurven von gegebener Länge, die von M_0 nach M_1 gehen, eine solche suchen, daß der Schwerpunkt des Bogens $M_0 M_1$ möglichst weit von einer gegebenen Geraden entfernt ist. Wählt man diese als x-Achse, so muß man (§ 773) das erste der Integrale

$$U = \int_{s_0}^{s_1} y\,ds = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 + y'^2}\,dx, \qquad V = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

durch eine Funktion y zu einem Maximum machen, die unter denjenigen gewählt ist, welche das zweite Integral einen gegebenen Wert annehmen lassen. Die Funktion f, welche man zu betrachten hat, ist $f = (y + \lambda)\sqrt{1 + y'^2}$, und man hat

$$f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y + \lambda}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Die Integration von $(y + \lambda)/\sqrt{1 + y'^2} = \text{Const.}$ führt zu der Gleichung einer Kettenlinie.

824. Die Frage des § 816, die in § 820 auf den Fall zweier oder mehrerer Funktionen ausgedehnt worden ist, läßt sich in einer andern Richtung verallgemeinern, indem man Funktionen von zwei oder mehreren Veränderlichen betrachtet. Wir beschränken uns auf den einfachsten Fall und betrachten ein Integral

$$U = \iint f(x, y, z, p, q)\, dx\, dy,$$

welches sich über ein gegebenes Integrationsgebiet erstreckt. z ist in diesem Gebiet eine unbekannte Funktion von x, y, die derart bestimmt werden soll, daß der Wert von U ein Minimum oder Maximum wird. p und q vertreten wie gewöhnlich die Symbole $\partial z / \partial x$ und $\partial z / \partial y$. Eine infinitesimale Variation δz bringt bei der zu integrierenden Funktion die Variation hervor

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial z} \delta z + \frac{\partial f}{\partial p} \delta p + \frac{\partial f}{\partial q} \delta q .$$

Inzwischen ist

$$\frac{\partial f}{\partial p} \delta p = \frac{\partial f}{\partial p} \delta \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial \delta z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial p} \delta z \right) - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \delta z,$$

$$\frac{\partial f}{\partial q} \delta q = \frac{\partial f}{\partial q} \delta \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial \delta z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial q} \delta z \right) - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \delta z$$

und infolgedessen hat man, wenn

$$\Phi = \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial q}$$

gesetzt wird,

$$\delta U = \iint \Phi \, \delta z \cdot dx\, dy + \iint \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial p} \delta z \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial q} \delta z \right) \right\} dx\, dy .$$

Der zweite Bestandteil der rechten Seite ist immer auf eine Summe von zwei einfachen Integralen reduzierbar, in denen die Werte auftreten, welche δz nur auf der Begrenzung des Integrationsgebietes annimmt. Denkt man sich in der Tat aus der Bedingung (vgl. § 731) $L(x, y) \leq 0$, die das genannte Gebiet definiert, die Ungleichungen $a(x) < y \leq b(x)$ hergeleitet, und gestatten diese nur dann die Existenz von y, wenn x zwischen α und β liegt, so hat man offenbar

$$\iint \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial q} \delta z \right) dx\, dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{\partial f}{\partial q} \delta z \right)_{y=a}^{y=b} \cdot dx .$$

In analoger Weise verfährt man bei dem andern Integral. Damit δU verschwinde, muß in allen Punkten des gegebenen Gebietes $\Phi = 0$ sein. Integriert man die partielle Differentialgleichung $\Phi = 0$, so ergibt sich der allgemeine Ausdruck von z; und die willkürlichen Funktionen, die in ihm auftreten, bestimmen sich, indem man aufschreibt, daß auch der andere Teil von δU verschwindet. Insbesondere ist diese letzte Bedingung erfüllt, wenn die Funktion z auf der Begrenzung gegeben ist, weil alsdann in jedem Punkte der Begrenzung $\delta z = 0$ sein muß.

825. Es sei z. B. durch eine gegebene geschlossene Kurve eine Fläche zu legen, auf welcher die Kurve den kleinstmöglichen Flächeninhalt umgrenzt. Es handelt sich darum, das Integral $\iint \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy$ unter den am Ende des vorigen Paragraphen angegebenen Bedingungen zu einem Minimum zu machen. Im vorliegenden Falle ist

$$f=\sqrt{1+p^2+q^2}, \qquad \Phi=-\frac{\partial}{\partial x}\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

und es muß folglich (§ 686) sein

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0.$$

Wir sehen auf diese Weise, daß die durch die gegebene Kurve zu legende Fläche eine von denen ist, welche wir bereits Minimalflächen genannt haben. Und gerade auf dieser Eigenschaft beruht es, daß man diese Flächen als Flüssigkeitslamellen experimentell realisieren[1]) kann.

1) Vergleiche die schönen „Recherches expérimentales et théoriques“ von Plateau in den „Mémoires in-4° de l'Académie de Belgique“ (1867, p. 64) und das dritte Kapitel der „Leçons sur la capillarité“ von H. Poincaré. Siehe auch, betreffs einer einfacheren Realisierung des Katenoids und experimentellen Bestätigung des ersten in § 823 erhaltenen Resultates, eine interessante Arbeit von Van der Mensbrugghe „On the tension of liquid films“ (Philosophical Magazine, 1867).

Berichtigungen.

S. 8, Zeile 14 v. unt., hinter „Große Determinanten“ hinzuzufügen „oder Maioren“.
„ 10, „ 11 „ „ „ Minoren „ r-ter Ordnung.
„ 135, „ 11 ist zu lesen $(1-\frac{1}{3}\log 3)^3$ statt $(1-\frac{1}{3}\log 3)^2$.
„ 188, Fußnote „ „ „ Conférences „ Conferences.
„ 195, Zeile 24 „ „ „ $f(x'')>\mu_0(a)-\varepsilon$ statt $f(x'')<\mu_0(a)-\varepsilon$.
„ 202, „ 17, hinter x hinzuzufügen $\gtrless 1$.
„ 207, „ 13 „ Oszillation hinzuzufügen: oder Schwankung.
„ 234, „ 2, ist zu lesen „U_n-“ statt „U_u-“.
„ 254, „ 15 u. 16 „ „ „ $\varphi_n(x_n')$ „ $\varphi_n(x)$.
„ 305, „ 1 „ „ „ 272 „ 277.
„ 324, „ 20 } „ „ „ 383 „ 380.
„ 325, „ 5 }
„ 326, „ 7 v. unt., ist zu lesen 378 statt 375.
„ 411, Fußnote „ „ „ Bd. I S. 239; Bd. II S. 615.
„ 416, „ „ „ „ Bd. I S. 218 u. 227.
„ 585 ist in der Figur rechts zu lesen $-\infty$ statt ∞.
„ 649, Zeile 5 v. unt., ist zu lesen § 693 statt § 694.
„ 680, „ 5 } „ „ „ § 703 „ § 704.
„ 681, „ 7 v. unt. }
„ 709, „ 7 „ „ „ „ „ nicht größer statt kleiner.
„ 730, „ 13 „ „ „ „ „ $k_m f_{im}$ „ $k_n f_{in}$.
„ 798, „ 14 „ „ hinter „Zweige“ hinzuzufügen: (vgl. § 599, f).
„ 804, „ 4, „ „infolgedessen“ „ (vgl. § 626, f).
„ 840, „ 20, „ „Schattengrenze“ „ (vgl. § 661).

Zu **S. 98 § 142.** Beim zweiten der in diesem Paragraphen bewiesenen Sätze ist nicht bloß die Voraussetzung $a_n > 0$ gemacht, sondern es wird außerdem noch erfordert $\lim a_n > 0$ für unendliches n. Die Gleichung (4) bleibt also unbewiesen[1]) im Falle $\lim a_n = 0$. Um diese Lücke auszufüllen, würde es genügen zu zeigen, daß der erste Satz (folglich auch der zweite) bestehen bleibt, wenn a_n nach Unendlich konvergiert. Übrigens ist leicht zu beweisen, daß allgemeiner das Theorem des § 141 bestehen bleibt, d. h. daß folgendes gilt:

Wenn b_n bei unendlich zunehmendem n schließlich beständig wächst, und wenn

$$\lim b_n = \infty, \quad \lim \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \infty$$

ist, so konvergiert auch a_n/b_n nach Unendlich.

Ist in der Tat l beliebig groß vorgelegt, und hat man ν derart fixiert, daß für $n > \nu$

$$\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} > 2l$$

ist, so findet man durch die Schlußweise des § 141

$$\frac{a_n - a_\nu}{b_n - b_\nu} > 2l, \qquad \frac{a_n}{b_n} - l > \frac{a_\nu - l b_\nu}{b_n} + \left(1 - \frac{b_\nu}{b_n}\right) l.$$

Wählt man also n genügend groß und beachtet, daß das zweite Glied auf der rechten Seite der letzten Ungleichung für unendliches n nach l konvergiert, so wird man schließlich immer haben

$$\frac{a_n}{b_n} > l, \quad \text{folglich } \lim \frac{a_n}{b_n} = \infty.$$

Zu demselben Schluß gelangt man auch durch die Bemerkung, daß a_n schließlich beständig wächst und nach Unendlich konvergiert. Wendet man also auf b_n/a_n das Theorem an, so findet man, daß dieses Verhältnis nach Null konvergiert u. s. w. In analoger Weise verallgemeinert man das Theorem des § 140.

Zu **S. 782.** Die Zeilen 5, 6, 7, 8 v. unt. sind durch folgendes zu ersetzen: Andererseits ist leicht zu beweisen, daß

$$1 < 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \cdots < 1 + \frac{x^2}{3}\left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \cdots\right)^2.$$

Daraus ergibt sich für $x = \dfrac{1 - e^{-t}}{1 + e^{-t}}$

$$1 < \frac{t}{2x} < 1 + \frac{t^2}{12} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{t} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + e^{-t}}{1 - e^{-t}} < \frac{1}{t} + \frac{t}{12}.$$

Also ist

$$0 < \frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} < \frac{t}{12},$$

Bemerkungen.

Um den umständlichen Ausdruck „Bilden der Derivierten einer Funktion" zu vermeiden, hat der Übersetzer sich erlaubt das italienische „derivare" kurz mit „derivieren" wiederzugeben.

Wenn auf S. 254 ff. gesagt wird, eine Reihe konvergiere in einem Intervall (α, β) gleichmäßig mit Ausschluß der Grenzen, so ist gemeint, daß sie in jedem Intervall (α', β'), welches im Innern von (α, β) liegt, gleichmäßig konvergiert.

---

1) Diese Bemerkung hat ein ehemaliger Schüler von Herrn Cesàro, Dr. Gustavo Sannia, gemacht.

Sachregister.

(Die Zahlen bezeichnen die Seiten des Buches.)